

Національний транспортний університет
Міністерство освіти і науки України

Національний транспортний університет
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ШЛЮНЬ НАТАЛІЯ ВОЛОДИМИРІВНА

УДК539.3; 625.7/.8

ДИСЕРТАЦІЯ
МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ НЕОДНОРІДНИХ
КОМПОЗИТИВ З УРАХУВАННЯМ МАКРО І МІКРО
ТЕРМОМЕХАНІЧНИХ ЕФЕКТІВ У НИХ

05.23.17 – будівельна механіка

Подається на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень.
Використання ідей, результатів і текстів інших
авторів мають посилання на відповідне джерело

 Н. В. Шлюнь

Ідентичність усіх примірників дисертації

Засвідчую

В.б.вченого секретаря

докторської ради Д 26.059.02

 О. М. Ложачевська



Київ – 2025

АНОТАЦІЯ

Шлюнь Н.В. Моделі та методи розрахунку неоднорідних композитів з урахуванням макро і мікро термомеханічних ефектів у них. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 05.23.17 «Будівельна механіка» (192 – Будівництво та цивільна інженерія). – Національний транспортний університет Міністерства освіти і науки України, Київ, 2025.

Дисертація присвячена вирішенню **актуальної** науково-практичної проблеми встановлення закономірностей термонапруженого і термодетформованого станів шаруватих конструкцій дорожнього одягу доріг та мостів з урахуванням впливу несумісності термомеханічних параметрів матеріалів при зміні температури та на основі цього удосконалення таких конструкцій, а також удосконалення покриттів, армованих металевими і неметалевими стрижнями та неоднорідними включеннями, за рахунок раціонального підбору термомеханічних параметрів їх елементів, що мінімізує або виключає їх деформативну несумісність при температурних впливах в умовах сезонних та добових змін температури.

Як показує досвід експлуатації автомобільних доріг та мостів у країнах з великими перепадами температур у зимовий та літній час, в їх конструкціях відбуваються найінтенсивніші прояви ефектів виникнення дефектів, тріщиноутворення, локальних деструкцій та загальної деградації композитних матеріалів. В умовах частих змін значень температури в неоднорідних конструкціях дорожнього одягу доріг та мостів з термомеханічною несумісністю їх компонентів ці дефекти можуть сприяти їхньому прискореному старінню. У той же час при термомеханічній сумісності матеріалів досягається більш сприятливий розподіл внутрішнього напруження термічного і механічного походження, що виключає передчасну

деградацію міцності контактуючих фаз і всього компонента в цілому.

Підвищення точності моделювання та теоретичної побудови полів термдеформації і термонапружень в шаруватих конструкціях дорожнього одягу, посилених арматурою, є одним із основних факторів, що сприяють покращенню їх якості та збільшення довговічності в умовах сезонних та добових змін температури. Для їх досліджень у роботі розроблені нові термомеханічні та математичні моделі термомеханічного деформування неоднорідних конструкцій з армуючими включеннями у вигляді систем диференціальних рівнянь. З використанням комп'ютерних та аналітичних методів побудовані їх розв'язки.

Показано, що внутрішній механізм зародження концентраторів внутрішньоструктурних термонапружень в зонах інтерфейсних поверхонь між контактуючими фазами матеріалу і арматури, що спровоковані несумісністю термомеханічних фракцій системи, може бути основною причиною ініціювання термопошкоджень (зокрема і на мікрорівнях, а тому і малопомітних на початкових етапах), які сприяють деградації матеріалу та його подальшої деструкції.

Виконаний аналіз термонапружень у матрицях, які містять сферичні включення. Для таких композитів проведене теоретичне моделювання показало, що в цьому випадку додаткові внутрішні термонапруження концентруються на контактній сферичній поверхні, хоча в даному випадку радіальні та колові термонапруження рівні за модулем, мають різні знаки і зменшуються пропорційно кубу радіальної координати. Такі поля термонапружень особливо несприятливі для крихкого матеріалу матриці, який погано чинить опір напруженням розтягу, що в даному випадку обов'язково реалізуються як для додатних, так і від'ємних приростів температури. Отримані у дисертації аналітичні вирази для термонапружень можуть бути використані при дослідженні міцності асфальтобетонів з

мінеральними наповнювачами.

На основі методів термопружності розроблена нова математична модель термонапруженого стану асфальтобетонного дорожнього покриття з гумовими включеннями. Для сферичної моделі гумового зерна та включення з модифікованої гуми сформовано розв'язувальні рівняння термопружного деформування системи, побудовано їх аналітичні розв'язки.

В результаті аналізу отриманих розв'язків дано пояснення особливості термонапруженої поведінки комбінованої системи, що полягає у можливості збереження цілісності системи з дрібнодисперсними гумовими зернами та викришуванням відносно великих гумових включень. Показано, що у зв'язку зі специфічними термомеханічними властивостями гум у бітумі в зоні його контакту з включеннями можуть виникати додаткові концентрації термонапружень, які викликані термомеханічною несумісністю фаз композиту і призводять до зародження в бітумі на контактній поверхні додаткових пластичних деформацій та деструкцій, що викликають викришування включень.

За допомогою аналітичних розрахунків продемонстровано, що пом'якшення додаткових термомеханічних дефектів та їх усунення можна досягти за рахунок зниження термомеханічної несумісності властивостей фаз композиту шляхом бітумного модифікування гуми. При цьому ефективність цього способу підвищується зі збільшенням глибини проникнення модифікованого шару в гумове зерно.

У композитних матеріалах з волокнистим наповнювачем та в асфальтобетонах зі стрижневою або дротяною арматурою також реалізується внутрішній механізм їх руйнування. В дисертаційній роботі з застосуванням моделі пружного середовища з циліндричним включенням встановлено, що зміна температури в такій системі супроводжується генеруванням додаткових внутрішніх радіальних та колових термонапружень у матеріалі

матриці. Ці напруження концентрується на поверхні контакту матриці та арматури і швидко зменшуються пропорційно квадрату радіальної координати. При цьому при суттєвій термомеханічній несумісності матеріалів матриці та арматури ці додаткові термонапруження можуть значно перевищувати межі міцності матеріалу матриці та приводити до її локальних пошкоджень та руйнувань. Отримано розв'язки у замкнутій формі сформульованих диференціальних рівнянь термопружності, які дозволяють визначати допустимі рівні несумісності властивостей матриці та арматури.

Досліджено проблему про еволюцію термонапружень в пружному середовищі конструкційних матеріалів зі сферичною порожниною, заповненою водою. В замкненій формі побудовано розв'язки поставленої задачі. Встановлено, що термонапруження, які виникають в результаті еволюції температури в пружному середовищі, концентруються в малому okolí поверхні пори та спадають обернено пропорційно кубу радіальної координати. При цьому радіальні напруження в два рази більші колових термонапружень і вони мають різні знаки, що може особливо негативно впливати на морозостійкість крихких матеріалів, що слабо опираються напруженням розтягу, які обов'язково мають місце.

На прикладах цементобетонних та асфальтобетонних дорожньо-будівельних матеріалів показано, що виникаючі в них термонапруження розтягу та стиску, викликані ефектом збільшення об'єму льоду при замерзанні води в порах, набагато перевищують межі міцності цих матеріалів та можуть бути причиною виникнення в них руйнувань. Ці руйнування мають локальний (прихований) характер в зоні граничної поверхні пори, однак при повторних актах заморожування-танення вони можуть суттєво знижувати морозостійкість системи.

Виконано теоретичне дослідження ефектів зародження внутрішньоструктурних термонапружень в полімерних матеріалах,

армованих карбоновими нанотрубками та фулеренами, що викликані термомеханічною несумісністю цих матеріалів. На базі моделювання нанотрубки пружною циліндричною оболонкою із зведеними значеннями товщини, модуля пружності, коефіцієнта Пуассона і коефіцієнта лінійного термічного розширення побудовані диференціальні рівняння її термопружної взаємодії з епоксидним, поліамідним, фенолформальдегідним, поліефірним, полікарбонатним, полістирольним та поліпропіленовим середовищами в однорідних і неоднорідних полях температури. Виконані дослідження свідчать про те, що в наслідок несумісності термомеханічних параметрів карбонових нанотрубок і полімерних матеріалів при зміні температур фаз композиту на їх основі використання нанотрубок в якості арматури може призводити не тільки до збільшення механічної міцності системи, але також і до зародження на інтерфейсних поверхнях додаткових концентраторів внутрішньоструктурних термонапружень, які при спільній дії з експлуатаційними навантаженнями можуть викликати локальні нанопшкодження.

Використані в дисертаційній роботі нові моделі для розрахунків неоднорідних композитів базуються на гіпотезах теорії теплопровідності, термопружності та термореологічних середовищ. Математичні моделі у вигляді систем алгебраїчних рівнянь та систем диференціальних рівнянь спираються на використання методів математичного аналізу та комп'ютерних алгоритмів.

Розроблена нова обчислювальна система, яка дозволяє аналізувати поля термонапружених станів неоднорідних конструкцій з врахуванням наявності розривів цих функцій і їх концентрації на інтерфейсних контактних поверхнях в умовах високоградієнтних полів температури.

Отримані в дисертаційній роботі багатоваріантні цілеспрямовані розрахунки на міцність та дослідження дорожньої конструкції при різних

значеннях її геометричних та фізико-математичних параметрів дають змогу згладити концентратори напружень і деформації та підвищити довговічність системи. Це дозволить успішно вирішувати проблеми відновлення та розвитку мережі автомобільних доріг України, оцінювати експлуатаційний стан доріг, раціонально розподіляти ресурси на їх утримання, а також більш точно прогнозувати міцність і довговічність дорожнього одягу, оцінювати ефективність проектних рішень та застосування нових матеріалів і технологій.

Використання розроблених методів моделювання внутрішньоструктурних термопошкоджень та рекомендації зі зниження їх рівнів при проектуванні шаруватих конструкцій дорожнього одягу доріг та мостів дозволять збільшити їх міцність, вантажопідйомність та довговічність.

Ключові слова: внутрішньоструктурні термонапруження, термомеханічна несумісність, композитні матеріали, інтерфейсні поверхні, концентратори напружень, нановключення.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Монографії:

1. Гуляєв В.І., Гайдайчук В.В., Мозговий В.В., Густелєв О.О., Заєць Ю.О., Шевчук Л.В., Шлюнь Н.В. Термопружний стан багат шарових дорожніх покриттів. НТУ. Київ.2018. 252 с. ISBN 978-966-632-299-2 (*Особистий внесок автора: досліджено причини появи поперечних тріщин у верхньому шарі дорожнього покриття в зимовий час; проаналізовано вплив викривлення на перерозподіл полів напружень під дією температурних збурень*).
2. Гуляєв В.І., Мозговий В.В., Шлюнь Н.В., Заєць Ю.О., Білобрицька О.І., Шевчук Л.В., Внутрішньоструктурні термонапруження в композитних матеріалах з термомеханічно несумісними параметрами їх

фракцій. Київ: Вид. Ліра-К, 2023. 302 с. ISBN 978-617-520-680-5 (*Особистий внесок автора: розробка математичних моделей термопружного деформування і руйнування композитних, асфальтобетонних та цементобетонних матеріалів; виведення диференціальних рівнянь та їх розв'язування*).

3. Gulyayev, V., Glazunov, S., Glushakova, O., Vashchilina, E., Shevchuk, L., Shlyun, N., Andrusenko, E. Modelling Emergency Situations in the Drilling of Deep Boreholes. Cambridge Scholars Publishing. 2019. ISBN(10): 1-5275-4020-0, ISBN(13): 978-1-5275-4020-0 (*Особистий внесок автора: постановка та розв'язання задач 7-го розділу монографії*)

4. Gulyayev, V.I., Shlyun, N.V. Singularly perturbed problems of drill string buckling in deep curvilinear borehole channels. Modern Trends in Structural and Solid Mechanics 1. ISTE Ltd and John Wiley & Sons, Inc. 2021, pp. 177-200. ISBN(10): 1-5275-4020-0, ISBN(13): 978-1-5275-4020-0 ISBN: 978-1-78630-714 (*Особистий внесок автора: комп'ютерне моделювання сингулярно-збуреної задачі, графічне представлення отриманих результатів.*) **Scopus**

Статті у виданнях іноземних держав або у виданнях України, які включені до міжнародних наукометричних баз:

5. Gulyaev V.I., Shlyun N.V. and Zaets Yu.O. Spiral Buckling of Torque and Axial Force-Prestressed Nanotubes. *Strength of Materials*. 2024. 56(1). pp. 62–69. (*Особистий внесок автора: розроблено математичну модель для визначення критичних станів та форм біфуркаційного випинання нанотрубок, напружених поздовжньою силою та крутним моментом*). DOI:[10.1007/s11223-024-00627-7](https://doi.org/10.1007/s11223-024-00627-7) **Scopus Q4**

6. Shlyun N.V., Analysis of thermo-mechanical incompatibility of fullerenes with polymeric matrices of composites. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2024. 112. pp.139-148. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2024.112.139-148> **WoS Q4**

7. Gulyaev, V.I., Mozgovyi, V.V., Shlyun', N.V. Thermomechanical aspects of frost resistance of cement and asphalt concrete materials. *International Applied Mechanics*, 2023, 59(5), p. 594–604.. (Особистий внесок автора: виведення та розв'язування диференціальних рівнянь термopружного деформування композитних матеріалів під час замерзання води в їх порах і капілярах). DOI:[10.1007/s10778-024-01244-2](https://doi.org/10.1007/s10778-024-01244-2) **Scopus Q3**.

8. Gulyaev, V.I., Shlyun, N.V. Intrastructural thermal stresses in composites with homogeneous and heterogeneous spherical inclusions. *Strength of Materials*. 2023. 55(2). pp. 254–264. (Особистий внесок автора: розробка математичних моделей термopружного деформування асфальтобетонних матеріалів з гумовими включеннями в умовах температурних змін. виведення розв'язувальних рівнянь, побудова їх розв'язків). DOI:[10.1007/s11223-023-00520-9](https://doi.org/10.1007/s11223-023-00520-9) **Scopus Q4**

9. Gulyayev V.I., Mozgovyi V.V., Shlyun N.V., Shevchuk L.V. Modelling negative thermomechanical effects in reinforced road structures with thermoelastic incompatibility of coating and reinforcement materials. *System Research and Information Technologies*. 2022. 2022(2), pp.117-127. (Особистий внесок автора: побудова аналітичних виразів для визначення значень додаткових термонапружень та формулювання умов термомеханічної несумісності матеріалів асфальтобетону та арматури). DOI: [10.20535/SRIT.2308-8893.2022.2.09](https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2022.2.09) **Scopus Q4**

10. Gulyayev, V.I., Mozgovyi, V.V., Shlyun, N.V., Shevchuk, L.V., Bilobrytska, O.I. Negative thermomechanical effects in granular composites with incompatible thermomechanical parameters of their components. *International Review of Mechanical Engineering*. 2022. 16(4),. pp. 188–197. (Особистий внесок автора: визначення концентрації напружень на поверхні сферичної пори). <https://doi.org/10.15866/ireme.v16i4.21996>. **Scopus Q2**

11. Gaidaichuk V.V., Shlyun N.V., Shevchuk L.V., Bilobrytska O.I.

Theoretical modelling of the effect of thermal delamination of an asphalt concrete pavement from a rigid foundation of a road or bridge. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2022, 109, pp.38-49. (Особистий внесок автора: виконано аналіз термопружного деформування двошарової пластини зі співставними жорсткими характеристиками шарів). <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2022.109.38-49> **WoS Q4**

12. Shlyun, N.V., Gulyayev, V.I. Buckling of a drill-string in two-sectional bore-holes. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2020. 172. 105427. (Особистий внесок автора: виведення розв'язувальних рівнянь, побудова їх розв'язків). <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105427> **Scopus Q1**

13. Гайдайчук В.В., Густелев О.О., Шевчук Л.В., Шлюнь Н.В. Термопружне деформування шаруватого покриття на вгнутій ділянці дороги *Науково-технічний збірник «Опір матеріалів і теорія споруд»*. 2019. №. 102. С. 180-190. (Особистий внесок автора: проаналізовано вплив викривлення на перерозподіл полів напружень під дією температурних збурень). [DOI: 10.32347/2410-2547.2019.102.180-190](https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.102.180-190) **WoS Q4**

Статті у фахових виданнях:

14. Шлюнь Н.В. Плоскі та просторові періодичні згинні коливання подовжених карбонових нанотрубок. *Вісник НТУ. Серія «Технічні науки»*. 2024. Вип. 1 (58). DOI: [10.33744/2308-6645-2024-1-58-203-211](https://doi.org/10.33744/2308-6645-2024-1-58-203-211) С. 203–211.

15. Шлюнь, Н.В., Заєць Ю.О. Термомеханічні деформування карбонових нанотрубок в полімерних матрицях. *Автомобільні дороги і дорожнє будівництво*. Науково-технічний збірник. 2024. Вип. 115(1). С.67-80. (Особистий внесок автора: розробка математичної моделі зародження внутрішньоструктурних термонапружень в полімерних матеріалах, що армовані карбоновими нанотрубками в умовах зміни в них однорідних і неоднорідних полів температур). [DOI:10.33744/0365-8171-2024-115.1-067-](https://doi.org/10.33744/0365-8171-2024-115.1-067-)

080

16. Гуляєв В.І., Шлюнь Н.В. Математичне моделювання внутрішньоструктурних термонапружень, що викликаються полями змінної температури в композитах зі стрижневою арматурою. *Дороги і мости*. Київ. 2023. Вип. 28. С. 58–69. (Особистий внесок автора: теоретичне моделювання ефектів зародження додаткових внутрішньоструктурних термонапружень в армуючих стрижнях (волокнах) з урахуванням їх покриття ізолюючим шаром).

<https://doi.org/10.36100/dorogimosti2023.28.068>

17. Шлюнь Н.В. Теоретичне моделювання зародження внутрішніх прихованих термічних дефектів у бітумному середовищі з гумовими включеннями. *Автомобільні дороги і дорожнє будівництво*. 2023. Вип. 114. с.106-121. [DOI:10.33744/0365-8171-2023-114.1-106-121](https://doi.org/10.33744/0365-8171-2023-114.1-106-121)

18. Гуляєв В.І., Шлюнь Н.В. Три механізми виникнення термонапружень і терморуїнувань у пружних тілах. *Вісник НТУ Серія «Технічні науки»*. 2023. Вип. 3 (57). С. 43-49. (Особистий внесок автора: виділені три основні причини порушення умов вільного термодформування пружних тіл, що призводять до генерування в них термонапружень). [DOI: 10.33744/2308-6645-2023-3-57-043-049](https://doi.org/10.33744/2308-6645-2023-3-57-043-049)

19. Шлюнь Н.В., Білобрицька О.І., Шевчук Л.В., Заєць Ю.О. Концентрація термонапружень в цементобетоні в околі капіляра, частково або повністю заповненого водою, при її замерзанні. *НВЖ «Автошляховик України»*. №4. 2023. С.38-48. (Особистий внесок автора: визначення граничних рівнів наповнення водою пор та капілярів, за яких в цементобетонних та асфальтобетонних матеріалах виникають терморуїнування). [DOI: 10.33868/0365-8392-2023-4-276-39-49](https://doi.org/10.33868/0365-8392-2023-4-276-39-49)

20. Гуляєв В.І., Мозговий В.В., Шлюнь Н.В. Заєць Ю.О. Внутрішньоструктурні термонапруження в асфальтобетонних і

цементобетонних матеріалах, підсилених фібергласовою, фіберкарбоновою, фібербазальтовою та фіберарамідною арматурою. *НВЖ «Автошляховик України»*. 2023. №3. С.62-69. (Особистий внесок автора: виведення виразів для радіальних та колових термонапружень, що викликаються зміною температури системи.). [DOI: 10.33868/0365-8392-2023-3-275-62-69](https://doi.org/10.33868/0365-8392-2023-3-275-62-69)

21. Шлюнь, Н.В. Термомеханічна подібність при експериментальному та теоретичному моделюванні термоміцності дорожніх матеріалів та конструкцій. *Автомобільні дороги і дорожнє будівництво*. 2023. Вип. 113. С.98-107. [DOI: 10.33744/0365-8171-2023-113.1-098-107](https://doi.org/10.33744/0365-8171-2023-113.1-098-107)

22. Шлюнь Н.В., Білобрицька О.І., Шевчук Л.В., Заєць Ю.О. Умови відсутності та три механізми зародження термонапружень в пружних тілах. *Вісник НТУ Серія «Технічні науки»*. 2023. Вип. (55). С. 323-344. (Особистий внесок автора: виділені три основні причини порушення умов вільного термодетормування пружних тіл, що призводять до генерування в них термонапружень). [DOI: 10.33744/2308-6645-2023-1-55-323-334](https://doi.org/10.33744/2308-6645-2023-1-55-323-334)

23. Гуляєв В.І., Мозговий В.В., Шлюнь Н.В. Чому в деяких регіонах у конструкціях мостів заборонена сталева арматура з епоксидним покриттям? *НВЖ «Автошляховик України»*. №2. 2023. с.48-56. (Особистий внесок автора: виконаний аналіз термомеханічної несумісності матеріалів цементобетону та арматур) [DOI: 10.33868/0365-8392-2023-2-274-48-56](https://doi.org/10.33868/0365-8392-2023-2-274-48-56)

24. Шлюнь Н.В. Пониження концентрації термонапружень у бітумному матеріалі з модифікованими гумовими крихтами. *НВЖ «Автошляховик України»*. №2. 2022. С.60-66. [DOI: 10.33868/0365-8392-2022-2-270-60-66](https://doi.org/10.33868/0365-8392-2022-2-270-60-66)

25. Шлюнь Н.В., Заєць Ю.О. Про внутрішній механізм термопошкоджень в армованих композитах з термомеханічною несумісністю їх фаз. *Вісник НТУ Серія «Технічні науки»*. 2022. Вип. 3 (53). С.427-432. (Особистий внесок автора: виведення розв'язувальних рівнянь, знайдення їх

розв'язків в замкненій формі). [DOI: 10.33744/2308-6645-2022-3-53-427-432](https://doi.org/10.33744/2308-6645-2022-3-53-427-432)

26. Шлюнь Н. В. Особливості термонапруженого стану асфальтобетонного дорожнього покриття з гумовими включеннями. *Дороги і мости*. Київ. 2022. Вип. 26. С. 124–137. <https://doi.org/10.36100/dorogimosti2022.26.124>

27. Шлюнь Н.В., Білобрицька О.І. Сингулярно збурені задачі термомеханіки шаруватих дорожніх покриттів. *Вісник НТУ*. 2020. №.1(46). С. 455-461. (*Особистий внесок автора: досліджено сингулярно-збурену задачу теплового деформування дорожнього покриття та розподіл в його масиві полів температури, переміщень та напружень*). [DOI: 10.33744/2308-6645-2020-1-46-455-461](https://doi.org/10.33744/2308-6645-2020-1-46-455-461)

28. Гуляєв В.І., Мозговий В.В., Густелєв О.О., Шлюнь Н.В., Куцман О.М., Баран С.А. Дослідження напружено-деформованого стану дорожнього одягу з укріпленою основою під поперечними тріщинами і швами. *Вісник НТУ*. 2019. №. 3(43). С. 26-38. (*Особистий внесок автора: досліджено причини появи поперечних тріщин у верхньому шарі дорожнього покриття в зимовий час*). [DOI: 10.33744/2308-6645-2019-1-43-026-038](https://doi.org/10.33744/2308-6645-2019-1-43-026-038)

29. Гуляєв В.І., Шлюнь Н.В. Проектування оптимальних траєкторій свердловин. *Вісник НТУ*. 2021. Вип. 1 (49). С. 109-116. (*Особистий внесок автора: комп'ютерне моделювання проблеми*). [DOI: 10.33744/2308-6645-2021-1-48-109-116](https://doi.org/10.33744/2308-6645-2021-1-48-109-116)

Опубліковані праці апробаційного характеру:

30. Шлюнь Н.В., Шевчук Л.В. Про деякі закономірності сезонного перерозподілу полів напружень у конструкціях шаруватих покриттів під дією транспортних навантажень. *Міжнародна науково-практична конференція «Інноваційні підходи у відновленні транспортної інфраструктури в особливих умовах воєнного стану: виклики та перспективи*. К.: НТУ, 2024. 660 с. ISBN 978-966-632-328-9. (*Особистий внесок автора: проведено*

скінченно-елементний аналіз перерозподілу полів напружень у конструкціях шаруватих покривів під дією транспортних навантажень). [DOI 10.33744/978-966-632-328-9-2024-3](https://doi.org/10.33744/978-966-632-328-9-2024-3)

31. Шлюнь Н. В., Заєць Ю. О. Термомеханічне зародження мікропорожнин в околі пор та капілярів дорожніх матеріалів заповнених водою. *International scientific-practical conference Current issues of science, education and technology in the context of modern challenges: conference proceedings*. Aarhus, Denmark, June 29, 2024. Aarhus, Denmark: Scholarly C.48-49. (Особистий внесок автора: визначення граничних рівнів наповнення водою пор та капілярів, за яких в цементобетонних та асфальтобетонних матеріалах виникають локальні тріщини і терморуйнування). <https://www.economics.in.ua/2024/06/29.html>

32. Шлюнь Н. В. Особливості термомеханічної подібності в армованих композитних середовищах. *International scientific-practical conference Science, education and technology: global trends and regional aspects: conference proceedings* Tampere, Finland, July 11, 2024. с.34-36. <https://www.economics.in.ua/2024/07/11.html>

33. Шлюнь Н.В., Заєць Ю.О., Берлянд М.С. Теоретичний аналіз внутрішньоструктурних термонапружень в композиті, що армований суцільними стрижнями. *LXXX наукова конференція професорського-викладацького складу, аспірантів, студентів та співробітників відокремлених структурних підрозділів університету*. К.: НТУ, 2024. С. 759. ISSN: 2786-6459 (Online), ISSN: 2786-6467 (Print). (Особистий внесок автора: виконаний аналіз термомеханічної несумісності матеріалів асфальтобетону, цементобетону та арматур). [DOI:10.33744/2786-6459-2024-80](https://doi.org/10.33744/2786-6459-2024-80)

34. Гуляєв В.І., Шлюнь Н.В. Мікротермомеханічні ефекти на інтерфейсних поверхнях композитів, які армовані карбоновими

нанотрубками, в високоградієнтних полях температури. *LXXX наукова конференція професорського-викладацького складу, аспірантів, студентів та співробітників відокремлених структурних підрозділів університету*. К.: НТУ, 2024. С. 853-854. ISSN: 2786-6459 (Online), ISSN: 2786-6467 (Print), (Особистий внесок автора: виконаний аналіз генерування у матриці недопустимих концентраторів термонапружень, що викликані термомеханічною несумісністю параметрів базового матеріалу та нанотрубки). DOI: [10.33744/2786-6459-2024-80](https://doi.org/10.33744/2786-6459-2024-80)

35. Шлюнь Н.В. Моделювання термонапруженого стану композиту при несумісних термомеханічних властивостях його матриці та наповнювача. *LXXIX наукова конференція професорсько-викладацького складу, аспірантів, студентів та співробітників відокремлених структурних підрозділів університету: тези доповідей*. К.: НТУ, 2023. С. 656. DOI: [10.33744/2786-6459-2023-79](https://doi.org/10.33744/2786-6459-2023-79)

36. Gaydaychuk V., Shlyun N., Shevchuk L., Kutsman O. Modelling discontinuous stress fields in multilayer coatings of automobile roads. *IEEE SAIC*. 2020. Kyiv, Ukraine. p. 140. (Особистий внесок автора: виконаний скінченно-елементний аналіз впливу тріщини на напружено-деформований стан багатошарової системи) Scopus DOI: [10.1109/SAIC51296.2020.9239207](https://doi.org/10.1109/SAIC51296.2020.9239207)

37. Шевчук Л.В., Шлюнь Н.В., Тишкевич М.М. Термопружні деформації асфальтобетону на металевій плиті Південного моста. *LXXV наукова конференція професорського-викладацького складу, аспірантів, студентів та співробітників відокремлених структурних підрозділів університету*. К.: НТУ, 2019. С.505. (Особистий внесок автора: виконаний аналіз напруженодеформованого стану асфальтобетону)

https://drive.google.com/file/d/1QtiGot7hhzOMqfUWx3T99V_7q-QAzLx1/view

38. Шлюнь Н.В., Термонапружений стан дорожніх покриттів. III Міжнародна науково-практична конференція «Сучасні методи і проблемно-орієнтовані комплекси розрахунку конструкцій і їх застосування у проектуванні і навчальному процесі» вересень 2019. Р. 12-15.

https://drive.google.com/file/d/1QtiGot7hhzOMqfUWx3T99V_7q-QAzLx1/view

39. В. Гуляєв, Н. Шлюнь, Л. Шевчук, Ю. Заєць. Специфіка термомеханічного зародження внутрішніх дефектів в бітумній структурі з гумовими включеннями. *Впровадження інноваційних матеріалів і технологій при проектуванні, будівництві та експлуатації об'єктів транспортної інфраструктури в рамках програми «Велике будівництво»: збірник тез доповідей Міжнародної конференції*, м. Київ, 24-25 листопада 2022 року. Київ: НТУ, 2022, с.111. ISBN: 978-966-632-317-3 (Online). (Особистий внесок автора: дослідження особливостей температурного деформування та розподілення полів термонапружень в композитній структурі, що складається з бітумної матриці та гумових включень) DOI: [10.33744/978-966-632-317-3-2022-2](https://doi.org/10.33744/978-966-632-317-3-2022-2)

40. Шлюнь Н.В. Еволюція термонапружень в цементобетоні на стінці капіляру частково або повністю заповненого водою при падінні температури. *Перспективи розвитку автомобільного транспорту та інфраструктури: збірка тез доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції*. Київ: ДП ДержавтотрансНДІпроект», 2023, ст.96-90. ISBN 978-966-8799-22-8

https://insat.org.ua/files/nav/tkt/conferences/Thesis_Collect_2022.pdf

41. Шлюнь Н., Гринчак А. Математичне моделювання додаткових внутрішньоструктурних термонапружень в композитах із неоднорідними сферичними включеннями. *Всеукраїнська наукова конференція здобувачів освіти і молодих учених «Відбудова транспортної інфраструктури*

України». К.: НТУ, 2023. С. 99. ISBN: 978-966-632-319-7 (*Особистий внесок автора: Побудова моделі, виведення розв'язувальних рівнянь, знайдення їх розв'язків*). [DOI:10.33744/978-966-632-319-7-2023-1](https://doi.org/10.33744/978-966-632-319-7-2023-1)

Свідоцтва та патенти:

42. Пат. 155834 Україна, МПК (2024.01) E01C 7/00 E01C 11/00 Спосіб виключення ефекту термосилового відшарування асфальтобетонного покриття від крайових ділянок жорсткої основи дороги або мосту при температурних змінах. В.І. Гуляєв, Н.В. Шлюнь, О.І. Білобрицька, Л.В. Шевчук, С.А. Баран, І.І. Гринчак, заявник та власник Національний транспортний університет. № u 2022 02048 17.04.2024: опубл. 17.04.2024, Бюл. № 16. (*Особистий внесок автора: дослідження виникнення зрушуючих термонапружень доріг при зміні їх температури*). <https://sis.nipo.gov.ua/uk/search/detail/1795717/>

43. Пат. 152211 Україна, МПК E01B3/14 E01B31/28 Спосіб зменшення додаткових контактних термонапружень в асфальтобетонних дорожніх покриттях, армованих стрижнями, при несумісності термомеханічних параметрів матеріалів конструкції в умовах температурних впливів. В.І. Гуляєв, О.І. Білобрицька, Н.В. Шлюнь, Л.В. Шевчук, О.М. Куцман, І.І. Гринчак, заявник та власник Національний транспортний університет. № u202202047 04.01.2023: опубл. 04.01.2023, Бюл. № 1/2023. (*Особистий внесок автора: побудова аналітичних виразів для визначення значень додаткових термонапружень, формулювання умов термомеханічної несумісності матеріалів*). <https://sis.nipo.gov.ua/uk/search/detail/1714351/>

44. Пат. 149263 Україна, МПК E 01C 3/06 (2006.01) Спосіб виключення критичних напружень в зоні поперечного розвантажуючого розрізу багат шарового асфальтобетонного дорожнього покриття. Л.В. Шевчук, Н.В. Шлюнь, О.І. Білобрицька, С.А. Баран, О.М. Куцман, заявник та власник Національний транспортний університет. № u202103651 24.06.2021:

опубл. 27.10.2021, Бюл. №43. *(Особистий внесок автора: аналіз скінченно-елементного моделювання)*. <https://sis.nipo.gov.ua/uk/search/detail/1635254/>

45. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір Науковий твір: «Математичні формули для обчислення додаткових термонапружень в армованих дорожніх покриттях при термомеханічній несумісності матеріалів покриття і арматури». Н.В. Шлюнь, В.І. Гуляєв, Мозговий В.В., Л.В. Шевчук. №115933, 19.01.2023 *(Особистий внесок автора: виведення аналітичних виразів)*. <https://sis.nipo.gov.ua/uk/search/detail/1730680/>

46. Свідоцтво про право автора на твір: комп'ютерна програма «Комп'ютерний аналіз впливу вертикальних тріщин та розшарувань в дорожньому покритті на поля деформацій та напружень в його конструкції» Шлюнь Н.В., Шевчук Л.В., Білобрицька О.І., Куцман О.М., № 96560, 2020 р. *(Особистий внесок автора: розроблено методику комп'ютерного моделювання і прогнозування явищ концентрації напружень в багат шарових асфальтобетонних дорожніх покриттях)*. <https://sis.nipo.gov.ua/uk/search/detail/1625410/>

47. Свідоцтво про право автора на твір: Комп'ютерна програма «Комп'ютерний аналіз впливу термомеханічних характеристик матеріалів дорожнього покриття на його термонапружений стан» Шлюнь Н.В., Шевчук Л.В., Білобрицька О.І., Баран С.А., № 96561, 2020 р. *(Особистий внесок автора: розроблено методику комп'ютерного моделювання і прогнозування явищ концентрації напружень в багат шарових асфальтобетонних дорожніх покриттях)*. <https://sis.nipo.gov.ua/uk/search/detail/1625408/>

ABSTRACT

Shlyun N.V. Models and methods of calculating heterogeneous composites taking into account macro and micro thermomechanical effects in them – Manuscript.

The thesis for the doctor of technical science degree on specialty 05.23.17 «Mechanics of Structures» (192 – Building and civil Engineering). – National Transport University Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2025.

The dissertation is dedicated to solving the pressing scientific and practical problem of establishing the patterns of the thermal stress and thermal deformation states in layered structures of road pavements and bridge decks, taking into account the influence of the incompatibility of the thermomechanical parameters of materials under temperature changes. Based on this, it aims to improve such structures and enhance pavements reinforced with metal and non-metal rods and heterogeneous inclusions through the rational selection of thermomechanical parameters of their elements. This selection minimizes or eliminates their deformational incompatibility under thermal influences during seasonal and diurnal temperature fluctuations.

As operational experience of highways and bridges in countries with significant temperature variations in winter and summer shows, their structures exhibit the most intense manifestations of defect formation, cracking, local destructions, and overall degradation of composite materials. Under frequent temperature changes in heterogeneous road and bridge pavement structures with thermomechanical incompatibility of their components, these defects can contribute to their accelerated aging. Simultaneously, thermomechanical compatibility of materials achieves a more favorable distribution of internal stresses of thermal and mechanical origin, preventing premature degradation of the strength of the contacting phases and the entire component as a whole.

Improving the accuracy of modeling and theoretical construction of thermal deformation and thermal stress fields in layered pavement structures reinforced with reinforcement is one of the key factors contributing to enhanced quality and increased durability under seasonal and diurnal temperature changes. For their investigation, the work develops new thermomechanical and mathematical models

of the thermomechanical deformation of heterogeneous structures with reinforcing inclusions in the form of systems of differential equations. Their solutions are constructed using computer and analytical methods.

It is shown that the internal mechanism of the nucleation of concentrators of internal structural thermal stresses at the interfacial surfaces between the contacting phases of the material and reinforcement, provoked by the incompatibility of the thermomechanical fractions of the system, can be the primary cause initiating thermal damage (including at micro-levels, and thus inconspicuous in the initial stages). This damage promotes material degradation and its subsequent destruction.

An analysis of thermal stresses in matrices containing spherical inclusions was performed. For such composites, theoretical modeling showed that in this case, additional internal thermal stresses concentrate on the contacting spherical surface. Here, the radial and hoop thermal stresses are equal in magnitude, have opposite signs, and decrease proportionally to the cube of the radial coordinate. Such thermal stress fields are particularly unfavorable for a brittle matrix material, which poorly resists tensile stresses, which are inevitably realized for both positive and negative temperature increments. The analytical expressions for thermal stresses obtained in the dissertation can be used in studying the strength of asphalt concretes with mineral fillers.

Based on methods of thermoelasticity, a new mathematical model of the thermal stress state of an asphalt concrete road pavement with rubber inclusions was developed. For a spherical model of a rubber grain and an inclusion of modified rubber, resolving equations for the thermoelastic deformation of the system were formulated, and their analytical solutions were constructed.

Analysis of the obtained solutions provided an explanation for the peculiarity of the thermal stress behavior of the combined system, which lies in the possibility of maintaining the integrity of the system with fine-dispersed rubber

grains and the chipping-out of relatively large rubber inclusions. It is shown that due to the specific thermomechanical properties of rubber in bitumen, additional concentrations of thermal stresses can arise in the contact zone with inclusions. These are caused by the thermomechanical incompatibility of the composite's phases and lead to the initiation of additional plastic deformations and destructions in the bitumen at the contact surface, causing the inclusions to chip out.

Through analytical calculations, it is demonstrated that mitigating and eliminating additional thermomechanical defects can be achieved by reducing the thermomechanical incompatibility of the composite's phase properties via bituminous modification of rubber. The effectiveness of this method increases with the depth of penetration of the modified layer into the rubber grain.

In composite materials with fibrous fillers and in asphalt concretes with rod or wire reinforcement, a similar internal mechanism of destruction is realized. In the dissertation, using a model of an elastic medium with a cylindrical inclusion, it is established that a temperature change in such a system is accompanied by the generation of additional internal radial and hoop thermal stresses in the matrix material. These stresses concentrate on the contact surface between the matrix and reinforcement and rapidly decrease proportionally to the square of the radial coordinate. With significant thermomechanical incompatibility of the matrix and reinforcement materials, these additional thermal stresses can significantly exceed the strength limits of the matrix material and lead to its local damage and failure. Closed-form solutions of the formulated differential equations of thermoelasticity were obtained, allowing for the determination of permissible levels of incompatibility of the matrix and reinforcement properties.

The problem of the evolution of thermal stresses in an elastic medium of structural materials with a spherical cavity filled with water was investigated. Closed-form solutions to the stated problem were constructed. It was established that the thermal stresses arising from the temperature evolution in the elastic

medium concentrate in a small vicinity of the pore surface and decay inversely proportional to the cube of the radial coordinate. The radial stresses are twice as large as the hoop thermal stresses and have opposite signs, which can be particularly detrimental to the frost resistance of brittle materials that weakly resist tensile stresses, which are always present.

Using examples of cement concrete and asphalt concrete road-building materials, it is shown that the resulting tensile and compressive thermal stresses, caused by the volume expansion effect of ice during water freezing in pores, far exceed the strength limits of these materials and can be the cause of their destruction. These destructions are local (hidden) in nature at the boundary surface of the pore; however, with repeated freeze-thaw cycles, they can significantly reduce the frost resistance of the system.

A theoretical investigation of the effects of internal structural thermal stress nucleation in polymer materials reinforced with carbon nanotubes and fullerenes, caused by the thermomechanical incompatibility of these materials, was performed. Based on modeling a nanotube as an elastic cylindrical shell with reduced values of thickness, elastic modulus, Poisson's ratio, and coefficient of linear thermal expansion, differential equations for its thermoelastic interaction with epoxy, polyamide, phenol-formaldehyde, polyester, polycarbonate, polystyrene, and polypropylene media in homogeneous and inhomogeneous temperature fields were constructed. The performed studies indicate that due to the incompatibility of the thermomechanical parameters of carbon nanotubes and polymer materials during temperature changes, the use of nanotubes as reinforcement in composite phases can lead not only to an increase in the mechanical strength of the system but also to the nucleation of additional concentrators of internal structural thermal stresses at the interfacial surfaces. Under combined action with operational loads, these can cause local nano-damage.

The new models used in the dissertation for calculating heterogeneous

composites are based on the hypotheses of heat conduction theory, thermoelasticity, and thermorheological media. Mathematical models in the form of systems of algebraic equations and systems of differential equations rely on the use of mathematical analysis methods and computer algorithms.

A new computational system was developed, allowing for the analysis of thermal stress state fields in heterogeneous structures, accounting for the presence of discontinuities in these functions and their concentration on interfacial contact surfaces under high-gradient temperature fields.

The multi-variant, targeted strength calculations and investigations of the road structure under different values of its geometric and physical-mathematical parameters, obtained in the dissertation, enable the smoothing of stress and strain concentrators and increase the system's durability. This will allow for successfully solving the problems of restoration and development of Ukraine's road network, assessing the operational condition of roads, rationally allocating resources for their maintenance, as well as more accurately predicting the strength and durability of road pavements, evaluating the effectiveness of design solutions, and applying new materials and technologies.

The use of the developed methods for modeling internal structural thermal damage and the recommendations for reducing their levels when designing layered structures of road pavements and bridge decks will increase their strength, load-bearing capacity, and durability.

Keywords: intrastructural thermal stresses, thermomechanical incompatibility, composite materials, interface surfaces, stress concentrators, nanoinclusions.

ЗМІСТ

ВСТУП	31
РОЗДІЛ 1 ОСОБЛИВОСТІ ТЕРМОПРУЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ШАРУВАТИХ ДОРОЖНІХ КОНСТРУКЦІЙ	45
1.1 Аналіз механічних і математичних особливостей проблеми термопружного деформування шаруватих конструкцій дорожнього одягу	45
1.2 Теоретична модель термопружного деформування багатошарових дорожніх конструкцій.....	53
1.3 Визначення полів температури і додаткових умов при яких термонапруження в пружних тілах дорівнюють нулю	64
1.4 Три механізми виникнення термонапружень і терморуїнувань в пружних тілах.	68
1.5 Термомеханічна подібність при експериментальному та теоретичному моделюванні термоміцності дорожніх матеріалів та конструкцій	74
1.5.1 Критерії подібності термопружного деформування однорідних середовищ	77
1.5.2 Умови термомеханічної подібності для армованих композитних середовищ.....	83
1.5.3 Теоретичне моделювання ефекту розшарування шаруватих композитів	86
1.6 Використання приведених параметрів теорії термопружності для розв’язання термо-вязко-пружних задач	89
1.7 Висновки до розділу 1	93
РОЗДІЛ 2 КОНЦЕНТРАЦІЯ ТЕРМОНАПРУЖЕНЬ В ШАРУВАТИХ КОНСТРУКЦІЯХ ДОРОЖНЬОГО ОДЯГУ	94

2.1 Задачі з крайовим ефектом.....	94
2.1.1 Теплові удари і високоградієнтні поля температури	94
2.1.2 Задачі термопружності з крайовим ефектом.....	98
2.2 Нестационарне термічне деформування шаруватої конструкції дорожнього одягу дороги дорожнього.....	107
2.2.1 Аналіз проблеми.....	107
2.2.2 Конструктивна і розрахункова моделі дорожнього одягу	109
2.2.3 Основні розв'язувальні співвідношення.....	111
2.2.4 Особливості термопружного деформованого стану покриття дороги	115
2.2.5 Аналіз результатів скінченно-елементного моделювання	116
2.3 Висновки до розділу 2	123
РОЗДІЛ 3 КОНЦЕНТРАЦІЯ ТЕРМОНАПРУЖЕНЬ НА ПОВЕРХНЯХ ЗЕРНИСТИХ ВКЛЮЧЕНЬ В КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛАХ.....	125
3.1 Негативні термомеханічні ефекти в зернистих композитах з несумісними термомеханічними параметрами їх компонент	125
3.1.1 Про Внутрішній Механізм ініціювання термонапружень в композитах із зернистими наповнювачами	125
3.1.2 Концентрація термонапружень на сферичному включенні	128
3.1.3 Зниження рівня концентрації термонапружень шляхом створення порожнини у сферичному включенні.....	136
3.1.4 Термонапруження в композиті зі сферичним включенням, вкритим пружною оболонкою	142
3.1.5 Концентрація термонапружень на поверхні сферичної пори	148
3.1.6 Прояв принципу Сен Венана у побудованих розв'язаннях та підтвердження достовірності отриманих результатів.....	151
3.2 Концентрація термонапружень на поверхні мінеральних	

включень в асфальтобетоні	152
3.3 Теоретичне моделювання зародження внутрішніх прихованих термодфектів у бітумному середовищі з гумовими включеннями	157
3.3.1 Аналіз переваг та недоліків армуючих гумових включень у бітумному середовищі	157
3.3.2 Термонапружений стан асфальтобетонного матеріалу зі сферичним гумовим включенням.....	160
3.3.3 Моделювання термонапруженого стану гумового сферичного включення з пружним прошарком	169
3.4 Висновки до розділу 3	178
РОЗДІЛ 4 КОНЦЕНТРАЦІЯ ТЕРМОНАПРУЖЕНЬ НА ПОВЕРХНЯХ СТРИЖНЕВОЇ (ВОЛОКНИСТОЇ) АРМАТУРИ В КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛАХ.....	181
4.1 Концентрація термонапружень в асфальтобетоні в зоні його контакту зі стрижневою арматурою.....	181
4.1.1 Стан проблеми.....	181
4.1.2 Теоретичний аналіз концентрації додаткових термонапружень	183
4.1.3 Пониження рівня термонапружень в околі трубчастої арматури...	191
4.2 Чому в деяких регіонах у конструкціях мостів заборонена сталева арматура з епоксидним покриттям?	196
4.2.1 Дослідження переваг та недоліків використання армуючих стрижнів з епоксидним покриттям.....	196
4.2.2 Постановка задачі	200
4.2.3 Моделювання термонапружень в епоксидному покритті при втраті його зв'язку з бетоном.....	207
4.3 Внутрішньоструктурні термонапруження в асфальтобетонних і цементобетонних матеріалах, підсилених фібергласовою, фіберкарбоновою, фібербазальтовою та фіберарамідною арматурою.....	211

4.3.1 Аналіз теоретичних передумов використання фібергласової, фіберкарбонової, фібербазальтової та фіберарамідної арматур	211
4.3.2 Розв'язувальні співвідношення для внутрішньоструктурних термонапружень на інтерфейсній поверхні.....	215
4.3.3 Внутрішньоструктурні термонапруження в армованому асфальтобетонному середовищі	218
4.3.4 Внутрішньоструктурні термонапруження в армованому цементобетонному середовищі.....	220
4.3.5 Особливості утворення термоушкоджень на поверхні стрижневої арматури.....	222
4.4 Внутрішньоструктурні термонапруження в композитах зі стрижневою (волокнистою) арматурою при різних значеннях температур їх фаз	224
4.4.1 Особливості зародження термонапружень в неоднорідних композитах	224
4.4.2 Виведення рівнянь термдеформування та побудова їх розв'зків	227
4.4.3 Числові приклади	233
4.5 Математичне моделювання внутрішньоструктурних термонапружень, що викликаються полями змінної температури в композитах зі стрижневою арматурою	234
4.5.1 Теоретичні передумови виникнення полів термонапружень в композитах зі стрижневою арматурою	234
4.5.2 Постановка задачі	235
4.5.3 Аналіз числових результатів.....	242
4.6 Висновки до розділу 4	247

РОЗДІЛ 5 КОНЦЕНТРАЦІЯ ТЕРМОНАПРУЖЕНЬ В ЦЕМЕНТОБЕТОНАХ- ТА АСФАЛЬТОБЕТОНАХ В ОКОЛІ ПОР ТА

КАПІЛЯРІВ, ЧАСТКОВО АБО ПОВНІСТЮ ЗАПОВНЕНИХ ВОДОЮ, ПРИ ЇЇ ЗАМЕРЗАННІ.....	252
5.1 Особливості зародження термонапружень в пружному середовищі конструкційних матеріалів зі сферичною порожниною, заповненою водою.....	252
5.1.1 Термомеханічні аспекти морозостійкості цементо- та асфальтобетонних матеріалів.....	252
5.1.2 Моделювання ефекту зниження температури води в порах матеріалів	256
5.1.3 Термопружне деформування пружного середовища при замерзанні води в його порах.....	262
5.1.4 Пружне деформування льоду в порі при від’ємних температурах.....	268
5.1.5 Чисельні результати.....	270
5.1.5.1 Сферична пора в цементобетонному середовищі	270
5.1.5.2 Сферична пора в асфальтобетонному середовищі	272
5.2 Концентрація термонапружень в цементобетоні в околі капіляра, частково або повністю заповненого водою, при її замерзанні	274
5.2.1 Особливості утворення пошкоджень в околі капілярної пори	274
5.2.2 Охолодження води в капілярах до нульової температури.....	277
5.2.3 Деформування пружного середовища при заморожуванні води в його капілярі	284
5.2.4 Термосилова взаємодія пружного середовища з льодом у капілярі при подальшому зниженні температури.....	290
5.3 Висновки до розділу 5	293
РОЗДІЛ 6 КОНЦЕНТРАЦІЯ ТЕРМОНАПРУЖЕНЬ В ПОЛІМЕРНИХ МАТЕРІАЛАХ, ЩО АРМОВАНІ КАРБОНОВИМИ НАНОТРУБКАМИ ТА ФУЛЕРЕНАМИ	296

6.1 Спіральне випинання нанотрубок, попередньо напружених крутним моментом і осьовою силою	296
6.1.1 Аналіз проблеми.....	296
6.1.2 Виведення рівнянь термодформування згинних коливань нанотрубок.	298
6.1.3 Результати обчислень.	304
6.2 Термомеханічні деформування карбонових нанотрубок в полімерних матрицях.....	309
6.2.1 Механічні та термомеханічні особливості нанотрубок	309
6.2.2 Постановка задачі	310
6.2.3 Аналіз результатів обчислень для випадку однорідного температурного поля.....	319
6.2.4 Термонапружений стан системи при неоднорідному температурному полі	322
6.3 Аналіз термомеханічної несумісності фулеренів з полімерними матрицями композитів.....	325
6.3.1 Стан проблеми.....	325
6.3.2 Оболонкова модель термодформованого фулерену.....	327
6.3.3 Термодформування фулерену в матриці полімерного композиту	333
6.3.4 Результати досліджень	337
6.4 Висновки до розділу 6	341
ВИСНОВКИ.....	344
ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ	352
ДОДАТОК А.....	385
A.1 Постановка задачі теорії термопружності в циліндричних координатах	385
A.2 Постановка задачі теорії термопружності в сферичних	

координатах	389
ДОДАТОК Б РЕЗУЛЬТАТИ СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛЮВАННЯ	393
ДОДАТОК В ДОВІДКИ ПРО ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ РОБОТИ.....	398
ДОДАТОК Г СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ.....	409

ВСТУП

Актуальність роботи. Теоретичні принципи та практичні методи розрахунку конструктивних систем транспортних споруд мережі автомобільних доріг потребують удосконалення та розвитку з урахуванням нинішніх викликів, пов'язаних зі змінами впливових факторів різної фізичної природи.

Важливу роль у належному функціонуванні транспортних споруд відіграють конструкції дорожніх одягів доріг і мостів, що являють собою неоднорідні композити у вигляді лінійних шаруватих будівельних конструкцій значної протяжності, які є високовартісними під час будування та потребують великих витрат під час утримання. Останнім часом у світі спостерігається тенденція росту параметрів транспортного навантаження. Збільшується інтенсивність руху транспортних засобів, зростає доля великовагових автомобілів та автопоїздів зі збільшеною кількістю осей, загальною вантажопідйомністю та підвищеним тиском у пневматиках. Це стало суттєвим викликом для конструкцій дорожнього одягу, а також вагомим фактором зменшення їх довговічності, особливо в умовах глобальної зміни клімату. На такі підвищені параметри транспортного навантаження та кліматичні впливи існуюча автодорожня мережа України, побудована у минулому столітті, не була розрахована. Це стало одним із вагомих факторів зменшення довговічності конструкцій дорожнього одягу. Тому в сучасній практиці проєктування, будування та ремонтування дорожніх одягів все більш широко використовуються нові матеріали з досконалішими міцнісними, зносостійкими і термостійкими властивостями, створюються нові конструкції дорожнього одягу, які включають різноманітні підкріплюючі і армуючі елементи з різних матеріалів: металевих, склопластикових, базальтових, полімерних та ін. Розширюється асортимент композитних матеріалів шарів покриття та основи дорожніх одягів, постійно удосконалюються рецептури та технології їх виготовлення і застосування з

використанням різноманітних модифікаторів, добавок, дисперсного армування. Однак, введення в один матеріал армуючих включень з іншого матеріалу може не тільки поліпшити узагальнені характеристики всього композиту, але при термічних впливах воно також може супроводжуватися породженням помітних додаткових локальних внутрішніх напружень, якщо термомеханічні характеристики компонент композиту несумісні. Для пластичних матеріалів ці напруження можуть призводити до локальних пластичних деформацій та дефектів, для крихких матеріалів – до локальних розтріскувань. Оскільки ці дефекти мають локалізований та прихований характер, вони не завжди піддаються виявленню.

Проблема неналежного врахування негативного впливу макро і мікро термомеханічних ефектів неоднорідних композитів полягає в тому, що на теперішній час при розгляді двох основних механізмів термічної деградації і руйнування композитів – зовнішнього та внутрішнього, основну увагу приділяють першому. Він обумовлений накладенням на систему зовнішніх в'язів і обмежень, що перешкоджають її вільному термодетормуванню. Наслідки прояву зовнішнього механізму є добре помітними, оскільки за його реалізації у системі виникають яскраво виражені макропошкодження, тріщини і навіть руйнування. На практиці таким ефектам приділяють підвищену увагу і для їх математичного моделювання були розроблені спеціальні скінченно-елементні програми, які дають змогу прогнозувати їх з достатньою точністю. Другий механізм – внутрішній, є властивим для всіх середовищ зі змінними (і особливо, несумісними) термомеханічними характеристиками їх компонент, в тому числі для композитних матеріалів дорожнього одягу. Дефекти, тріщини і розшарування, що виникають в композитах внаслідок його прояву є прихованими і їх розвиток стає помітним лише після руйнування конструкції. У конструкціях дорожніх одягів внутрішній механізм руйнування, головним чином, виникає в комбінаціях: шари із композитних матеріалів на основі бітумних або полімерних матеріалів – металеві чи залізобетонні прогонові будови мостів

або шари дорожнього одягу із композитних матеріалів на основі мінеральних чи комплексних в'язучих; бітум – мінеральні включення; бітум – металева стрижнева та дротяна арматура; бітум – склопластикова арматура; бетон – пластикова арматура та ін. В науковій літературі висновки про можливі негативні прояви таких комбінацій та негативну дію цього механізму, як правило, формулюються на рівні якісних експериментальних суджень, без аналітичних підтверджень.

Також особливо варто відзначити, що відомі дослідження з проєктування дорожніх одягів (жорстких і нежорстких), які направлені на удосконалення визначення їх напруженого стану, містять суттєві спрощення в моделюванні роботи цих конструкцій. Такі дослідження не враховують (як при новому будівництві так і при ремонті у разі влаштування шарів підсилення) наявності локальних дефектів конструкцій дорожнього одягу з температурними та технологічними швами, а також температурними та силовими тріщинами, що еволюціонують у процесі життєвого циклу. Вони не відображають температурну несумісність шарів дорожнього одягу та термонапруження, викликані градієнтами температури при її добових та сезонних коливаннях. Крім того, також, не враховується вплив на напружений стан від зовнішніх силових факторів внутрішньоструктурних термонапружень в околі структурної неоднорідності композитних матеріалів та їх армуючих елементів.

Відповідно, можна зауважити, що проблеми теоретичного аналізу внутрішньоструктурних термонапружень в шаруватих композитах і композитах зі стрижневими (волокнистими) і сферичними включеннями при термомеханічній несумісності параметрів їх фракцій є недостатньо вивченими. З погляду на це, поставлені та розв'язані в дисертаційній роботі проблеми є **важливими** та **актуальними** для розвитку методів розрахунків неоднорідних шаруватих будівельних конструкцій транспортних споруд і такими, що мають як наукове, так і прикладне значення.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційна робота виконана відповідно плану науково-дослідних робіт кафедри вищої математики Національного транспортного університету, а також в рамках держбюджетних тем №42 «Наукові основи прогнозування термомеханічних процесів в багатошаровому напівпросторі (на прикладі дорожнього покриття) для оцінки ресурсів підвищення його довговічності» (2017 – 2018 рр., номер державної реєстрації 0116U002631), №53 «Математичне моделювання напружено-деформованого стану дорожнього одягу з температурними швами і тріщинами» (2018 – 2020 рр., номер державної реєстрації 0119U1011797) і № 60 «Дослідження впливу несумісності термомеханічних параметрів матеріалів покриттів доріг та мостів на їх термоміцність» (2021 – 2023 рр., номер державної реєстрації 0122U001429).

Мета і завдання дослідження. Мета роботи полягає у розробленні моделей та методів розрахунку неоднорідних композитів транспортних споруд, зокрема конструкцій дорожнього одягу доріг і мостів, з урахуванням впливу несумісності макро і мікро термомеханічних ефектів у них, в умовах зміни температури.

Для досягнення цієї мети необхідно виконати наступне:

- виконати аналіз механічних і математичних особливостей проблеми термопружного деформування багатошарових дорожніх конструкцій та провести аналіз термомеханічних параметрів дорожньо-будівельних матеріалів та металевих і неметалевих армуючих стрижнів, а також неоднорідних включень;

- розробити математичні моделі термонапруженого деформування шаруватих армованих дорожніх конструкцій на базі скінченно-елементного методу та розробити обчислювальну систему, яка включає препроцесор для обробки вихідної інформації, а також солвер для розв'язування скінченно-

елементних рівнянь, а також постпроцесор для обробки результатів обчислень;

- провести теоретичне дослідження термонапруженого стану неоднорідних композитів конструкцій дорожнього одягу з сферичними включеннями в умовах стаціонарної зміни їх температури при термонесумісних параметрах їх компонентів;

- здійснити моделювання на основі числового експериментального дослідження полів температур і напружень в шаруватих конструкціях дорожнього одягу доріг і мостів, армованих стрижнями, при різних термосумісних та несумісних значеннях їх термомеханічних параметрів та в умовах однорідних та неоднорідних полів температури;

- провести числові експериментальні дослідження із визначення приведених термомеханічних характеристик фрагментів і масивів конструкцій дорожнього одягу доріг і мостів та розробити практичні рекомендації щодо зменшення або виключення додаткових концентраторів термонапружень, викликаних несумісністю термомеханічних характеристик компонентів неоднорідних композитів;

- розробити моделі та методи термопружного деформування і руйнування в композитних матеріалах транспортних споруд на макро та мікрорівнях під час замерзання води в їх порах і капілярах при їх неповному та повному заповненні;

- розробити моделі та методи визначення внутрішньоструктурних термонапружень в полімерних матеріалах, армованих карбоновими нанотрубками та фулеренами, що викликані термомеханічною несумісністю цих матеріалів.

Об'єктом дослідження є процеси, що впливають на міцність і довговічність неоднорідних композитів з урахуванням макро і мікро термомеханічних ефектів у них.

Предмет дослідження. Моделі та методи розрахунку неоднорідних композитів з урахуванням макро і мікро термомеханічних ефектів у них.

Методи дослідження. Методи термопружності, які перебувають на перетині теорії пружності, термодинаміки, теорії теплопровідності та методів прикладної математики. Математичні моделі у вигляді систем алгебраїчних рівнянь та систем диференціальних рівнянь спираються на використання методів математичного аналізу та комп'ютерних алгоритмів.

Обґрунтованість та достовірність отриманих в роботі результатів підтверджується обґрунтованим вибором прийнятих механічних моделей, що спираються на основні закономірності та положення теорії теплопровідності, будівельної механіки, механіки деформованого твердого тіла та методів скінченно-елементного аналізу; практичною перевіркою результатів обчислень; зіставленням отриманих результатів з результатами розв'язків інших авторів, які знайдені при граничних значеннях визначальних параметрів, а також якісною узгодженістю результатів розрахунків з висновками, отриманими на підставі міркувань фізичного характеру.

Наукова новизна отриманих результатів.

Уперше:

- розроблено математичні моделі та методи розрахунку полів термонапружень в неоднорідних шаруватих конструкціях дорожнього одягу доріг та мостів;
- розроблено моделі та методи визначення додаткових внутрішньоструктурних термонапружень в композитних матеріалах із зернистими включеннями в будівельних спорудах з шаруватими конструкціями;
- побудовано математичні моделі та методи визначення внутрішньоструктурних термонапружень в околі суцільних, неоднорідних та

трубчастих армуючих стрижнів в композитних матеріалах шаруватих конструкцій дорожнього одягу;

- розроблено методи моделювання термонапруженого стану конструкцій дорожнього одягу з армуючими стрижнями та включеннями при термомеханічній сумісності і несумісності властивостей їх матеріалів та в умовах однорідних та неоднорідних полів температури за її зміни;

- проведено числові експериментальні дослідження про допустимі та недопустимі комбінації термомеханічних властивостей матеріалів в неоднорідних шаруватих конструкціях дорожнього одягу доріг та мостів;

- розроблено моделі та методи оцінювання дії водоморозних впливів на еволюцію додаткових термонапружень в композитних матеріалах (асфальто- та цементобетон) транспортних споруд протягом їх життєвого циклу;

- розроблено моделі та методи розвитку внутрішньоструктурних термонапружень в полімерних матеріалах шаруватих будівельних конструкцій, армованих карбоновими нанотрубками та фулеренами.

Удосконалено:

- методи дослідження явища розшарування конструкції дорожнього одягу внаслідок несумісності властивостей його шарів;

- моделі та методи прогнозування зародження та виключення внутрішнього механізму розвитку додаткових внутрішньоструктурних термонапружень в композитах конструкцій дорожнього одягу, викликаних несумісністю термомеханічних характеристик їх фаз.

Набули подальшого розвитку:

- методи визначення внутрішньоструктурного термонапруженого стану композитних матеріалів конструкцій дорожнього одягу з гумовими включеннями та уточнення причини їх пришвидшеної деградації, пов'язані з

механічною несумісністю гуми та широкими межами зміни її коефіцієнта термічного розширення;

- підходи до визначення внутрішньоструктурних термонапружень в асфальтобетонних та цементобетонних матеріалах, підсилених фібергласовою, фіберкарбоновою, фібербазальтовою та фіберарамідною арматурами.

Практичне значення отриманих результатів полягає в:

- отриманні методів для теоретичного аналізу термоміцності шаруватих конструкцій дорожнього одягу доріг і мостів та визначення внутрішньоструктурних термодеоформацій і термонапружень в дорожніх конструкціях в тому числі із асфальтобетонних і цементобетонних матеріалів, що армовані суцільними, трубчастими, металевими та неметалевими (полімерними, карбоновими та іншими) стрижнями при різних конструктивних схемах та впливах на них змін температури за сучасних кліматичних умов України;

- використанні розробленого математичного забезпечення як інструменту для аналізу полів термонапружень станів неоднорідних конструкцій з врахуванням наявності розривів цих функцій і їх концентрації на інтерфейсних контактних поверхнях в умовах високоградієнтних полів температури. Моделювання концентрації внутрішньоструктурних термонапружень в дорожньому одязі дозволить понизити їх рівень та уникнути утворення локальних дефектів, тріщин, розшарувань і деструкцій;

- отриманні аналітичних рішень для визначення термопереміщень, деформацій та термонапружень в елементах конструкцій дорожнього одягу і можливості визначення наближеності їх стану до критичного в залежності від сумісності та несумісності термомеханічних параметрів фаз системи;

- проведенні цілеспрямованих розрахунків на міцність та дослідженні дорожньої конструкції при різних значеннях її геометричних та

фізико-математичних параметрів, що дозволяють згладити концентратори напружень і деформації та підвищити довговічність системи.

– вирішенні проблеми раціонального вибору, при проектуванні дорожніх конструкцій, композитів із їх найбільш доцільними термомеханічними властивостями;

– уточненні прогнозування дії водоморозних впливів на тріщиностійкість асфальтобетонного покриття протягом його життєвого циклу при застосуванні розроблених методів та моделей.

Наукові розробки та практичні рекомендації щодо підвищення довговічності дорожніх конструкцій за рахунок зменшення або виключення додаткових концентраторів термонапружень, викликаних несумісністю термомеханічних характеристик неоднорідних композитних матеріалів впроваджено в ДП «НІРІ» Державного агентства відновлення та розвитку інфраструктури України, в КК «Київавтодор», ТОВ «КАПОНІР-ГРУП» та ТОВ «ДОТРАНС».

Результати досліджень були впроваджені у навчальному процесі на кафедрі дорожньо-будівельних матеріалів і хімії факультету транспортного будівництва НТУ при викладанні дисципліни «Механіка дорожнього одягу» для студентів спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія» освітньої програми «Технології будівельних конструкцій, виробів і матеріалів», а також дисципліни «Сучасні моделі та методи розрахунку дорожніх конструкцій з урахуванням термореологічних властивостей» для аспірантів спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія». Крім того отримані результати досліджень використовувались в роботі зі студентами в наукових гуртках та підготовці ними наукових публікацій і доповідей на конференціях.

Особистий внесок здобувача. Отримані в представлений до захисту роботі розрахункові моделі, методи, підходи, основні результати, що

складають дисертаційну роботу, здобуті автором. Вони відображені в індивідуальних та спільних публікаціях, де автор сформулював, поставив і розробив розрахункові математичні моделі задач для визначення концентраторів термонапружень в неоднорідних композитах.

Наукові положення, розробки, результати, висновки і рекомендації, що виносяться на захист, одержані автором самостійно та викладені в наукових публікаціях. Особистий внесок здобувача у роботах, опублікованих у співавторстві, зазначено у списку опублікованих праць.

Здобувачем в роботах, надрукованих у виданнях іноземних держав та у виданнях України, які включені до міжнародних наукометричних баз (Scopus): в [3] – проаналізовано вплив викривлення на перерозподіл полів напружень під дією температурних збурень; [137] – виконано аналіз термопружного деформування двошарової пластини зі співставними жорсткими характеристиками шарів; [149] – розроблено математичну модель для визначення критичних станів та форм біфуркаційного випинання нанотрубок, напружених поздовжньою силою та крутним моментом; [150] – розроблено математичні моделі термопружного деформування і руйнування композитних, асфальтобетонних та цементобетонних матеріалів на макро- та мікрорівнях під час замерзання води в їх порах і капілярах; [151] – сформульовано розв’язувальні диференціальні рівняння для випадків суцільних та порожнистих сферичних включень, побудовано їх розв’язки в замкненій і розгорнутій формах; [153] – виведено аналітичні вирази для визначення значень додаткових термонапружень, сформульовано умови термомеханічної несумісності матеріалів асфальтобетону та арматури для зменшення додаткових контактних термонапружень в асфальтобетоні; [154] – проведено числове моделювання концентрації напружень на поверхні сферичної пори; [260] – виведено розв’язувальні рівняння, побудовано їх розв’язки.

Здобувачем в роботах, надрукованих у наукових фахових виданнях: [10] – створено математичні моделі і виведенно розв’язувальні рівняння для визначення термонапружень, що викликані неоднорідними полями температури в композитах зі стрижневою арматурою; [17] – досліджено причини появи поперечних тріщин у верхньому шарі дорожнього покриття в зимовий час; [18] – виконано аналіз термомеханічної несумісності матеріалів асфальтобетону, цементобетону та арматур; [19] – створено математичну модель і сформульовано розв’язувальні рівняння для аналізу полів термонапружень в залізобетонних конструкціях мостів і в асфальтобетонних покриттях доріг, армованих стрижнями з ізолюючим епоксидним покриттям; [23] – виконано аналіз та комп’ютерне моделювання проблеми; [24,71,78] – виділені три основні причини порушення умов вільного термодформування пружних тіл, що призводять до генерування в них термонапружень; [77] – визначення граничних рівнів наповнення водою пор та капілярів, за яких в цементобетонних та асфальтобетонних матеріалах виникають локальні тріщини і терморуїнування; [81] – досліджено сингулярно-збурену задачу теплового деформування дорожнього покриття та розподіл в його масиві полів температури, переміщень та напружень; [83] – розроблено математичну модель зародження внутрішньоструктурних термонапружень в полімерних матеріалах, що армовані карбоновими нанотрубками в умовах зміни в них однорідних і неоднорідних полів температур.

Здобувачем у працях апробаційного характеру: [11] – досліджено особливості температурного деформування та розподілення полів термонапружень в композитній структурі, що складається з бітумної матриці та гумових включень; [21] – побудовано модель, виведено розв’язувальних рівнянь, знайдено їх розв’язків; [22] – виконано аналіз генерування у матриці недопустимих концентраторів термонапружень, що викликані термомеханічною несумісністю параметрів базового матеріалу та

нанотрубки; [66] – виконано аналіз напруженодеформованого стану асфальтобетону; [79] – виконано аналіз термомеханічної несумісності матеріалів асфальтобетону, цементобетону та арматур; [258] – виконано скінченно-елементний аналіз впливу тріщини на напружено-деформований стан багатошарової системи.

Здобувачем у колективних монографіях: [12] – досліджено причини появи поперечних тріщин у верхньому шарі дорожнього покриття в зимовий час; проаналізовано вплив викривлення на перерозподіл полів напружень під дією температурних збурень; [13] – розроблено математичні моделі термопружного деформування і руйнування композитних, асфальтобетонних та цементобетонних матеріалів; виведення диференціальних рівнянь та їх розв’язування; [155] – постановлено та розв’язано задачі 7-го розділу монографії; [156] – виконано комп’ютерне моделювання сингулярно-збуреної задачі та графічне представлення отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Основні наукові положення та практичні результати дисертаційних досліджень доповідались, обговорювались і отримали позитивну оцінку на науково-практичних та науково-технічних, міжнародних конференціях та семінарах, серед яких: Міжнародна науково-практична конференція «Інноваційні підходи у відновленні транспортної інфраструктури в особливих умовах воєнного стану: виклики та перспективи» (Київ, Україна, 2024 р.); International scientific-practical conference «Science, education and technology: global trends and regional aspects» (Tampere, Finland, July 11, 2024); International scientific-practical conference «Current issues of science, education and technology in the context of modern challenges»: conference proceedings (Aarhus, Denmark, June 29, 2024); IEEE SAIC (Kyiv, Ukraine; 2020) Міжнародна конференція «Впровадження інноваційних матеріалів і технологій при проєктуванні, будівництві та експлуатації об’єктів транспортної інфраструктури в рамках

програми «Велике будівництво» НТУ (Київ, Україна, 2022 р.); Всеукраїнська науково-практична конференції «Перспективи розвитку автомобільного транспорту та інфраструктури» ДП «ДержавтотрансНДІпроект» (Київ, Україна, 2023 р.); III Міжнародна науково-практична конференція «Сучасні методи і проблемно-орієнтовані комплекси розрахунку конструкцій і їх застосування у проектуванні і навчальному процесі» (Україна, Київ, вересень 2019 р.); Всеукраїнська наукова конференція здобувачів освіти і молодих учених «Відбудова транспортної інфраструктури України» (Київ, Україна, червень 2023 р.); LXXIII науково-практична конференція науково-педагогічних працівників, аспірантів, студентів та структурних підрозділів університету (Україна, Київ, 15 – 17 травня 2024 р.); LXXV науково-практична конференція науково-педагогічних працівників, аспірантів, студентів та структурних підрозділів університету (Київ, Україна, 12 – 15 травня 2019 р.); LXXVII науково-практична конференція науково-педагогічних працівників, аспірантів, студентів та структурних підрозділів університету (Київ, Україна, 15 – 17 травня 2021 р.); LXXIX науково-практична конференція науково-педагогічних працівників, аспірантів, студентів та структурних підрозділів університету (Київ, Україна, 14 – 16 травня 2023 р.).

Тези доповідей опубліковані у матеріалах зазначених конференцій.

Публікації. Основний зміст роботи викладено у 47 публікаціях [3, 10-13, 17-19, 21-24, 43-45, 54-56, 66-83, 137, 149-151, 153-156, 258-260]: з них 4 колективних монографій, 9 у журналах що включені до науко-метричних баз Scopus та Web of Science, у тому числі 1 – одноосібна, 16 робіт опубліковано у фахових виданнях, у тому числі 6 – одноосібних, 7 – в тезах міжнародних конференцій, 4 – в збірниках тез наукових конференцій Національного транспортного університету, 3 патенти на корисну модель та 3 свідоцтва авторського права.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, шести розділів, висновків, чотирьох додатків та списку використаних джерел, який містить 296 найменувань. Вона містить 324 сторінки основного тексту, на яких 35 таблиць і 68 рисунків. Повний обсяг дисертації складає 420 сторінок.

Подяка. Автор вважає за необхідне виразити глибоку подяку Заслуженому діячу науки і техніки України, доктору технічних наук, професору Гуляєву Валерію Івановичу за вагомий внесок та підтримку при проведенні наукових досліджень.

РОЗДІЛ 1

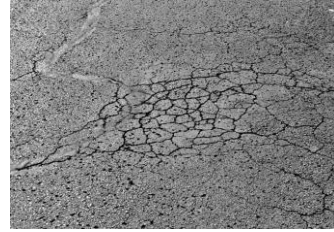
ОСОБЛИВОСТІ ТЕРМОПРУЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ШАРУВАТИХ ДОРОЖНІХ КОНСТРУКЦІЙ

1.1 Аналіз механічних і математичних особливостей проблеми термопружного деформування шаруватих конструкцій дорожнього одягу

Асфальтобетон є одним із найбільш універсальних, довговічних та еластичних матеріалів дорожніх покриттів у світі. Він простий в експлуатації і технічному обслуговуванні, а також дешевий у порівнянні з іншими дорожніми матеріалами, наприклад, цементобетоном. Тому, він є одним із найпоширеніших матеріалів для покриття доріг, паркувальних майданчиків та іншого обладнання житлового і промислового призначення. Однак, незважаючи на ці позитивні якості, тим не менш, практичне застосування асфальтобетону пов'язане з необхідністю постійної уваги до нього та технічного супроводу, починаючи з етапу проектування дороги та закінчуючи її експлуатацією.

Зневага цими факторами при проектуванні, технічному обслуговуванні та ремонті дороги може приводити до її передчасного зношування та руйнування. Серед пошкоджень асфальтобетонних покриттів, що найчастіше зустрічаються, можна виділити їх наступні дефекти (рис. 1.1).

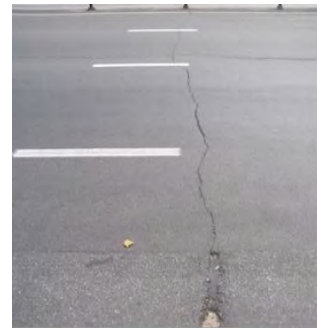
1. Алігаторні розтріскування (alligator cracking);
2. Поздовжнє розтріскування.
3. Поперечні тріщини.
4. Блокове розтріскування.
5. Відбите тріщиноутворення
6. Вибойни.
7. Скати та впадини,
8. Колія.
9. Куполоподібне випинання



а) Алігаторні розтріскування



б) Поздовжнє розтріскування



в) Поперечні тріщини



в) Вибоїни



г) Колійність

Рисунок – 1.1 Зовнішній вигляд деяких пошкоджень асфальтобетону

У конструкціях цементобетонних покриттів доріг можна виділити такі види механічних пошкоджень:

1. Дрібне відколювання матеріалу на стиках плит.
2. Усадкові та температурні тріщини.
3. Вертикальне зміщення плит відносно один одного на стиках.
4. Відколювання кутових шматків плит.
5. Групові комбіновані тріщини, які викликані багаторазовими діями заморозків та відтавань.
6. Вертикальні спільні підйоми плит на стиках внаслідок їх температурних розширень.

Наведений перелік пошкоджень та дефектів на дорогах з асфальтобетонними та цементобетонними покриттями свідчить про те, що значною мірою їх поява викликана температурними впливами та термомеханічними ефектами, пов'язаними з великими градієнтами температури за просторовими та тимчасовими змінними; додатковим механічним обмеженням (в'язями), які перешкоджають вільному термодформуванню матеріалу конструкції, і конструктивною неоднорідністю системи, яка складається з підсистем, що мають різні термомеханічні властивості. У зв'язку з цим досить складними є процеси еволюції термонапружень в цих конструкціях і їх теоретичному та експериментальному вивченню приділяється велика увага в публікаціях.

Під час розрахунків термонапружених станів шаруватих конструкцій дорожнього одягу доріг та мостів, а також покриттів, армованих стрижнями, в основному, використовуються підходи і методи, розвинені для термомеханічних розрахунків шаруватих композитних матеріалів і структур. Комп'ютерна реалізація цих методів дозволяє дослідити загальні закономірності перебігу термомеханічних процесів в шарувато-неоднорідних конструкціях. В роботі [210] розроблені частинні алгоритми для

моделювання полів напружень в шаруватих конструкціях дорожнього одягу під дією силових і термомеханічних впливів. Для розрахунку використаний метод гомогенізації, який усереднює поля напружень. Оскільки, в загальному випадку, напруження в покриттях є розривними функціями, такий метод неможна вважати раціональним.

У роботі [183] без урахування впливу несумісності термомеханічних параметрів шарів дорожніх конструкцій проведені дослідження впливу температури на прогини дорожнього полотна, в [253] проаналізовано термосиловий вплив взаємодії дорожнього одягу і земляного полотна. В цих роботах також не враховується неоднорідний характер розподілення функцій температури, яка змінюється по товщині. В статті [170] вивчається вплив низьких температур на міцність асфальтобетонних покриттів. Відмічається суттєве збільшення модуля пружності асфальтобетону при зменшенні температури і зменшенні його пластичності. Ці результати дозволяють підтвердити ефекти збільшення тріщиноутворення в асфальтобетоні в зимовий час. В статті [288] автори вивчили термосилову взаємодію між шарами покриття моста під дією термосилових збурень. Звертається увага на різницю термодеоформацій асфальтобетонного покриття і сталюї основи моста, що може бути причиною тріщиноутворення і відшарування покриття.

Робота авторів А.В. Сєдова та О.О. Фоменко [58] присвячена дослідженню зносу асфальтобетонного покриття з урахуванням впливу температури, вологості та агресивних середовищ. Є.В. Дорожко показав, що зміна температури асфальтобетонних шарів покриття суттєво впливає на зсувні деформації земляного полотна [25]. В роботі [1] В.О. Богомолуа і співавторів встановлені критерії довговічності асфальтобетонних шарів. В статті С.М. Талаха зі співавторами викладається методика скінченно-елементного розрахунку дорожніх одягів, відновлених за технологією холодного ресайклінгу [61].

Однак, у вказаних роботах практично не приділена увага аналізу впливу неоднорідності високоградієнтних полів температури викликаних несумісністю термомеханічних параметрів системи, на концентрацію термонапружень в конструкціях дорожнього одягу доріг та мостів.

При теоретичному аналізі впливу арматури на міцність конструкції та вивченні загальних термомеханічних властивостей армованих (композитних) матеріалів та дорожніх покриттів переважно визначають зведені (ефективні) значення параметрів комбінованих систем, що містять включення у вигляді частинок, волокон або стрижнів [116, 173, 196, 210, 227, 271]. При цьому в першому випадку розглядаються, в основному, моделі однорідних та неоднорідних сферичних частинок, у тому числі покритих оболонковими шарами [5]. Виділяються випадки впорядкованого [212, 296] та стохастичного [134, 135, 184] розміщення зерен цих частинок і для них обчислюються наведені значення модуля Юнга, коефіцієнта Пуассона, коефіцієнта теплопровідності та коефіцієнта температурного розширення всієї системи.

Роботи [5-7, 20, 14, 15, 30, 36, 63, 94, 183, 197, 253, 269, 290] присвячені аналізу складних процесів термодеструкції та термодеструкцій, що спостерігаються у конструкціях дорожнього одягу доріг та мостів. Питання визначення ефективних термодинамічних характеристик асфальтобетонних матеріалів армованих частинками, волокнами та стрижнями розглянуто в публікаціях [108, 112, 116, 125, 143, 189, 203, 269, 290]. Тут, однак, ці завдання ускладнюються, оскільки можна створювати матеріали з спрямованими (анізотропними) властивостями, зокрема, з нульовим значенням КЛТР [215] за рахунок використання арматури з його від'ємним значенням [118, 173, 209, 217, 267]. Питання проектування асфальтобетонних дорожніх покриттів обговорюються в роботах [2, 39, 40, 59, 60, 62, 84, 107, 207, 292].

Відмінна особливість явища зародження термонапружень в пружних тілах і спорудах зазвичай обумовлена не тим, що при зміні температури вони деформуються, а тим, що не можуть вільно деформуватися. Так, якщо тіло однорідне і на його переміщення не накладені зовнішні в'язі, то при постійній або температурі, яка лінійно змінюється вздовж просторових змінних, термонапруження в ньому дорівнюють нулю. У зв'язку з цим можна виділити три механізми генерування термонапружень у тілах: зовнішній, внутрішній та градієнтний. Зовнішній механізм має місце, коли на переміщення тіла накладені зовнішні обмеження (в'язі). Внутрішній механізм зустрічається в системах з неоднорідними термомеханічними властивостями, наприклад, у композитах, а також у дорожніх та мостових покриттях. Градієнтний механізм реалізується при швидких змінах полів температури в часі та просторі, які іноді називають тепловими ударами.

На практиці, як правило, найбільш наочними є наслідки прояву зовнішнього механізму, оскільки за його реалізації у системі виникають яскраво виражені макропошкодження, тріщини і навіть руйнування. Тому на практиці таким ефектам приділяли підвищену увагу і для їх математичного моделювання були розроблені спеціальні скінченно-елементні програми, які дають змогу прогнозувати їх з достатньою точністю.

При цьому, звичайно, не залишилася поза увагою очевидна особливість зовнішнього механізму, пов'язана з тим, що термонапруження, які виникають при його виявленні, в першу чергу залежать від коефіцієнта лінійного термічного розширення (КЛТР) матеріалу та зростають з його збільшенням. Тому при розробці нових композитних матеріалів вважалося, що якщо у матрицю композиту додати включення з дуже низьким значенням КЛТР, товедений (ефективний) КЛТР всього композиту понизиться і термонапруження у ньому зменшаться. У результаті розроблені навіть композити з нульовим ефективним КЛТР, фази якого мають додатні та

від'ємні значення цих коефіцієнтів. Проектувальники таких матеріалів, звичайно, знали про виникнення додаткових внутрішньоструктурних термонапружень в композиті, викликаних несумісністю термомеханічних характеристик його фаз, але мабуть інтуїтивно вважали їх несуттєвими та не приділяли їм достатньої уваги. Принаймні у науковій літературі ці питання не обговорюються, хоча композити з малими ефективними КЛТР продовжують розроблятися.

Відзначений спосіб нейтралізації дії зовнішнього механізму в композиті за рахунок мінімізації значення його ефективного КЛТР може супроводжуватися активізацією внутрішнього механізму, пов'язаного з необхідністю узгодження несумісних внутрішньоструктурних термодформацій фракцій композиту. При цьому виявляється, що термонапруження, які викликані Зовнішнім механізмом, не зникають. Їх заводять всередину і потай перерозподіляють на інтерфейсних поверхнях між фракціями композиту. Найчастіше ці внутрішньоструктурні термонапруження призводять не тільки до локальних мікропошкоджень і порушень адгезії між фазами, але в подальшому вони переходять у глобальні тріщини та деструкції.

Необхідно, також, відзначити принципову відмінність дії силових та термічних навантажень. Справа в тому, що якщо під дією силових («мертвих») навантажень в механічній системі виникають тріщини, то рівні напружень в цій зоні продовжують залишатися великими або навіть зростають. Проте, якщо в системі виникли термотріщини, то термонапруження поза вістрям тріщини, що викликають їх, різко зменшуються. Ця обставина може бути причиною того, що внутрішньоструктурні термотріщини часто залишаються непоміченими, а внутрішній механізм генерування термонапружень виявляється недооціненим. Беручи до уваги, що ці напруження важко піддаються

експериментальному моделюванню, можна відзначити зростаючу роль їхнього теоретичного аналізу.

Прикладом руйнування системи із зовнішніми обмеженнями можуть бути пошкодження дорожніх покриттів у вигляді поперечних тріщин, спричинених від'ємною температурою. В цьому випадку зовнішні в'язі обмежують деформування системи в поздовжньому напрямку, покритв не може вільно скорочуватися і рветься з утворенням поперечних тріщин.

Механізм пошкоджень, який зумовлений внутрішніми обмеженнями, може також сприяти поширенню видимих тріщин у випадках крихкого зв'язуючого або низьких від'ємних температур. Крім того мікротріщини, які викликані цим механізмом, настільки послаблюють асфальтну суміш, що інші джерела напружень викликають ще більші напруження. Тому можливі комбіновані джерела термонапружень, які пов'язані як із зовнішнім, так і з внутрішнім механізмами пошкоджень.

Внутрішні та комбіновані механізми терморуїнувань особливо часто проявляються в композитних матеріалах, в яких термомеханічні властивості зв'язуючого та наповнювача мають термомеханічну несумісність. Вони особливо помітні в шаруватих конструкціях дорожнього одягу доріг і мостів, які не можуть вільно подовжуватися і скорочуватися у поздовжньому напрямку при збільшенні та зменшенні температури і в яких модулі пружності, коефіцієнти Пуассона та коефіцієнти лінійного температурного розширення мають різні значення. У конструкціях дорожнього одягу доріг мостів він виникає в комбінаціях бітум – мінеральні включення, бітум – металева стрижнева та дротяна арматура, бітум – склопластикова арматура та ін. В науковій літературі, зазвичай, епізодично відзначаються можливі негативні прояви таких комбінацій [98, 101, 106, 135, 160, 170, 173, 203, 211, 240, 243, 270, 290], але не зустрічаються глибокі експериментальні і теоретичні опрацювання у цьому напрямі.

1.2 Теоретична модель термопружного деформування багатошарових дорожніх конструкцій

В загальному випадку зміна поля температури в пружному середовищі приводить до породження в ньому додаткових термонапружень. Дослідження цих ефектів здійснюється в різні роки багатьма науковцями [32, 33, 20, 29] методами термопружності, яке перебуває на перетині теорії пружності, термодинаміки, теорії теплопровідності та методів прикладної математики.

Базові гіпотези, які лежать в основі термопружності, стосуються властивостей суцільності, однорідності та пружності середовища, що розглядається і, хоча властивості дорожніх матеріалів, таких як асфальтобетони та цементобетони, повною мірою не задовольняють цим вимогам, за допомогою методів термопружності можна встановлювати основні особливості їх деформування та міцності.

Принциповий вплив температурного фактора на структуру рівнянь термопружності полягає у формулюванні зв'язку між відносними деформаціями та напруженнями в пружному середовищі. Лінійна теорія термопружності заснована на гіпотезі Дюамеля-Неймана, яка стверджує, що повна деформація середовища є сумою пружної деформації, пов'язаної з напруженими звичайними співвідношеннями теорії пружності, і деформації чисто термічного розширення, відповідного температурного поля, відомого з класичної теорії теплопровідності. За допомогою цієї гіпотези після віднімання термічних деформацій з повних деформацій середовища вдалося виразити термопружні напруження в ній через переміщення та температуру її елементів. Сформулюємо основні співвідношення теорії термопружності [47, 188, 207, 219, 271, 277].

Оскільки надалі будуть розглянуті випадки термопружного деформування дорожнього покриття з прямолінійною та криволінійною осью лінією, виникає необхідність використання як прямокутної декартової, так і циліндричної систем координат. У зв'язку з цим доцільно спочатку сформулювати розв'язувальні рівняння в загальній векторній формі і потім перетворювати їх відповідно до конкретного випадку. У системі декартових координат x_1, x_2, x_3 з ортами $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ переміщення точки визначається вектором $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{i}_1 + u_2 \mathbf{i}_2 + u_3 \mathbf{i}_3$, а напружено-деформований стан пружного елементу – тензорами напружень σ_{ij} і деформацій ε_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), представлених у вигляді діагонально симетричних таблиць [51, 55]

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{Bmatrix}. \quad (1.1)$$

Тензор деформацій ε_{ij} у виразі (2.1) представляється у вигляді рівностей

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (1.2)$$

Тут символи i, j , які використовуються у нижніх індексах після коми означають диференціювання за змінними x_i, x_j

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad u_{j,i} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \quad (1.3)$$

При механічних і теплових впливах у пружному тілі виникають поля переміщень u_i , деформацій ε_{ij} і напружень σ_{ij} , також температурне поле T .

Під механічними розуміють впливи на тіло зовнішніх сил (об'ємних і поверхневих), а під тепловими – процеси теплообміну між поверхнею тіла і навколишнім середовищем та виділення і поглинання тепла джерелами всередині тіла.

Орієнтацію напружень σ_{ij} та їх приростів $d\sigma_{ij} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} dx_k$

($i, j, k = 1, 2, 3$), що діють на виділений елемент, зручно проілюструвати за допомогою рис. 1.2.

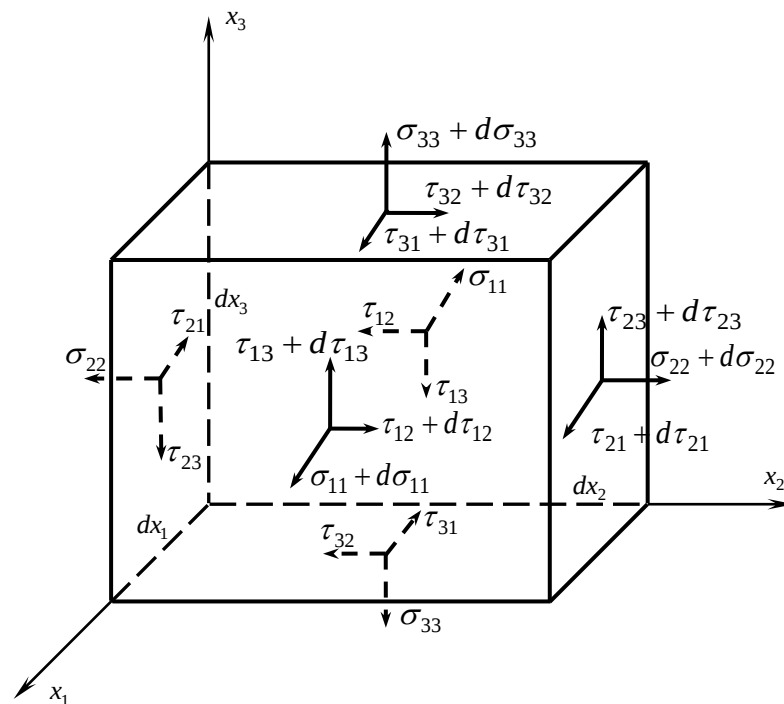


Рисунок 1.2 – Напруження, що діють на елемент об'єму в прямокутній системі координат

Нехай на виділений елемент діють також об'ємні сили інтенсивністю $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i}_1 + F_2 \mathbf{i}_2 + F_3 \mathbf{i}_3$. Проектуючи всі ці сили на відповідні осі, отримаємо три рівняння рівноваги

$$\begin{aligned}
& (\sigma_{11} + d\sigma_{11})dx_2dx_3 - \sigma_{11}dx_2dx_3 + (\tau_{21} + d\tau_{21})dx_1dx_3 - \tau_{21}dx_1dx_3 + \\
& + (\tau_{31} + d\tau_{31})dx_1dx_2 - \tau_{31}dx_1dx_2 + F_1dx_1dx_2dx_3 = 0; \\
& (\sigma_{22} + d\sigma_{22})dx_1dx_3 - \sigma_{22}dx_1dx_3 + (\tau_{12} + d\tau_{12})dx_2dx_3 - \tau_{12}dx_2dx_3 + \\
& + (\tau_{32} + d\tau_{32})dx_1dx_2 - \tau_{32}dx_1dx_2 + F_2dx_1dx_2dx_3 = 0; \\
& (\sigma_{33} + d\sigma_{33})dx_1dx_2 - \sigma_{33}dx_1dx_2 + (\tau_{23} + d\tau_{23})dx_1dx_3 - \tau_{23}dx_1dx_3 + \\
& + (\tau_{13} + d\tau_{13})dx_2dx_3 - \tau_{13}dx_2dx_3 + F_3dx_1dx_2dx_3 = 0.
\end{aligned}$$

Після відповідних спрощень вони приймають вигляд

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} + F_1 &= 0; \\
\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + F_2 &= 0; \\
\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + F_3 &= 0.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Ці співвідношення можуть бути представлені в коротшій формі

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0; \quad (i, j = 1, 2, 3), \tag{1.5}$$

в яких по повторюваним індексам j виконується сумування від 1 до 3. Величина F_i , що входить у рівність (1.5), є об'ємною силою, яка діє на виділений елемент у напрямі координати x_i . Вона може визначити, наприклад, силу тяжіння або силу інерції.

Відзначимо, що в науковій літературі для позначення дотичних напружень використовуються як позначення σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, i \neq j$), так і τ_{ij} . Нижче, в залежності від контексту, будуть використовуватися обидва ці види позначень.

Співвідношення між напруженнями σ_{ij} і деформаціями ε_{ij} містять два незалежних параметри $\mu(G)$ і λ (параметри Ляме) і записуються у формі узагальненого закону Гука

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2G\varepsilon_{11}; & \sigma_{22} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2G\varepsilon_{22}; \\ \sigma_{33} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2G\varepsilon_{33}; & \sigma_{12} = \sigma_{21} &= 2G\varepsilon_{12} = 2G\varepsilon_{21}; \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} &= 2G\varepsilon_{23} = 2G\varepsilon_{32}; & \sigma_{31} = \sigma_{13} &= 2G\varepsilon_{31} = 2G\varepsilon_{13}.\end{aligned}\quad (1.6)$$

При врахуванні теплових ефектів замість співвідношень (1.6) використовуються рівності [52]

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + [\lambda I_1 - (3\lambda + 2G)\alpha_T(T - T_0)]\delta_{ij}, \quad (1.7)$$

де I_1 – перший інваріант тензора деформацій; δ_{ij} – символ Кронекера; α_T – коефіцієнт теплового лінійного розширення; T_0 – початкове значення температури; T – її поточне значення.

В лінійній теорії пружності відносні деформації визначаються через компоненти u_1 , u_2 , u_3 вектора переміщень

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}; & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; & \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right); & \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right); \\ \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)\end{aligned}$$

За допомогою рівностей (1.1), (1.3), (1.4) можна побудувати систему рівнянь Нав'є-Коші деформування пружного середовища

$$\begin{aligned}
&\mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u_1 + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + F_1 = 0; \\
&\mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u_2 + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + F_2 = 0; \\
&\mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u_3 + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + F_3 = 0.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Величини u_i , ε_{ij} , σ_{ij} і T в загальному випадку є функціями координат x_i і часу t . Так як тепло розповсюджується в твердому тілі через теплопровідність, то для вивчення процесу термопружного деформування навіть ідеально пружного тіла має бути застосована термодинаміка незворотних процесів.

Основні ідеї термодинаміки незворотних процесів полягають в поняттях локальної рівноваги і повільних процесів [218, 219, 277].

Вводячи до розгляду густину теплового потоку (кількість тепла, що проходить за одиницю часу через одиницю площі поверхні), представленого вектором $\mathbf{q}$ з компонентами q_i , і пов'язуючи його зі швидкістю питомого тепла, яке підводиться

$$-q_{i,i} = \dot{Q} - w_0, \tag{1.9}$$

а також замінюючи величину $\dot{L} - \dot{K}$ [277], прикладену до одиниці об'єму тіла, швидкістю питомої роботи деформації

$$\dot{W} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}, \tag{1.10}$$

перший та другий закон термодинаміки для ізотропного пружного тіла можна записати у вигляді

$$-q_{i,i} + w_0 = T\dot{S} = \dot{U} - \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}, \quad (1.11)$$

де S і U – об’ємні густини ентропії та внутрішньої енергії; w_0 – питома потужність (кількість виробленого тепла за одиницю часу в одиниці об’єму) джерел тепла.

Третє положення є феноменологічним законом, що описує незворотній процес теплопровідності, – законом Фур’є про пропорційність вектора теплового потоку градієнту температури

$$q_i = -\lambda_q T_{,i}, \quad (1.12)$$

де λ_q – коефіцієнт теплопровідності. Цей закон встановлений з припущення, що швидкість поширення тепла нескінченно велика.

Представимо спрощене виведення рівняння теплопровідності, відкидаючи в (1.11) члени, що залежать від деформацій.

Кількість тепла, отриманого одиницею об’єму за одиницю часу, дорівнює $c \frac{\partial T}{\partial t}$ (c – питома об’ємна теплоємність тіла). Цю кількість тепла потрібно прирівняти до тепла – $\text{div} \mathbf{q}$ ($\mathbf{q}$ – вектор густини теплового потоку), що підводить до одиниці об’єму тіла за одиницю часу за допомогою теплопровідності. При наявності в тілі джерел тепла, які виділяють в одиниці об’єму за одиницю часу кількість тепла w_0 , рівняння теплопровідності має вигляд

$$\operatorname{div} \mathbf{q} + w_0 = -c \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Враховуючи, що на основі формули (1.12)

$$\mathbf{q} = -\lambda_q \operatorname{grad} T, \quad (1.13)$$

рівняння теплопровідності запишемо у вигляді

$$\operatorname{div}(-\lambda_q \operatorname{grad} T) + w_0 = c \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (1.14)$$

Так як величини c і λ_q залежать від температури, а відтак, від координат, то рівняння (1.14), загалом, є нелінійним. В задачах теплопровідності, які розглядаються в даній роботі, вони є постійними величинами. Тоді рівняння теплопровідності набуває виду

$$\nabla^2 T + \frac{w_0}{\lambda_q} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1.15)$$

де $a = \frac{\lambda_q}{c}$ – коефіцієнт температуропровідності, який характеризує теплоінерційні властивості тіл.

Якщо в тілі відсутні джерела тепла, рівняння теплопровідності перетворюється в рівняння

$$\nabla^2 T = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (1.16)$$

Рівняння (1.15) і (1.16) описують нестационарні температурні поля. Стационарному температурному полю відповідає рівняння Лапласа

$$\nabla^2 T = 0. \quad (1.17)$$

Для однозначності розв'язку рівняння теплопровідності необхідно його доповнити початковими і граничними умовами.

В якості початкової умови задається розподіл температури тіла в початковий момент часу ($t = 0$). Цей розподіл зазвичай вважають рівномірним:

$$T(x_k, 0) = T_0 = \text{const}. \quad (1.18)$$

Граничні умови пов'язані зі складним теплообміном на поверхні тіла, де можуть мати місце всі три способи теплопередачі одночасно.

В теорії теплопровідності в якості основних граничних умов можуть бути задані:

1. Розподіл температури на поверхні тіла:

$$T(x_k, t) = f(x_k, t), \quad (1.19)$$

де x_k – точка на поверхні тіла; $f(x_k, t)$ – задана функція.

2. Густина теплового потоку через поверхню тіла:

$$q(x_k, t) = -\lambda_q \frac{\partial T(x_k, t)}{\partial n}, \quad (1.20)$$

де n – зовнішня нормаль до поверхні тіла в точці x_k .

При теплообміні випромінюванням між поверхнями з температурами T_1 і T_2 густина теплового потоку через першу поверхню визначається формулою

$$q = \sigma_0 \varepsilon_{12} (T_1^4 - T_2^4), \quad (1.21)$$

де σ_0 – стала Стефана-Больцмана, $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ вт} / \text{м}^2 \cdot \text{град}^4$, ε_{12} – постійний коефіцієнт, залежний від характеристик випромінювання та поглинання поверхонь та від їх відносного розміщення. Значення ε_{12} в залежності від стану і розташування поверхонь можна знайти в спеціальній літературі з теплового випромінювання.

В окремому випадку, коли відсутній тепловий потік через поверхню (для тіла з ідеально ізольованою поверхнею)

$$\frac{\partial T(x_k, t)}{\partial n} = 0. \quad (1.22)$$

3. Температура довкілля ϑ і закон конвективного теплообміну між поверхнею тіла і середовищем:

$$-\lambda_q \frac{\partial T(x_k, t)}{\partial n} = \alpha [T(x_k, t) - \vartheta], \quad (1.23)$$

де α – коефіцієнт тепловіддачі, який залежить від термічних та фізичних характеристик поверхні тіла та довкілля.

Розрізняють теплообмін при вільній конвекції, що виникає при природному переміщенні частинок рідини внаслідок нерівномірної її густини, зумовленою нерівномірним нагріванням, і при вимушеній конвекції

в результаті руху рідини під дією механічних впливів. Теплообмін при вимушеній конвекції відбувається інтенсивніше, ніж при вільній.

Наведемо формули для векторних операцій першого порядку в декартовій системі координат

$$\begin{aligned}\nabla \varphi &= \text{grad } \varphi = \mathbf{i}_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}; \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}; \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \equiv \mathbf{i}_1 \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) + \mathbf{i}_2 \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) + \mathbf{i}_3 \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right).\end{aligned}$$

На їх основі виконуються операції другого порядку, наприклад,

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}.$$

З їх допомогою і на основі рівностей (1.7) запишемо в остаточній формі рівняння термопружного деформування [21, 33]

$$\begin{aligned}\mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u_1 + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \frac{\partial (T - T_0)}{\partial x_1} &= 0; \\ \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u_2 + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \frac{\partial (T - T_0)}{\partial x_2} &= 0; \\ \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u_3 + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \frac{\partial (T - T_0)}{\partial x_3} &= 0,\end{aligned} \quad (1.24)$$

і рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (1.25)$$

Зазначимо, що система рівнянь (1.24) пружної рівноваги (без температурного доданка) належить до рівняння математичної фізики еліптичного типу, рівняння нестационарної теплопровідності (1.25) – до рівнянь параболічного типу.

1.3 Визначення полів температури і додаткових умов при яких термонапруження в пружних тілах дорівнюють нулю

При дослідженні термонапружень в пружних тілах важливо знати, які поля розподілу температури здійснюють і не здійснюють вплив на їх значення. Виявляється, якщо тіло є однорідним і на його переміщення не накладені обмеження (в'язі), то для поля температури, яка лінійно змінюється вздовж кожної із трьох осей декартової системи координат, всі термонапруження дорівнюють нулю [168, 169].

Дійсно, розглянемо пружне однорідне тіло, вільне від зовнішніх крайових і внутрішніх об'ємних сил та від зовнішніх і внутрішніх обмежень, при деякому розподіленому в ньому нестационарному полі температури $T(x, y, z, t)$.

Рівняння динаміки термопружного середовища при умові зміни температури за часом t мають вигляд:

$$\begin{aligned}
&\mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - (3\lambda + 2\mu) \alpha T = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\
&\mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - (3\lambda + 2\mu) \alpha T = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \quad (1.26) \\
&\mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - (3\lambda + 2\mu) \alpha T = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},
\end{aligned}$$

де u , v , w – компоненти вектора пружних переміщень вздовж відповідних осей, λ , μ – модулі пружності Ламе, α – коефіцієнт лінійного термічного розширення, ρ – густина, t – час.

Надалі зручно всі перетворення виконувати з використанням тензорної символіки. Нехай: $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$, $u = u_1$, $v = u_2$, $w = u_3$.

Тоді представляючи переміщення $u_i(t)$ через деформації $\varepsilon_{ij}(t)$ за допомогою рівностей $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = 0,5(u_{i,j} + u_{j,i})$, систему (1.26) замінимо рівняннями [14]

$$\mu \varepsilon_{ij,kk} + (\lambda + \mu) \varepsilon_{kk,ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha T_{ij} = \rho \ddot{\varepsilon}_{ij}, \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (1.27)$$

Наступні зміни системи (1.43) пов'язані з виразом деформацій ε_{ij} через напруження σ_{ij}

$$\begin{aligned}
&\sigma_{ij,kk} + \frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk,ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{mm,kk} \delta_{ij} + 2\mu \alpha (T_{,ij} + T_{,kk} \delta_{ij}) = \\
&= \frac{\rho^2}{\mu^2} \left(\ddot{\sigma}_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \ddot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} \right) + \frac{2\rho^2 \alpha}{\mu} \ddot{T} \delta_{ij}; \quad (1.28) \\
&\quad (i, j, k, m = 1, 2, 3).
\end{aligned}$$

Виділимо випадок, коли задача є стаціонарною і похідними по t в (1.28) можна знехтувати. Тоді маємо

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk,ij} + 2\mu\alpha \left(T_{,ij} + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} T_{,kk} \delta_{ij} \right) = 0; \quad (1.29)$$

$$(i, j, k = 1, 2, 3).$$

Нехай під дією температурного поля термонапруження в тілі дорівнюють нулю, $\sigma_{ij} = 0$. Тоді розв'язувальні рівняння теорії термопружності (1.29) приводяться до вигляду

$$T_{,ij} + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} T_{,kk} \delta_{ij} = 0. \quad (1.30)$$

У ряді випадків замість параметрів λ і μ зручно використовувати параметри E і ν , де E - модуль пружності, ν - коефіцієнт Пуассона. Випишемо рівність (1.30) в розгорнутій формі після заміни λ і μ на E і ν

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \nabla^2 T + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= 0; \\ \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \nabla^2 T + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= 0; \\ \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \nabla^2 T + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} &= 0; \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z} = 0; \quad \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial x} = 0. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Додавши три перших рівняння системи (1.43), отримаємо

$$\nabla^2 T = 0. \quad (1.32)$$

Це означає, що єдиний закон розподілу температури, при якому термонапруження в пружному однорідному вільному тілі дорівнюють нулю, описується рівняннями

$$\begin{aligned} \nabla^2 T &= 0; \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} &= 0; \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z} = 0; \quad \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial x} = 0. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Ця система має єдиний розв'язок

$$T(x, y, z) = a + bx + cy + dz, \quad (1.34)$$

де a, b, c, d – довільні сталі.

Таким чином, якщо температура в пружному однорідному тілі, вільному від в'язей, розподіляється за лінійним законом (1.34), то термонапруження в ньому дорівнюють нулю. При цьому переміщення, викликані вільним термічним розширенням (або усадкою) тіла, дорівнюють

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \alpha \left[(a + bx + cy + dz)x - \frac{b}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \right]; \\ v(x, y, z) &= \alpha \left[(a + bx + cy + dz)y - \frac{c}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \right]; \\ w(x, y, z) &= \alpha \left[(a + bx + cy + dz)z - \frac{d}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \right]. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Особлива ситуація виникає, коли $b = c = d = 0$ і температура однакова у всіх точках тіла. Тоді

$$u(x, y, z) = \alpha ax; \quad v(x, y, z) = \alpha ay; \quad w(x, y, z) = \alpha az. \quad (1.36)$$

При такому розподілу температури ненульові термонапруження можуть виникати тільки у випадках, якщо тіло неоднорідне і його коефіцієнт α є функцією змінних x, y, z , або коли його переміщення (1.36) обмежені зовнішніми в'язями.

Відзначимо цікаву математичну властивість функції (1.34). В цьому випадку

$$\text{grad}T = b\vec{i} + c\vec{j} + d\vec{k} \quad (1.37)$$

і вектор градієнта (1.37) має одне і теж значення у всіх точках тіла.

1.4 Три механізми виникнення термонапружень і терморуйнувань в пружних тілах.

Температурні напруження в машинах, спорудах і конструкціях виникають через обмеження можливості вільного деформування їх елементів з боку інших частин цих об'єктів або з боку інших тіл і можуть бути причиною їх руйнувань. Для зниження таких термонапружень намагаються по можливості уникати накладання на систему додаткових зовнішніх зв'язків або вводять так звані температурні компенсатори, серед яких найпоширенішими є зазори між ділянками рейок та асфальтних дорожніх покриттів, зазори між блоками гребель, ковзанки на опорах мостів та ін. До них можна віднести також петельні відгалуження ліній електропередач у точках їх підвісу та петельні компенсатори нафтових та газових трубопроводів. Зважаючи на те, що рівні термонапружень в конструкціях

можуть бути істотно знижені вже на етапі їх проектування за рахунок вибору раціональних конструктивних схем, важливо знати умови відсутності термонапружень і механізми їх зародження в системах, що деформуються. Показано, наприклад, що термонапруження дорівнюють нулю (з відомим ступенем наближення) в статично визначених фермах при будь-яких законах розподілу температури в їх стрижнях. Вони рівні нулю також в безмоментних оболонках. У зв'язку з цим важливим є загальне питання про те, при яких полях розподілу температури в тривимірних тілах спровоковані нею термонапруження дорівнюють нулю. При цьому для неоднорідних систем, таких як композитні матеріали, асфальтобетонні і цементнобетонні покриття доріг і мостів, значний теоретичний і прикладний інтерес пов'язаний з оберненою постановкою цього питання: які механізми найбільше сприяють зародженню термонапружень в цих системах, які закономірності розподілу полів цих напружень і які з них становлять найбільшу небезпеку? Відповіді на ці питання можуть допомогти знизити рівні термонапружень в неоднорідних системах і підвищити їх термостійкість.

В попередньому підрозділі розглянуті закони розподілу полів температури, при яких термонапруження в однорідному середовищі, вільному від зовнішніх обмежень на переміщення, відсутні. Проте суттєвий практичний інтерес представляє обернене питання: при яких умовах ці напруження виникають, і в яких випадках вони можуть приводити до пошкодження в середовищі. В роботах [132, 133] узагальнюються два механізми статичного термічного руйнування тіла, дані в умовах, коли температура однакова у всіх його точках. Обидва ці механізми виникають, коли на термічне переміщення елементів тіла накладенні обмеження, які перешкоджають їх вільному термічному деформуванню.

Перший механізм називається зовнішнім (External Mechanism). Він

пов'язаний з наявністю зовнішніх в'язей, які обмежують термічні переміщення на крайових поверхнях тіла. В дорожніх конструкціях такий механізм виникає, наприклад, в тілі дорожнього покриття, вільне термічне деформування якого внизу обмежене контактною взаємодією з нижче лежачим шаром дороги, а поздовжні переміщення (вздовж осі z) на кінцях дороги (умовно, на нескінченності) дорівнюють нулю. Ці зовнішні в'язі приводять до того, що, наприклад, при лінійному розподілі від'ємної температури $T(y)$ за товщиною покриття переміщення в гіпотетичному шарі дороги, вільному від в'язей, набувають значення (1.35), шар приймає форму, яка представлена на рис. 1.3 б, і напруження в ньому відсутні. Проте, в зв'язку з тим, що через наявність в'язей шар залишається на дорожній основі, його потрібно розігнути і знову сумістити з нижньою основою. При його розгинанні в ньому можуть виникнути поперечні тріщини (рис. 1.3 в), які бувають нескрізними.

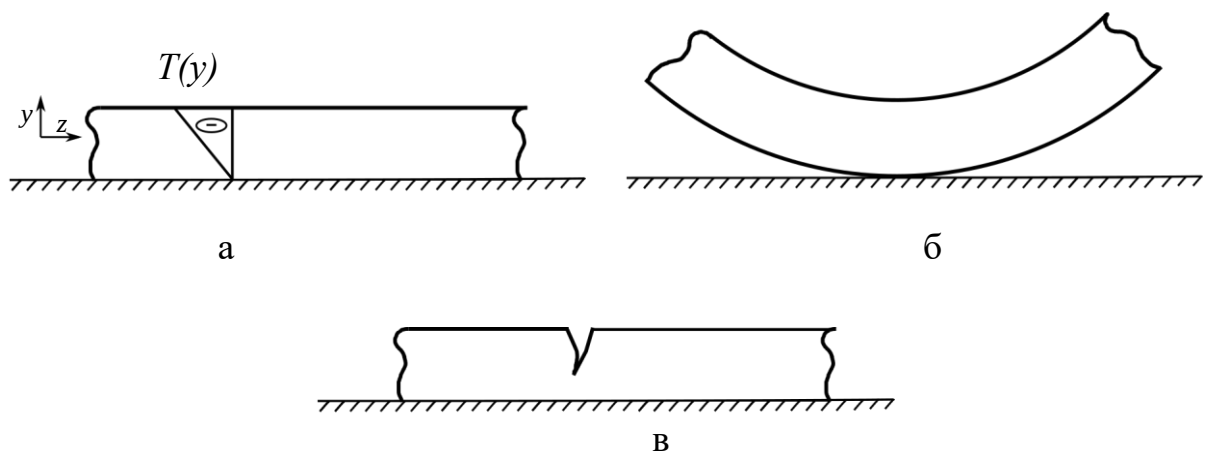


Рисунок 1.3 – Механізм утворення ненаскрізних поперечних тріщин в дорожньому покритті

Розрив шару на всю його глибину може відбуватися в результаті дії зовнішніх обмежень на кінцях (умовно, на нескінченності) дороги (рис. 1.4 а). В цьому випадку від'ємна температура (T) в тілі покриття при відсутності крайових в'язей привела б до виникнення в ньому поздовжніх

переміщень $w(z)$, які обчислюються за формулою (1.35). Проте через дію в'язей $w(z) = 0$, але натомість породжується поздовжня сила P , яка і може привести до поперечного скрізного розриву покриття. Після розриву покриття сила P зникає.

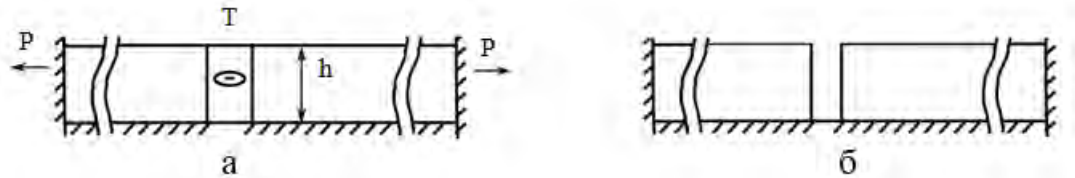


Рисунок 1.4 – Механізм утворення наскрізного поперечного розриву у верхньому шарі нескінченного покриття, спровокованого його затисканням на кінцях

В той же час результати експериментальних досліджень згинання балки, яка виготовлена із асфальтобетонної суміші, показали, що асфальтобетон може бути пошкоджений при охолодженні навіть у відсутності зовнішніх обмежень. В цьому випадку спрацьовує другий механізм руйнувань, який викликаний дією внутрішніх обмежень неоднорідного середовища (Internal Mechanism). Він може приводити до внутрішніх прихованих локалізованих дефектів, пошкоджень і руйнувань, завдяки різниці деформацій усадки між охолодженим бітумом і наповнювачем через різницю між значеннями їх коефіцієнтів об'ємного (β) і лінійного (α) термічного розширення.

В зв'язку з цим останнім часом була запропонована нова концепція, у відповідності до якої, однією із основних причин розтріскування блоків можуть бути саме внутрішні термодеоформації, які викликані термомеханічною несумісністю фаз композитного матеріалу. Відзначимо, що в науковій літературі, яка опрацьована автором, всі ці висновки формуються на рівні якісних експериментальних суджень, без аналітичних підтверджень. В роботах авторів [73, 153, 154] цей механізм підтверджується методами теорії термопружності на прикладах композитних

матеріалів з сферичними і волокнистими (циліндричними) включеннями.

Відзначимо, що тут доцільно виділити ще один (третій) механізм термопошкодження і руйнування пружних тіл. Він має місце, коли умови (1.32), (1.33) не виконуються і вектор-градієнт $grad T$ в (1.37) не залишається постійним вектором. В цьому випадку в пружному тілі також зароджуються термонапруження, які зі збільшенням вектора $grad T$ можуть приймати граничні значення. Ці ефекти типові для нестационарних термічних впливів з швидкими змінами температури середовища, які також можуть мати місце в конструкціях покриттів доріг і мостів. На побутовому рівні тут можна відмітити приклади руйнування скляного стакану при наливанні у нього кип'ятку. Скло стакану є однорідним матеріалом, на його переміщення не накладені ніякі зовнішні обмеження, але при наливанні кип'ятку температура в тілі стакану не встигає вирівнятися і розподілитися за законом (1.37), вектор градієнта $grad T$ не задовольняє умову

$$grad T = \overline{const} \quad (1.38)$$

і стакан руйнується. В той же час, якщо стакан тонкий, то градієнт температури малий і стакан не руйнується. Тут важливо зазначити, що в дійсності при експлуатації конструкцій в умовах зміни температур трапляються випадки, коли зумовлені ними терморуйнування намагаються ліквідувати шляхом локальних і нелокальних потовщень фрагментів системи. Зазвичай такі спроби призводять до негативних ефектів.

На додаток до всього необхідно підкреслити, що в конструкціях дорожніх покриттів ефект третього механізму не проявляється у формі, яка має вирішальне значення, але зате він є діючим через постійну зміну температури і сприяє термічній деградації матеріалу. Причому неоднорідність температурного поля і зміна його градієнта суттєво зростають

зі зменшенням коефіцієнта теплопровідності середовища, так як при його малому значенні температура тіла в нестационарних умовах не встигають вирівнятися (функція T не встигає стати гладкою) і це приводить до високоградієнтних напружень. Тому питання про те які теплопровідні властивості матеріалів дорожніх покриттів є більш (або менш) сприятливими для підвищення їх довговічності залишається відкритим і потребує подальшого вивчення.

Нелінійний характер зміни температури по товщині покриття ще більш ускладнює задачу про його термодеструкування. Для підтвердження цього судження розглянемо явище поширення тепла вглиб дорожнього масиву (вздовж координати x_2). Нехтуючи тепловими потоками в горизонтальному напрямі, запишемо рівняння нестационарної теплопровідності [9, 12] у вигляді

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (1.39)$$

Будемо вважати, що в результаті теплового збурення дорожнього масиву добовими змінам температури $T(x_2, t)$ на вільній поверхні $x_2 = 0$ покрив при денному нагріванні та нічному охолодженні температури на поверхні $x_2 = 0$ можна вважати відомою, тобто $T(0, t)$ ($0 \leq t \leq 24$ год). Врахуємо, що коефіцієнти теплопровідності матеріалів шарів покриття маленькі, обрана для аналізу товщина багат шарового покриття (розрахункова глибина масиву) не мала і розрахункова протяжність зміни зовнішньої температури (12 годин) порівняно мала. Тоді роль доданку в лівій частині рівняння (1.44) (друга похідна по x_2) набагато менша ролі доданку в його правій частині (перша похідна по t) і рівняння (1.44) також є сингулярно

збуреним. Зазначимо, що ця особливість рівнянь теплопровідності (рівнянь математичної фізики параболічного типу) широко відома в прикладній математиці і вона у повному обсязі відображена в науковій літературі [257]. В нашому випадку ця особливість проявляється в тому, що розв'язок задачі теплопровідності також має вигляд крайового ефекту, локалізованого в елементах покриття, прилеглих до його вільної поверхні. Також високоградієнтний розподіл температури $T(x_2, t)$ вглиб призводить до великих значень нормальних і дотичних напружень, що провокують розтріскування і розшарування верхніх шарів покриття. Вони підтверджені результатами комп'ютерного моделювання.

1.5 Термомеханічна подібність при експериментальному та теоретичному моделюванні термоміцності дорожніх матеріалів та конструкцій

Експериментальне чи теоретичне моделювання термоміцності дорожніх матеріалів та конструкцій зазвичай пов'язане з заміною вивчення ефекту, що нас цікавить, в натурі (прототипі) аналізом розв'язків відповідних математичних рівнянь або із розглядом аналогічного явища на експериментальній моделі меншого чи більшого масштабу в спеціальних лабораторних чи експериментальних умовах при повному або частковому дотриманні відповідності між фізичними властивостями об'єктів природи та моделі. Основний зміст моделювання полягає в тому, щоб за результатами математичних або експериментальних дослідів можна було робити висновки про поведінку системи в натурних умовах. Як правило, моделювання буває ґрунтоване на розгляді геометрично чи фізично подібних явищ деформування конструкцій. При цьому вважається, що два тіла геометрично подібні, якщо

відношення всіх відповідних довжин однакові, тобто, рівні коефіцієнту подібності чи масштабу.

Два явища фізично подібні, якщо за заданими характеристиками одного з них можна визначити характеристики другого з переходом від однієї системи одиниць до іншої. В результаті встановлення системи параметрів, що визначають виділений клас явищ, можна встановити умови подібності двох із них.

Задача визначення умов подібності для дорожніх матеріалів та конструкцій ускладняється, коли вони експлуатуються в умовах змінних температур, і число параметрів, для яких необхідно обчислювати масштабні коефіцієнти, збільшується. В даній роботі вони визначаються на базі теорії термопружності для геометричних характеристик, параметрів пружності (модуля Юнга, коефіцієнта Пуассона) та термічних параметрів (коефіцієнта лінійного температурного розширення, коефіцієнта теплопровідності). Умови подібності визначаються для функцій термопереміщення, термонапруження та температури. На конкретних прикладах показано також, що методи теорії подібності можуть бути інструментом для розв'язання прикладних задач.

При експериментальному та теоретичному моделюванні явищ деформування та міцності дорожніх матеріалів і конструкцій одним із основних факторів є забезпечення чисельної відповідності між деякими характеристиками моделі та прототипу. Для дорожніх матеріалів і конструкцій, які експлуатуються в умовах зміни температур, до таких характеристик можна віднести функції термонапружень і термдеформацій, які в значній мірі визначають термоміцність та довговічність цих систем. В загальному випадку, задача забезпечення достатніх умов подібності між моделлю та прототипом пов'язана з визначеними теоретичними труднощами,

оскільки потрібно мати справу зі суттєво неоднорідними (композитними) середовищами при їхніх лінійному та нелінійному термодетормуванні в умовах змінного за часом термо-в'язко-пружного зв'язку між інваріантами тензорів деформацій. Цією обставиною можна пояснити відсутність в науковій літературі публікацій за даним напрямком. Тому, враховуючи, що теорія подібності дозволяє не тільки встановлювати відповідність між експериментальними та теоретичними моделями та прототипом, але й розв'язувати конкретні прикладні задачі, можна зробити висновок про актуальність розробки її основних положень для дорожніх матеріалів та конструкцій.

Перші теоретичні розробки по теорії подібності відносяться до математики. Огляд публікацій за цим напрямком поданий в статті [103]. В біології елементи теорії подібності використовувались для встановлення геометричної відповідності образів біологічних об'єктів [281]. Методи теорії подібності, розроблені в механіці [252, 264], використовуються в теорії в'язких рідин, газовій динаміці, теорії турбулентності, астрофізиці й атомній енергетиці. В останні роки теорія подібності стала застосовуватись у нових наукових напрямках, які пов'язані з проблемами комп'ютерного бачення, теорії розпізнавання образів, із обробкою мов, із класифікацією амінокислот [289] та в теорії навчання [95] і [289].

До задач моделювання термоміцності дорожніх матеріалів і конструкцій найбільш близьке дотикання мають результати, отримані в теорії подібності термопружних систем [128, 146, 148, 172]. Однак їх безпосереднє використання стримується вузькістю їх застосовності лише для однорідних пружних середовищ, які описуються співвідношеннями теорії термопружності [32, 33, 41, 169, 219], в той час як дорожні конструкції є суттєво неоднорідними. Встановлення для них масштабних коефіцієнтів за

параметрами геометрії, модуля пружності, коефіцієнта Пуассона, коефіцієнта лінійного термічного розширення та коефіцієнта теплопровідності виявилось можливим за допомогою аналітичних розв'язків задач про термодформування середовищ, армованих стрижневими та сферичними включеннями, отриманих в роботах [12, 73, 153, 154].

Метою даного дослідження є встановлення законів подібності термопружного деформування дорожніх матеріалів та конструкцій із урахуванням термомеханічної неоднорідності їх структур. Її завдання включає визначення масштабних коефіцієнтів та розв'язання за їх допомогою прикладної задачі про розшарування багатошарового дорожнього покриття.

1.5.1 Критерії подібності термопружного деформування однорідних середовищ

Звернемось спочатку до загальних питань подібності. Нехай явище в деякій системі визначається n параметрами, деякі з яких можуть бути безрозмірними. Покладемо, що розмірності визначальних змінних та фізичних постійних виражені з них через розмірності k ($k \leq n$) із незалежними розмірностями. В цьому випадку з n величин можна скласти $n-k$ незалежних безрозмірних комбінацій і всі безрозмірні характеристики явища розглядати як функції цих $n-k$ незалежних безрозмірних комбінацій. Відтак, поміж всіх безрозмірних величин, складених із характеристик явища, завжди можна вказати деяку базисну систему, тобто систему безрозмірних величин, яка визначає собою всі інші. Ця система визначає подібність прототипу та моделі за допомогою наступної умови [252]. Для подібності двох явищ необхідно та достатньо, щоб чисельні значення безрозмірних комбінацій, що утворюють базу, в цих двох явищах були однакові. Умови

про постійність бази, складеної з даних величин, називаються критеріями подібності.

Якщо умови подібності виконані, то для фактичного розрахунку всіх характеристик в натурі за даними про розмірні характеристики на моделі необхідно знати перехідні масштаби для всіх відповідних величин. Якщо явище визначається n параметрами, з яких k мають незалежні розмірності, то для величин з незалежними розмірностями перехідні масштаби можуть бути довільними й їх можна задати враховуючи умови задачі, а при експериментах, також враховуючи умови дослідів. Перехідні масштаби для всіх інших розмірних величин легко отримуються з формул, які виражають розмірності кожної величини через розмірності k величин з незалежними розмірностями, для яких масштаби підказані умовами досліду та постановки задачі.

Основні закони теорії подібності мають братися до уваги також при математичному та експериментальному дослідженні термомеханічного деформування дорожніх та мостових покриттів. В процесі експлуатації їх конструкції піддаються впливу транспортних навантажень і теплових стаціонарних або перехідних збурень. Зазвичай напруження, що викликане механічними навантаженнями, з тією або іншою точністю легко визначаються теоретичними або експериментальними методами. В цих випадках, якщо знайдені і термонапруження, то для лінійного процесу загальні напруження знаходяться методом суперпозиції. При цьому однак, термомеханічні задачі виявляються набагато складнішими чисто механічних задач і їх аналітичні розв'язки вдається отримати тільки в випадках нескладної геометрії та простого термічного збурення. У зв'язку з цим при більш загальних постановках про моделювання термодформування конструкції ці дослідження повинні проводитися із врахуванням законів

подібності між прототипом та моделлю.

Звернемось на початку до найбільш простої задачі про визначення масштабних множників для параметрів температури, переміщень, відносних деформацій та напружень при геометричній подібності прототипу та моделі в умовах квазі-статичної зміни температури та деформацій. Покладемо, що при цьому всі механічні та термічні константи системи залишаються незмінними. В якості базових співвідношень теорії термопружності використаємо рівняння Нав'є [12, 32, 33] в системі координат $Ox_1x_2x_3$

$$\begin{aligned} \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u_1 + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) &= (3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial x_1}; \\ \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u_2 + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) &= (3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial x_2}; \\ \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u_3 + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) &= (3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

які описують деформування прототипу при визначеній геометрії, поле температур $T(x_1, x_2, x_3)$ та заданих крайових умов для переміщень u_1, u_2, u_3 . Тут λ, μ – параметри пружності Ламе, α – коефіцієнт лінійного термічного розширення.

Будемо вивчати термопружне деформування прототипу за допомогою теоретичної або експериментальної моделі, геометрично подібної прототипу з коефіцієнтом подібності l , при умові зберігання крайових умов на відповідних ділянках країв моделі та значенні температури T у відповідних точках. Для аналізу використаємо масштабовану систему координат $O(X_1, X_2, X_3)$, в якій $X_1 = lx_1, X_2 = lx_2, X_3 = lx_3$. В цій системі термопружні переміщення $U_1(X_1, X_2, X_3), U_2(X_1, X_2, X_3), U_3(X_1, X_2, X_3)$ описуються

рівняннями

$$\begin{aligned} \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_3^2} \right) U_1 + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial X_1} \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_1} + \frac{\partial U_2}{\partial X_2} + \frac{\partial U_3}{\partial X_3} \right) &= (3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial X_1}; \\ \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_3^2} \right) U_2 + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial X_2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_1} + \frac{\partial U_2}{\partial X_2} + \frac{\partial U_3}{\partial X_3} \right) &= (3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial X_2}; \\ \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_3^2} \right) U_3 + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial X_3} \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_1} + \frac{\partial U_2}{\partial X_2} + \frac{\partial U_3}{\partial X_3} \right) &= (3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial X_3}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

В цих рівняннях зробимо заміни $X_1 = lx_1$, $X_2 = lx_2$, $X_3 = lx_3$ та помножимо ліві й праві частини на l^2 . В результаті отримаємо систему

$$\begin{aligned} \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) U_1 + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right) &= l(3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial x_1}; \\ \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) U_2 + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right) &= l(3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial x_2}; \\ \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) U_3 + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right) &= l(3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

яка повністю еквівалентна системі (1.41), але відрізняється від системи (1.40) тільки написаннями шуканих змінних u_1 , u_2 , u_3 і U_1 , U_2 , U_3 та множником l в правих частинах системи (1.42). Звідси випливає

$$\begin{aligned} U_1(X_1, X_2, X_3) &= lu_1(x_1, x_2, x_3); \\ U_2(X_1, X_2, X_3) &= lu_2(x_1, x_2, x_3); \\ U_3(X_1, X_2, X_3) &= lu_3(x_1, x_2, x_3), \end{aligned} \quad (1.43)$$

тобто переміщення в моделі також геометрично подібні переміщенням в

прототипі з масштабним множником l .

При цьому відносні деформації e_{ii} , e_{ij} в моделі рівні

$$\begin{aligned} e_{ii} &= \frac{\partial U_i}{\partial X_i} = \frac{\partial l u_i}{\partial l x_i} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \varepsilon_{ii}; \\ e_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial l u_i}{\partial l x_j} + \frac{\partial l u_j}{\partial l x_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \varepsilon_{ij}. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Як видно, відносні деформації у відповідних точках прототипу та моделі рівні.

Оскільки у виразі для термонапружень в прототипі

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + [\lambda I_1 - (3\lambda + 2\mu)\alpha T] \delta_{ij}, \quad (1.45)$$

права частина є лінійною комбінацією відносних деформацій в прототипі, що зберігають свої значення в моделі, та доданку з αT , також не змінного в моделі, то термонапруження (1.45) також співпадають з термонапруженнями S_{ij} у відповідних точках моделі, тобто

$$S_{ij}(X_1, X_2, X_3) = \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3); \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (1.46)$$

Звернемось тепер до рівняння нестационарної теплопровідності прототипу у формі

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1.47)$$

де a – коефіцієнт температуропровідності.

Нехай вибрана модель геометрично подібна прототипу з масштабним коефіцієнтом l . Визначимо масштабний множник θ в модельному часі τ , з плином якого поле температури $T(X_1, X_2, X_3, \tau)$ в точках моделі співпадають з полем температури $T(x_1, x_2, x_3, t)$ у відповідних точках прототипу при часі $\tau = \theta t$.

Для цього запишем рівняння (1.47) у змінних моделі

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial X_3^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau}. \quad (1.48)$$

Врахуємо, що $X_1 = lx_1$, $X_2 = lx_2$, $X_3 = lx_3$, $\tau = \theta t$.

Тоді рівняння (1.48) можна привести до виду

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial X_3^2} = \frac{l^2}{\theta} \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (1.49)$$

Звідси випливає, що величину θ вибрати рівною

$$\theta = l^2, \quad (1.50)$$

то рівняння (1.49) процесу нестационарної теплопровідності в моделі прийме форму рівняння (1.47) теплопровідності в прототипі і значення температури у відповідних точках (x_1, x_2, x_3) і (X_1, X_2, X_3) прототипу та моделі у відповідні моменти часу t і τ будуть однакові.

При цьому необхідно відмітити, що в приведених розмірковуваннях припускається, що відповідні умови подібності виконуються і для крайових і

для початкових умов задачі. У випадках, коли на краях прототипу задані змінні за часом функції температури $T(x_1, x_2, x_3, t)$ та теплові потоки, то крайові та початкові умови в моделі формулюються елементарно з тими ж коефіцієнтами подібності l і θ . Однак, якщо в прототипі вільні поверхні з умовами конвективного теплообміну або в середині пружного середовища є теплові джерела та стоки, то умови термопружної подібності в цих випадках значно ускладнюються і вони мають розглядатися спеціально. В нашому випадку вони не досліджуються.

В кінці цього підрозділу відмітимо, що наведені умови температурної подібності можуть бути використані не тільки при експериментальному моделюванні явищ термопружного деформування, але також і для пояснення деяких спеціальних термопружних ефектів. Наприклад, при теоретичному аналізі розшарування дорожніх покриттів в крайових зонах, при узагальненні отриманих результатів на неоднорідні макро – та мікрровключення, при експериментальному моделюванні швидко плинних нестационарних термічних процесів і в інших випадках при моделюванні явищ термопружності.

1.5.2 Умови термомеханічної подібності для армованих композитних середовищ

Нехай асфальтобетонне чи цементобетонне середовище армоване стрижнями та температура системи дорівнює T . В роботах [73, 153, 154] показано, що додаткові внутрішньоструктурні термонапруження, що викликані несумісністю термомеханічних параметрів фаз системи, локалізуються на її інтерфейсних поверхнях та спадають обернено пропорційно квадрату відстані від елемента, що розглядається, до осі

стрижня. Тому для аналізу термодформування системи можна виділити один стрижень радіуса r_1 та розглядати його плоскодеформований стан в полярній системі координат $Or\varphi$, де r – радіальна координата, φ – колова координата. Для стрижня 1 параметри термопружності складають: модуль пружності E_1 , коефіцієнт Пуассона ν_1 , коефіцієнт лінійного температурного розширення α_1 ; для матриці 2 вони дорівнюють E_2 , ν_2 , α_2 .

Тоді радіальні переміщення $u^{(1)}(r)$ в стрижні 1 і $u^{(2)}(r)$ в матриці 2 рівні

$$\begin{aligned} u^{(1)}(r) &= rT \left(\frac{E_1 \alpha_1}{1-2\nu_1} + E_2 \alpha_2 \right) \bigg/ \left[\frac{E_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} + \frac{E_2}{(1+\nu_2)} \right]; \quad (r \leq r_1); \\ u^{(1)}(r) &= r(1+\nu_1)\alpha_2 T + \frac{r_1^2 T}{r} \left(\frac{\alpha_1}{1+\nu_2} - \frac{\alpha_2}{1+\nu_1} \right) \bigg/ \left[\frac{1}{1+\nu_1} + \frac{E_2}{E_1} \frac{(1-2\nu_1)}{(1+\nu_2)} \right]; \quad (r \geq r_1). \end{aligned} \quad (1.51)$$

Відповідні значення радіальних $(\sigma_r^{(1)}(r), \sigma_r^{(2)}(r))$ та колових $(\sigma_\varphi^{(1)}(r), \sigma_\varphi^{(2)}(r))$ термонапружень визначаються рівностями:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)}(r) &= \sigma_\varphi^{(1)}(r) = -\frac{E_1 E_2 [(1+\nu_1)\alpha_1 - (1+\nu_2)\alpha_2] T}{E_1(1+\nu_2) + E_2(1+\nu_1)(1-2\nu_2)}; \quad (0 \leq r \leq r_1); \\ \sigma_r^{(2)}(r) &= -\frac{r_1^2}{r^2} \frac{E_1 E_2 [(1+\nu_1)\alpha_1 - (1+\nu_2)\alpha_2] T}{E_1(1+\nu_2) + E_2(1+\nu_1)(1-2\nu_2)}; \quad (r \geq r_1); \\ \sigma_\varphi^{(2)}(r) &= \frac{r_1^2}{r^2} \frac{E_1 E_2 [(1+\nu_1)\alpha_1 - (1+\nu_2)\alpha_2] T}{E_1(1+\nu_2) + E_2(1+\nu_1)(1-2\nu_2)}; \quad (r \geq r_1). \end{aligned} \quad (1.52)$$

Рівняння (1.51), (1.52) дозволяють встановити умови геометричної подібності. Так, якщо в прототипі з радіальною координатою r і з радіусом

r_1 стержня 1 при температурі T радіальні переміщення $u^{(1)}(r)$ та $u^{(2)}(r)$ визначаються рівняннями (1.51), то в моделі з радіусом стержня 1, що дорівнює R_1 , переміщенням $U^{(1)}(R)$, $U^{(2)}(R)$, у відповідності до (1.51), рівні

$$\begin{aligned} U^{(1)}(R) &= \frac{R_1}{r_1} u^{(1)}\left(\frac{r_1}{R_1} R\right); \quad (0 \leq R \leq R_1); \\ U^{(2)}(R) &= \frac{R_1}{r_1} u^{(2)}\left(\frac{r_1}{R_1} R\right); \quad (R_1 \leq R). \end{aligned} \quad (1.53)$$

Тому при таких умовах переміщення в прототипі та моделі геометрично подібні з масштабним множником

$$l = \frac{R_1}{r_1} \quad (1.54)$$

і замість (1.53) можна записати

$$U^{(1)}(R) = l u^{(1)}(r); \quad U^{(2)}(R) = l u^{(2)}(r). \quad (1.55)$$

На відміну від випадку подібності за модулем пружності E для однорідних середовищ, в даному випадку для збереження відповідності між прототипом та моделлю, якщо змінюється модуль пружності однієї з фракцій, то необхідно в такій пропорції змінювати модуль пружності іншої фракції. При цьому, як випливає з (1.51), (1.52), їх змінні значення склали

$$e_1 = \varepsilon E_1; \quad e_2 = \varepsilon E_2, \quad (1.56)$$

то функції переміщень у відповідних точках прототипу та моделі будуть однакові, а щоб отримати напруження в моделі, необхідно напруження в прототипі помножити на масштабний коефіцієнт ε .

Умови подібності за параметрами α_1 і α_2 також мають встановлюватись сумісно. Якщо в моделі їх нові значенні рівні

$$A_1 = a\alpha_1; \quad A_2 = a\alpha_2, \quad (1.57)$$

то значення переміщень і напружень в моделі визначаються множенням їх значень в прототипі на масштабний коефіцієнт a .

Так як температура T в рівняння (1.51), (1.52) входить лінійно, то для неї масштабний коефіцієнт дорівнює одиниці. Інакше складається справа з коефіцієнтом Пуассона ν . Для нього масштабний коефіцієнт відсутній.

Встановлені закони термопружної подібності дозволяють зробити важливі висновки про те, що формули (1.51), (1.52) прийнятні як для конструкцій, армованих стрижнями невеликого радіуса r_1 , так і для композитів, армованих мікрОВОлокнами, за умови, що матриця та волокна володіють властивостями суцільності та для них справедлива теорія пружності. Крім того, на їх основі можна переходити від прототипів великих розмірів до моделей малих розмірів з дотриманням відповідності між ними.

1.5.3 Теоретичне моделювання ефекту розшарування шаруватих композитів

Використовуючи методи теорії подібності, є можливість пояснення широко відомого ефекту розшарування шаруватих композитів в зоні їх вільного краю [191, 222, 251, 284]. В роботах [191, 222] відмічається, що це

негативне явище все ще залишається проблемою в теорії композитів і одним із способів її пом'якшення є скошування товщини композиту (утворення фаски) на його краю.

Аналогічний ефект виникає в дорожніх та мостових покриттях в результаті різниці коефіцієнтів лінійного температурного розширення покриття 1 та основі 2 (рис. 1.5).

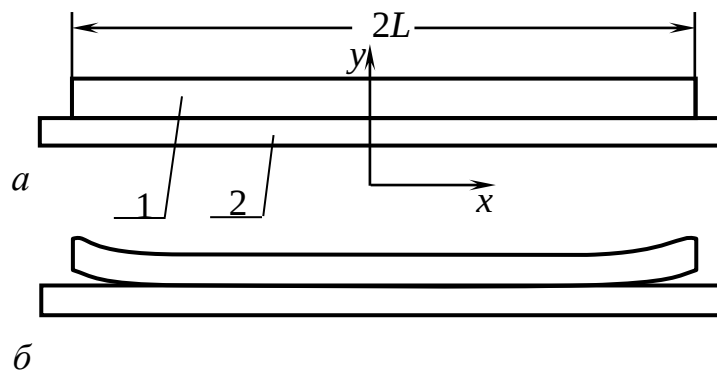


Рисунок 1.5 – Схема поперечного перерізу асфальтобетонного покриття в вихідному (а) та розшарованому (б) станах.

В якості прикладу розглянемо, коли асфальтобетонний шар 1 товщиною $h_1 = 0,07$ м пов'язаний з металевою основою 2 товщиною $h_2 = 0,014$ м. Значення термомеханічних параметрів системи склали: $E_1 = 5 \cdot 10^9$ Па, $\nu_1 = 0,2$, $\alpha_1 = 2,46 \cdot 10^{-5}$ $1/^\circ\text{C}$, $E_2 = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu_2 = 0,3$, $\alpha_2 = 1,3 \cdot 10^{-5}$ $1/^\circ\text{C}$. Термонапружений стан плоского фрагменту лівого краю цієї системи протяжністю 7,5 м вздовж осі Ox при температурі $T = -25^\circ\text{C}$ було визначено методом скінченного елемента. На рис. 1.6 виділено поле дотичних напружень τ_{xy} на правій ділянці системи довжиною 0,2 м. Як видно на більшій частині виділеного перерізу дотичні напруження мають майже нульові значення, і тільки поблизу лівого краю системи в її інтерфейсній зоні сформувалась площадка розміром приблизно $1,5 \text{ см} \times 2 \text{ см}$, в якій ці напруження мають пікові значення, які є основною причиною виникнення

пластичних зсувних деформацій між шарами.

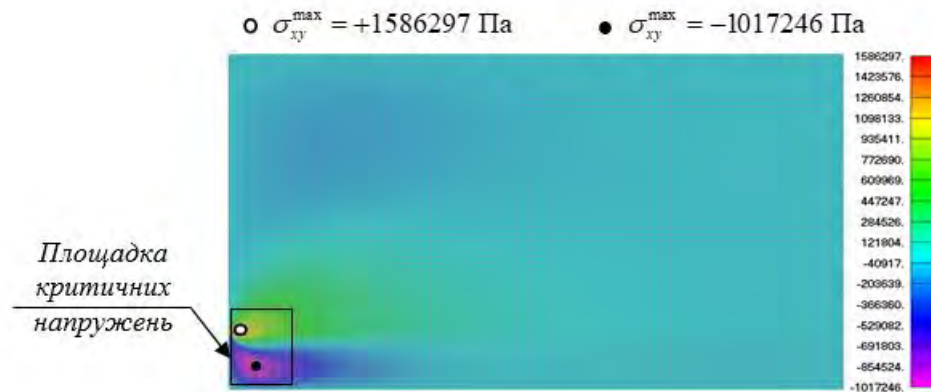


Рисунок 1.6 – Поле дотичних напружень σ_{xy} в крайовому перерізі двошарової конструкції

В цьому випадку, якщо протяжність зони пластичності матеріалу покриву виявляється достатньою для компенсації пластичних деформацій верхнього шару, то система зберігає свою цілісність, якщо ні, то у тому місці виникає відшарування верхнього шару. При цьому необхідно відзначити, що в результаті багатократних змін температури та додаткових дій транспортних навантажень ймовірність виникнення локальних зсувних пошкоджень на цій ділянці зростає.

Підкреслимо також, що спроба запобігання такого ефекту за рахунок збільшення товщини верхнього шару в l раз, призведе також до негативних наслідків, оскільки за умовами геометричної подібності термонапруження у відповідних точках нової моделі збережуть свої (критичні) значення, площадка пластичних деформацій збільшиться в l^2 разів та запасу пластичної плинності матеріалу вже буде недостатньо. І навпаки, до більш позитивного результату приведе зменшення товщини шару, оскільки, хоча при цьому зсувні напруження у відповідних точках нової моделі не зміняться, площадка критичних значень зменшиться в l^2 разів.

Однак за умовами експлуатації товщина h_1 верхнього шару на проїзній

частині дороги має бути збережена, тому можна рекомендувати її поступове зменшення на крайових ділянках та її доведення до нуля на самих краях (рис. 1.7).

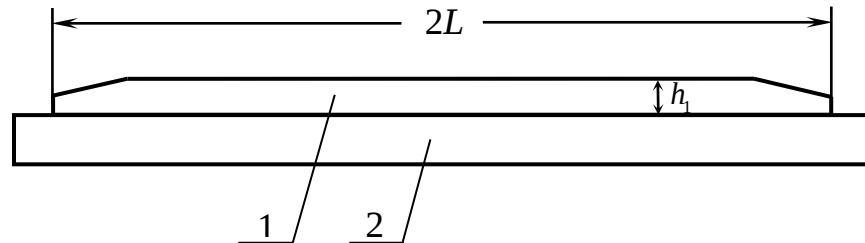


Рисунок 1.7 – Схема дорожнього покриття зі скошеними краями

Тоді розміри площадки критичних напружень на краях обернуться на нуль, а разом із нею зникнуть і самі напруження. Відмічений ефект узгоджується з ефектом усунення явища розшарування шаруватих композитів за рахунок створення на їх краях фасок.

1.6 Використання приведених параметрів теорії термопружності для розв'язання термо-в'язко-пружних задач

В попередніх підрозділах викладені основні положення теорії термопружності. Вона з гарною точністю описує пружне деформування цементобетонних дорожніх покриттів, в той же час як асфальтобетонні покриття (особливо при додатних температурах) проявляють властивості в'язкопружних середовищ.

Теорія лінійної в'язкопружності є узагальненням таких розділів механіки суцільного середовища, як теорія пружності і гідромеханіка в'язкої рідини. Різні матеріали володіють трьома основними властивостями: пружністю, пластичністю і в'язкістю [8, 29, 35, 113, 194, 278].

У багатьох випадках розрахунку конструкцій, елементи яких проявляють термо-в'язко-пружні властивості, зустрічаються суттєві складнощі як при отриманні аналітичних залежностей, так і при їх чисельній реалізації в інженерних розрахунках. Задача визначення напружено-деформованого стану та розрахунку на міцність лінійно в'язко-пружної конструкції описується системою інтегро-диференціальних рівнянь (інтегральних за часом і диференціальних за просторовими координатами). Відмінною особливістю формулювання крайових задач в'язкопружності є яскраво виражений часовий характер параметрів, що визначають напружено-деформований стан. При розв'язанні крайових задач дана обставина проявляється як необхідність урахування у часі всієї історії зміни компонент тензорів напружень або деформацій. Для лінійних задач таке врахування дозволяє реалізувати інтегральний оператор типу Вольтерра II роду на деяку функцію часу [280]. Ядро оператора задовольняє гіпотезі загасаючої пам'яті, згідно з якою дія впливів, проявлених у віддалені моменти історії значно менше, ніж від впливів, проявлених в близькі моменти до часу спостереження. Гіпотезу загасаючої пам'яті розглядають як аналог принципу локальної дії для склерономних тіл. Згідно з цим принципом, на напружений стан в точці простору найбільш сильний вплив надають лише процеси, що протікають в близьких до неї точках.

При дослідженні дорожніх конструкцій Б.С. Радовським, В.В. Мозговим, Б.Б. Телтаєвим та співавторами були отримані точні та наближені розв'язки задач з визначення напружено-деформованого стану конструкції дорожнього одягу як шаруватого в'язко-пружного безінерційного напівпростору з довільним скінченим числом ізотропних і однорідних шарів при дії рухомих транспортних засобів [50-52, 240-243]. Але, як свідчить практичний досвід, значна громіздкість отриманих аналітичних залежностей практично виключає можливість широкого використання їх для інженерних

розрахунків.

При дослідженні напружено-деформованого стану в'язко-пружного тіла можуть бути використані розв'язання задачі про пружне деформування такого тіла, перебудовані на базі принципу відповідності розв'язань задач теорії пружності і в'язкоружності. Цей принцип полягає в тому, що основні рівняння задачі для в'язко-пружного тіла після виконання інтегрального перетворення (Фур'є або Лапласа) за часом стають аналогічними вихідним рівнянням відповідної задачі теорії пружності, в якій пружні характеристики замінені відповідними функціями релаксації або повзучості. В цьому випадку із відомого розв'язку задачі теорії пружності можна отримати розв'язання відповідної задачі для в'язко-пружного тіла у вигляді зображень Фур'є або Лапласа після виконання оберненого перетворення Фур'є або Лапласа.

Принцип відповідності через перетворення Фур'є сформульований W.T. Read в 1950 р. [245]. За допомогою перетворення Лапласа, його заснували R. Sips в 1951 р. [164] і E.H. Lee в 1955 р. [192]. Описані методики його практичного використання можна знайти в роботах G.H. Paulino і Z.-H. Jin (2001) [225] і L. Khazanovich (2008) [186].

Основним недоліком, як операційного методу, так і перетворень Лапласа [29, 52, 241], є та обставина, що для його використання необхідно мати в розпорядженні явну залежність пружного рішення від матеріальних констант. Це можливо далеко не у всіх практичних випадках. У своїй більшості рішення пружних задач містять тільки чисельну залежність від матеріальних констант.

Як показано в роботах багатьох дослідників розрахунки, що проводяться в рамках спадкової механіки твердих тіл, пов'язані з необхідністю обліку історії зміни напружень і деформацій у часі, що в значній мірі ускладнює їх чисельну реалізацію. Спроби обійти цю проблему робилися різними авторами за допомогою різноманітних наближених

методів.

В.Г. Карнаухов звертає увагу на доцільність використання достатньо простого підходу квазіпружних рішень Р. Шепері, де залежні від часу ефективні характеристики можуть бути знайдені квазіпружним методом. Відповідно до цього методу у термопружному рішенні модулі пружності заміняють функціями релаксації, значення яких відповідають результатам їх обчислення при розрахункових часу дії навантаження та температури. Тобто необхідно замінити пружні характеристики відповідними модулями релаксації і в'язко-пружними податливостями. Ґрунтуючись на математичних аспектах цього методу, а також на результатах, отриманих Шепері і Сімсоном при його застосуванні, вважають, що в більшості випадків точність методу цілком задовольняє звичайним інженерним вимогам. Підтвердженням цьому є результати досліджень конструкцій дорожніх одягів, отримані в роботах Б.С. Радовського, О.Ю. Мозгового, Б.Б. Телтаєва та інших авторів. У цих дослідженнях було показано, що урахування термо-в'язко-пружних властивостей дорожньо-будівельних матеріалів здійснюється за допомогою застосування спрощеного методу квазіпружної апроксимації, використовуючи метод Р. Шепері. При цьому, як було показано у дослідженнях Б.С. Радовського, результати розрахунків мають достатньо гарну збіжність при заміні термо-в'язко-пружних характеристик на пружні, що визначені при відповідних розрахункових температурах та часі дії навантаження [8, 4, 29, 50-52, 241].

Таким чином, застосування спрощеного методу квазіпружної апроксимації дає змогу з певною точністю для інженерних розрахунків використовувати рішення теорії термопружності для розв'язання термо-в'язко-пружних задач у дослідженнях конструкцій дорожніх одягів

1.7 Висновки до розділу 1

У розділі 1 виконано аналіз механічних і математичних особливостей проблеми термопружного деформування багатошарових дорожніх покриттів. Поданий огляд представлених в науковій літературі результатів досліджень, пов'язаних з постановкою задачі про теоретичне моделювання термопружного деформування. Побудовано теоретичну модель термопружного деформування багатошарових дорожніх покриттів в декартовій системі координат.

1. Розглянуті умови відсутності і зародження термонапружень в тілах, що деформуються. Виділені три основні причини порушення умов вільного термодформування пружних тіл, що призводять до генерування в них термонапружень. До них відносяться накладені зовнішні в'язі, структурна неоднорідність тіла і термомеханічна несумісність параметрів його компонент, а також поля температури зі змінними градієнтами. Наведені приклади реалізації зовнішнього, внутрішнього та градієнтного механізмів генерування термонапружень. Дані рекомендації щодо зниження їх впливу на термопошкодження конструкцій.

2. На базі співвідношень теорії термопружності встановлені умови геометричної та механічної подібності між прототипом і моделлю в дорожніх конструкціях та матеріалах. Знайдені масштабні коефіцієнти для геометричних параметрів, модулів пружності та коефіцієнтів лінійного термічного розширення неоднорідних матеріалів, що забезпечують подібність для функцій переміщень та рівностей функцій термонапружень у відповідних точках прототипу та моделі. За допомогою умов теорії подібності дано пояснення ефекту термічного розшарування дорожнього покриття, запропонований спосіб його недопущення.

3. Результати досліджень даного розділу викладено у наступних публікаціях [12, 13, 24, 45, 54, 71, 73, 78, 82, 137].

РОЗДІЛ 2

КОНЦЕНТРАЦІЯ ТЕРМОНАПРУЖЕНЬ В ШАРУВАТИХ КОНСТРУКЦІЯХ ДОРОЖНЬОГО ОДЯГУ

2.1 Задачі з крайовим ефектом

2.1.1 Теплові удари і високоградієнтні поля температури

В розділі 1 виділено три основні механізми зародження термонапружень в пружному середовищі. У відповідності до третього (градієнтного) механізму, якщо в однорідному середовищі, вільному від зовнішніх обмежень (в'язей), вектор градієнт поля температури залишається незмінним по всій області, тобто

$$\text{grad } T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} = \overrightarrow{\text{const}}, \quad (2.1)$$

де

$$T(x, y, z) = a + bx + cy + dz, \quad (2.2)$$

то середовище вільно деформується і термонапруження в ньому дорівнює нулю. В рівності (2.1)

$$\frac{\partial T}{\partial x} = b, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = c, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = d, \quad (2.3)$$

де b, c, d – константи.

Дійсно, в цьому випадку переміщення

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \alpha \left[(a + bx + cy + dz)x - \frac{b}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \right]; \\ v(x, y, z) &= \alpha \left[(a + bx + cy + dz)y - \frac{c}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \right]; \\ w(x, y, z) &= \alpha \left[(a + bx + cy + dz)z - \frac{d}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \right]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

З їх допомогою можна обчислити термонапруження в пружному середовищі

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + [\lambda I_1 - (3\lambda + 2\mu)\alpha T] \delta_{ij}. \quad (2.5)$$

Де

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \varepsilon_{33} &= \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); & \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right); \\ \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right); & I_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Підставляючи рівності (2.4) в (2.6), отримаємо

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} &= \alpha(a + bx + cy + dz); \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} &= 0; \\ I_1 &= 3\alpha(a + bx + cy + dz). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Використовуючи співвідношення (2.7) в рівності (2.5), маємо

$$\sigma_{ij}(x,y,z)=0, \quad (i,j=\overline{1,3}). \quad (2.8)$$

Таким чином, якщо температура $T(x,y,z)$ змінюється лінійно за просторовими координатами x,y,z , то вектор градієнт $grad T$ в (2.1) залишається незмінним по всій області, зайнятій однорідним середовищем, і термонапруження (2.19) в ній дорівнюють нулю. При всіх інших законах розподілення температури $T(x,y,z)$ в середовищі генеруються термонапруження, причому їх значення зростають зі збільшенням її градієнту і збільшенням швидкості його зміни вздовж просторових змінних x,y,z . У зв'язку з цим в механіці термоміцності велика увага приділяється так званому ефекту теплового удару, при якому температура на деякій ділянці граничної поверхні або всередині області миттєво змінюється на скінченну величину. В цих випадках зазвичай різні значення температури в найближчих точках середовища, обумовленого його градієнтом, призводять до різних розширень або усадок його елементів, які викликають підвищені пластичні деформації в пластичних середовищах і тріщиноутворення в крихких тілах.

Зазначимо, що, як правило, в конструкціях покривів доріг та мостів явища теплових ударів в чистому вигляді не реалізуються внаслідок порівняно згладжених режимів добових змін температури. Проте навіть в цих випадках, через низькі значення коефіцієнту теплопровідності матеріалів покриву, температура в них не встигає вирівнюватися вздовж товщини верхніх шарів і її функція набуває вигляд з ділянками швидкої (з великими градієнтами) та повільної (з малими градієнтами) зміни. Нескладно зробити висновок, що для зменшення вектора градієнта температури $T(x,y,z)$

необхідно або більш повільно змінювати температуру зовнішнього термічного джерела, або збільшити швидкість згладження температури в середовищі за рахунок збільшення її коефіцієнту теплопровідності.

Одним із способів зменшення температурних градієнтів та їх згладження, які застосовуються в енергомашинобудуванні, є повна або блокова ізоляція конструкції енергетичної установки. В цьому напрямку інженери розробили різноманітні термоізолятори, які базуються на застосуванні волокон фібергласу, мінералів, бавовни, целюлози, поліуретану, поліефіру, а також пінистих матеріалів. Питання про застосування цієї методики в будівництві доріг та мостів на даний час ще не вивчене та потребує спеціального розгляду.

Зазначимо, що до числа матеріалів, які в найбільшій мірі піддаються негативному впливу ударних та швидких температурних змін на їх міцність, можна віднести кераміки, скельні породи та скло, яке володіє найгіршими властивостями теплопровідності, термічного розширення та характеристик пружності.

Серед тіл, які займають лідерські позиції за теплопровідними властивостями, перше місце належить алмазу, його коефіцієнт теплопровідності в п'ять разів більше цього коефіцієнту у міді. Атоми алмазу складають простий карбоновий каркас, який є ідеальною молекулярною структурою для ефективної теплопередачі.

Слідом за міддю в ряду з найкращими показниками теплопровідності розміщуються алюміній, графіт, золото та ін. Найгіршими показниками теплопровідності володіють свинець, скло, вода.

Великий вплив на термостійкість середовищ здійснює значення їх коефіцієнту лінійного (плаского та об'ємного) термічного розширення. Для більшості конструктивних матеріалів цей коефіцієнт мало залежить від температури. Проте є середовища, для яких властивості термічної зміни

об'єму піддаються навіть якісним змінам з варіацією температури. Наприклад, для води при $T = 4^{\circ}\text{C}$ цей коефіцієнт дорівнює нулю. При відхиленні температури від цього значення в той чи інший бік він набуває додатне або від'ємне значення. Подібною властивістю володіє також гума, з тією відмінністю, що при підвищених температурах її коефіцієнт розширення багатократно збільшується у зв'язку з тим, що вода, яка знаходиться в її порах та капілярах, перетворюється на пару та багатократно збільшує свій об'єм.

Зазначені особливості Градієнтного Механізму зародження термонапружень в пружних середовищах дозволяють зрозуміти причини надзвичайного опору армованої структури карбон-карбон тепловим ударам. Справа в тому, що графіт має властивість дуже високої теплопровідності, у нього низький коефіцієнт термічного розширення, а карбонові волокна володіють високою міцністю та здатністю зупиняти тріщини.

2.1.2 Задачі термопружності з крайовим ефектом

Розглянута в даній роботі система диференціальних рівнянь пружного згину шаруватих дорожніх покриттів і теплопровідності належить до класу сингулярно збурених задач. При цьому складність розв'язування цих рівнянь істотно перевершує складність сингулярно збурених рівнянь, відомих в науковій літературі. По-перше, це зумовлено тим, що в задачах дорожнього будівництва механіка пружного згину покриття (умовно, балки на пружній основі) описується рівняннями не другого, а четвертого порядку, і відрізок інтегрування L досягає великих значень. Тому параметр ε при старшій (четвертій) похідній при масштабуванні відрізка інтегрування L до одиниці набуває значення $\varepsilon = 1/L^4$.

До теперішнього часу "малому множнику при старшій похідній" присвячена величезна кількість робіт багатьох авторів, які вивчали початкові і крайові задачі, властивості, поведінку, думки і оцінки різних типів розв'язків, різноманітні додатки, а також різні модифікації проблеми, її узагальнення та споріднені питання.

Несподівано ці задачі виникли і в проблемах дорожнього будівництва у зв'язку з необхідністю моделювання генерування в дорожніх покриттях функцій напружено-деформованого стану, сконцентрованих у вигляді сингулярностей в крайових зонах і в малих околах ділянок прикладання транспортних навантажень та високоградієнтних полів температури.

Дійсно, якісно, явища, що протікають в дорожньому покритті, яке лежить на ґрунтовому масиві та підданне дії локалізовано-вертикальному навантаженню від автомобільного колеса, можемо описувати моделлю пружної плити, що лежить на пружній основі. В свою чергу, для наочності, розглянемо випадок, коли навантаження локалізоване вздовж відрізка прямої. Тоді ця задача зводиться до плоского випадку рівноваги плоскої системи в площині, перпендикулярній відрізку розподілу навантаження і плита може бути замінена балкою на пружній основі. Її деформування описується рівнянням

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + ky = q(x) \quad (0 \leq x \leq L), \quad (2.9)$$

де коефіцієнт постелі k визначається пружними властивостями ґрунтового масиву, $q(x)$ – інтенсивність розподіленого навантаження.

Нехай, наприклад, ширина дороги $l = 10$ м, але нам зручніше розглянути деформування покриття в діапазоні від нуля до одиниці. Зробимо це, здійснивши перехід до нового масштабу незалежної змінної $X = x/10$. Тоді

$$x=10X, \quad \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{d^4 y}{10^4 dX^4}$$

і рівняння (2.20) набуде вигляду

$$\frac{EI}{10^4} \frac{d^4 y}{dX^4} + ky = q(x), \quad (0 \leq x \leq 1). \quad (2.10)$$

Тут коефіцієнт перед старшою похідною став на чотири порядки меншим і вплив другого доданку став більш помітним. Однак першим доданком неможливо знехтувати, так як в цьому випадку рівняння (2.10) змінить свою структуру

$$ky = q(x) \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (2.11)$$

і вже не буде диференціальним. Тому рівняння (2.10) є сингулярно збуреним, і оскільки рівняння (2.9) і (2.10) еквівалентні, то сингулярно збуреним є і рівняння (2.9) з розв'язками у вигляді сингулярностей та крайових ефектів. Причому ефект сингулярного збурення зростає зі збільшенням значення k . Звідси випливає, що сингулярно збуреною є і задача теорії пружності про деформування багат шарового покриття дороги і вона має розв'язок також у вигляді сингулярностей.

Складність задачі про теплове деформування дорожнього покриття ще більше посилюється в зв'язку з тим, що сингулярно збуреною також є задача про розподіл в його масиві полів температури. Для підтвердження цього судження розглянемо явище поширення тепла вглиб дорожнього масиву (вздовж координати x_2). Нехтуючи тепловими потоками в горизонтальному

напрямі, запишемо рівняння нестационарної теплопровідності (1.32) у вигляді

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.12)$$

Будемо вважати, що в результаті теплового збурення дорожнього масиву добовими змінам температури $T(x_2, t)$ на вільній поверхні $x_2 = 0$ покритву при денному нагріванні та нічному охолодженні температури на поверхні $x_2 = 0$ можна вважати відомою, тобто $T(0, t)$ ($0 \leq t \leq 12 \text{ год}$). Врахуємо, що коефіцієнти теплопровідності матеріалів шарів покритву маленькі, обрана для аналізу товщина багатошарового покритву (розрахункова глибина масиву) не мала і розрахункова протяжність зміни зовнішньої температури (12 годин) порівняно мала. Тоді роль доданку в лівій частині рівняння (2.12) (друга похідна по x_2) набагато менша ролі доданку в його правій частині (перша похідна по t) і рівняння (2.23) також є сингулярно збуреним. Зазначимо, що ця особливість рівнянь теплопровідності (рівнянь математичної фізики параболічного типу) широко відома в прикладній математиці і вона у повному обсязі відображена в науковій літературі [48, 49, 110, 257]. В нашому випадку ця особливість проявляється в тому, що розв'язок задачі теплопровідності також має вигляд крайового ефекту, локалізованого в елементах покритву, прилеглих до його вільної поверхні. Також високоградієнтний розподіл температури $T(x_2, t)$ вглиб призводить до великих значень нормальних і дотичних напружень, що провокують розтріскування і розшарування верхніх шарів покритву. Вони підтверджені результатами комп'ютерного моделювання.

Проілюструємо ці особливості за допомогою рівняння теплопровідності (2.12) із заміною x_2 на x

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.12')$$

та рівнянь (1.4)-(1.8) для одномірного випадку.

Нехай пружне середовище займає напівпростір $x \geq 0$ і в момент часу $t = 0$ температура в ньому змінилася за законом (рис. 2.1,а)

$$T(x, 0) = T_0 e^{nx}. \quad (2.13)$$

Де T – температура середовища на граничній площині $x = 0$, $n < 0$. Нехай далі на цій площині функція температури $T(0, t)$ має вигляд

$$T(0, t) = T_0 e^{mt}, \quad (2.14)$$

де $m > 0$.

Тоді розв'язок рівняння (2.12') при $t > 0$ можна подати у вигляді

$$T(x, t) = f(x)g(t) = T_0 e^{nx} e^{mt}, \quad (2.15)$$

де $f(x) = T_0 e^{nx}$, $g(t) = e^{mt}$, $n < 0$, $m > 0$.

При деяких $x \geq 0$ та фіксованому $t = t_0 > 0$ функція $T(x, t)$ має вигляд, представлений на рис. 2.1.

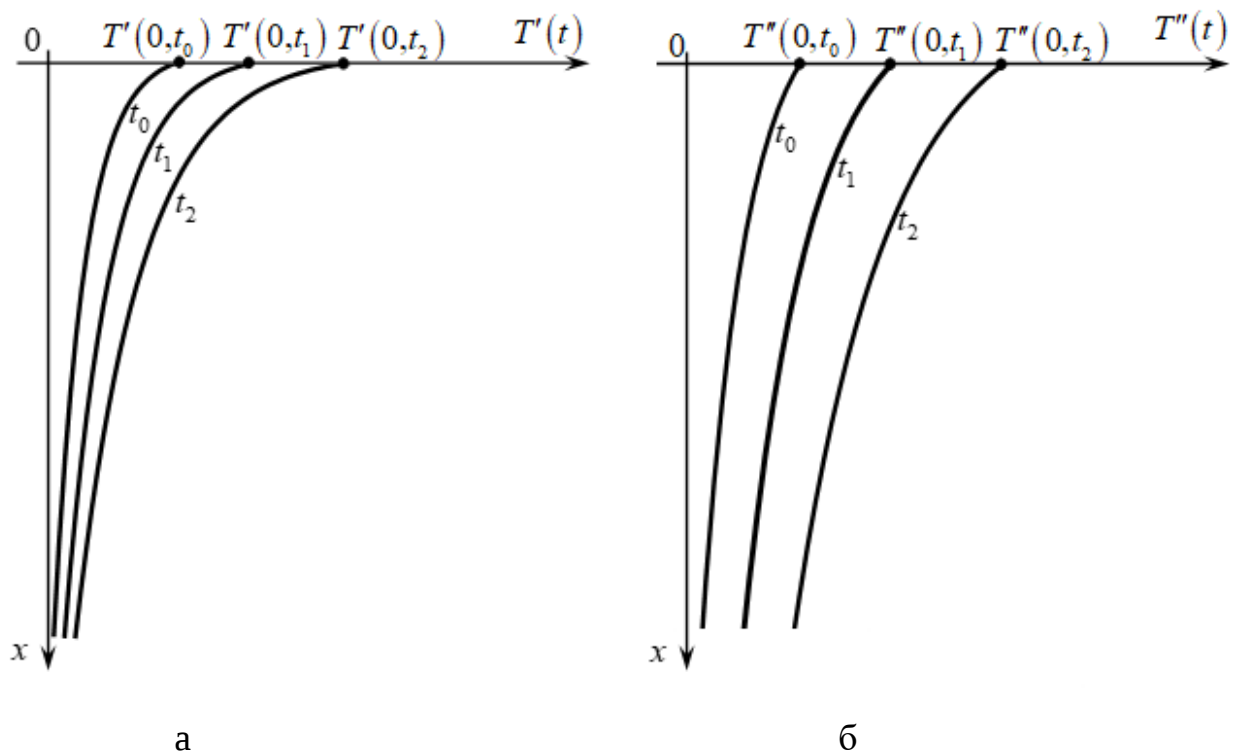


Рисунок 2.1 – Графіки зміни функцій $T'(x, t_i)$ та $T''(x, t_i)$ ($i = 0, 1, 2$) для випадків $a = a_1$ (а) та $a = a_2$ (б), відповідно

Підставляючи для цього випадку вираз (2.12) в рівняння (2.12'), отримаємо

$$T_0 n^2 e^{nx} e^{mt} = \frac{m}{a} T_0 e^{nx} e^{mt}. \quad (2.16)$$

Звідси слідує рівність, яка визначає зв'язок між величинами n , m та a :

$$n^2 = \frac{m}{a} \quad \text{або} \quad n = \pm \sqrt{\frac{m}{a}}. \quad (2.17)$$

У відповідності до виразу (2.15) тут параметр n визначається

швидкістю спадання $T(x,t)$ (при $n < 0$) вздовж змінної x при фіксованому t . Відповідно до (2.17) вона зменшується зі зростом a . Величина m характеризує швидкість зростання $T(x,t)$ (при $m < 0$) за часом t . На рис. 2.1 побудовані графіки зміни функцій $T'(x,t)$ та $T''(x,t)$ для однакових крайових умов $T(0,t_i)$, ($i=0,1,2$) при двох значеннях коефіцієнту a_j ($j=1,2$), які задовольняють нерівність $a_2 > a_1$.

Аналіз цих графіків дозволяє зробити два зауваження:

1. Як видно, при малому значенні a_1 (рис. 2.1, а) тепловий потік проникає вглиб середовища з меншою інтенсивністю, і поле температури $T'(x,t_i)$ з ростом t набувають більш яскраво виражений вигляд крайового ефекту з більшим значенням градієнту $T'(x)$ (і термонапружень) в околі границі $x=0$. Зі збільшенням коефіцієнту a (рис. 2.1, в) при тих же граничних умовах крайовий ефект стає менш помітним, оскільки тепловий потік з меншим опором проникає всередину середовища, значення температури $T''(x,t)$ набувають збільшених значень, але градієнт температури падає. Тому в області крайового ефекту падають і термонапруження. Але при віддаленні від краю $x=0$, там, де немає їх концентрації і вони порівняно малі, термонапруження можуть дещо зростати.

2. Вище для аналізу вибрані випадки, коли при двох різних значеннях коефіцієнтів a_1 та a_2 крайові умови $T(0,t)$ однакові. Проте в реальності такі умови складно реалізувати, оскільки на граничній площині $x=0$ пружного середовища, яке контактує з зовнішнім (повітряним) середовищем, реалізуються умови вільного теплообміну. Його інтенсивність визначається коефіцієнтом тепловіддачі γ між тілом і середовищем, який показує яка

кількість тепла передається від одиниці площі площини тіла до зовнішнього середовища за одиницю часу при різниці температур між стінкою тіла і середовищем в 1 градус (K). Цей коефіцієнт зростає зі збільшенням коефіцієнту теплопровідності a_1 , оскільки при цьому підвищується інтенсивність теплообміну [32, 33]. В результаті кількість тепла, яке передається тілу з боку зовнішнього середовища при $a = a_2$ буде більше в порівнянні з випадком $a = a_1$, але у зв'язку з тим, що $a_2 > a_1$, це тепло буде швидко відходити вглиб тіла і розчиниться в ньому. Це призведе до того, що температура буде мати тенденцію до швидкого вирівнювання по всьому об'єму, набуваючи значення $T(x, t)$, які вищі за відповідні значення в ті ж моменти часу при великих x для випадку $a = a_1$, але менші за відповідні значення при малих x , тобто в околі краю $x = 0$ (рис. 2.2).

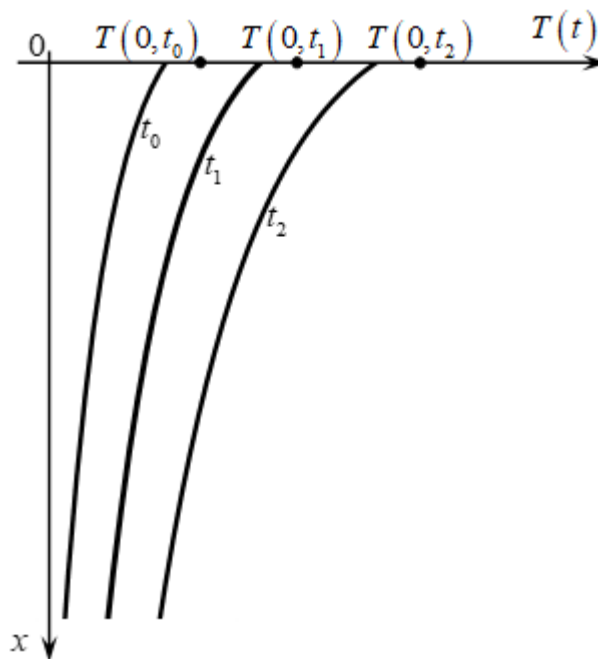


Рисунок 2.2 – Уточнені графіки зміни функцій $T(x, t_i)$ для випадку $a = a_2$

Проаналізуємо тепер як змінюються поля термонапружень в пружному

напівпросторі при наявності в ньому поля температури (2.16). Будемо вважати, що, як це прийнято в дорожньому будівництві, координати x та z лежать в горизонтальній площині, а координата y напрямлена вниз вздовж вертикалі. Нехай при нескінченних значеннях x та z переміщення u_x та u_z дорівнюють нулю, тоді вони будуть дорівнювати нулю і у всьому напівпросторі. Для обчислення переміщень u_y виберемо в системі (1.13) друге рівняння у формі

$$(\lambda + 2\mu) \frac{d^2 u_y}{dy^2} = (3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{dT}{dy}. \quad (2.18)$$

Перепишемо це рівняння з урахуванням представлення (2.15) при фіксованому часі t_i :

$$(\lambda + 2\mu) \frac{d^2 u_y}{dy^2} = (3\lambda + 2\mu) \alpha n T_0 e^{mt_i} e^{ny}. \quad (2.19)$$

Інтегруючи його двічі, отримуємо:

$$\frac{du_y}{dy} = \frac{(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu)} \alpha T_0 e^{mt_i} e^{ny} + C_1. \quad (2.20)$$

$$u_y = \frac{(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu) \cdot n} \alpha T_0 e^{mt_i} e^{ny} + C_1 y + C_2, \quad (2.21)$$

де константи C_1, C_2 знаходять із граничних умов.

Маючи функцію (2.21), за допомогою формули (2.16) можна підрахувати напруження:

$$\begin{aligned}\sigma_x = \sigma_z &= -(3\lambda + 2\mu) \alpha T_0 e^{mt_i} e^{nx}, \quad \sigma_y = 0, \\ \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} &= 0.\end{aligned}\tag{2.22}$$

Тут при обчисленні σ_y , враховано, що на граничній площині $y=0$ $\sigma_y(0)=0$.

2.2 Нестационарне термічне деформування шаруватої конструкції дорожнього одягу дороги дорожнього

2.2.1 Аналіз проблеми

Оскільки в дорожньому будівництві, в основному, застосовуються шарувато-неоднорідні дорожні покриття, то при математичному моделюванні механічних процесів, що протікають при їх експлуатації, доводиться мати справу з властивою їм специфікою розподілу полів деформацій і напружень. Справа в тому, що функції деформацій і напружень (а іноді і переміщень), які виникають в них, як правило, виявляються розривними і їх важко описувати простими аналітичними і чисельними засобами. З цією особливістю пов'язане і істотне ускладнення механічних явищ, що спостерігаються в них. Оскільки при експлуатації покриття дороги піддаються не тільки дії інтенсивних швидко змінних (розривних) за просторовими і часовими змінними навантажень, але також і постійно тепловим збуренням, що еволюціонує, з істотними градієнтами, проектування їхніх конструкцій має проводитися на основі вибору оптимальних (раціональних) характеристик матеріалів, що

використовуються, їх термо-механічних властивостей, геометричних параметрів проєктованих шарів і порядку їхнього чергування. Цей вибір може бути зроблений за допомогою комп'ютерного моделювання термо-напруженого стану дорожнього покриття та його еволюції за часом.

Для розв'язання цієї задачі необхідно спочатку за допомогою рівняння нестационарної теплопровідності (2.14) методом скінченно-елементного аналізу вивчити зміну полів температури в дорожній конструкції протягом доби окремо в літній і зимовий часи.

Потім, розв'язуючи рівняння (2.13) в стаціонарній постановці при знайденій температурі $T(x, y, z, t)$ знайти відповідні переміщення u_1, u_2, u_3 в потрібний для нас час. Знаючи ці переміщення, можна далі підрахувати деформації $\varepsilon_{ij}(i, j=1,2,3)$ і на їх основі знайти і всі напруження $\sigma_{ij}(i, j=1,2,3)$.

Практична реалізація цього алгоритму, все-таки, пов'язана з певними обчислювальними труднощами, які зв'язані з тим, що в математичній фізиці, як відзначено вище, постановка деяких проблем для рівнянь еліптичного, гіперболічного і параболічного типів приводить до так званих сингулярно збурених задач, які відрізняються тим, що їх розв'язання мають локалізовані сингулярності у вигляді крайових ефектів або відокремлених короткохвильових сплесків [49]. Такі сингулярності зазвичай пов'язані з окремими (несприятливими) станами середовищ (в теорії пружності і пластичності – з концентрацією напружень). До того ж ці стани важко піддаються теоретичному моделюванню, оскільки обчислювальні методи їхнього аналізу виявляються погано збіжними і неточними.

Мабуть в найбільшій мірі виявлення сингулярно збурених станів типово для рівнянь теплопровідності [257]. У зв'язку з тим, що вони приводять до виникнення полів температури з високими градієнтами, а потім до концентрації нормальних і дотичних напружень, нижче розглянемо детальніше основні особливості та властивості їхньої реалізації.

2.2.2 Конструктивна і розрахункова моделі дорожнього одягу

Виділений для розрахунку термопружного напружено-деформованого стану поперечний переріз конструкції дороги включає чотири шари дорожнього покриття і масив прилеглого ґрунту. Загальна схема конструкції і її фрагментів представлена на рис. 2.3.

Геометрія системи визначається параметрами $L_1 = 24,5$ м, $L_2 = 23,5$ м, $L_3 = 11,5$ м, $L_4 = 7,5$ м, $H = 0,55$ м, $H_1 = 0,5$ м, $H_2 = 2$ м.

Види матеріалів фрагментів конструкції, їхні товщини h_1, h_2, h_3, h_4 , і значення термомеханічних параметрів наведені у табл. 2.1. В ній позначено: E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуассона; ρ – густина; α_T – коефіцієнт теплового лінійного розширення; λ – коефіцієнт теплопровідності; $c_{об}$ – питома об’ємна теплоємність.

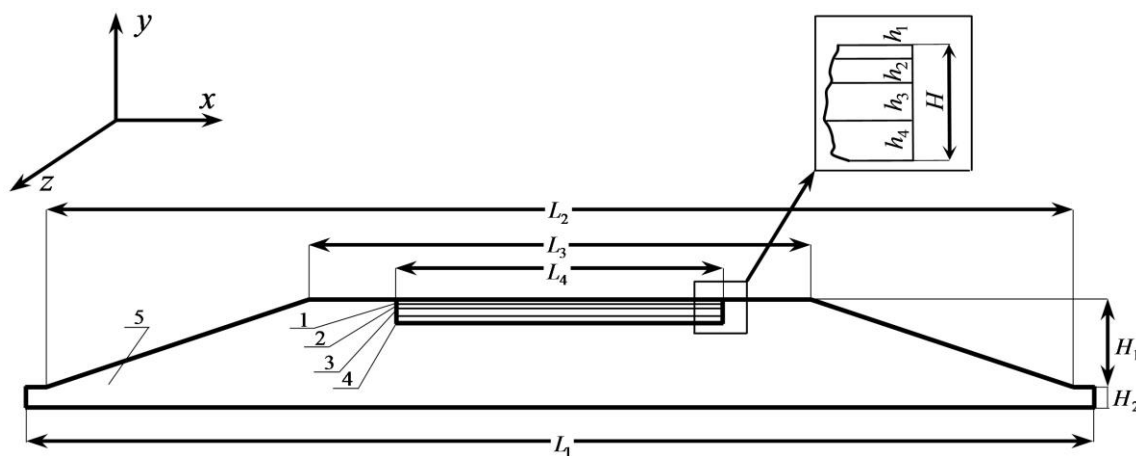


Рисунок 2.3. – Схема поперечного перерізу конструкції дорожнього одягу

Покладали, що конструкція дорожнього одягу хнаходиться під впливом термічної дії в результаті денної зміни температури повітря і при цьому температура на її верхній поверхні змінюється за заданим законом.

Обчислення розвитку поля температури в масиві конструкції проведені методом скінченних елементів. Враховувалось, що уздовж поздовжньої осі Oz дороги деформації $\varepsilon_z = 0$ і весь масив знаходиться в плоско деформованому стані.

Таблиця 2.1 – Конструктивні параметри дорожнього покриття

Номер i шару	Матеріал	h_i (м)	E_i (Па)	ρ кг/м ³	ν	α_T С ⁻¹	λ Вт/(м·К)	$c_{об}$ Дж/(м ³ ·К)
1	Асфальтобетон дрібнозернистий	0,05	$5 \cdot 10^9$	2400	0,2	$2,46 \cdot 10^{-5}$	1,0	$3,77 \cdot 10^6$
2	Асфальтобетон пористий крупнозернистий	0,1	$1,4 \cdot 10^9$	2390	0,25	$1,92 \cdot 10^{-5}$	0,7	$2,63 \cdot 10^6$
3	Щебінь	0,2	$0,4 \cdot 10^9$	2300	0,3	$1,8 \cdot 10^{-5}$	0,5	$1,81 \cdot 10^6$
4	Пісок	0,2	$0,1 \cdot 10^9$	2050	0,3	$1,1 \cdot 10^{-5}$	1,5	$4,83 \cdot 10^6$
5	Ґрунт	2,5	$0,1 \cdot 10^9$	1960	0,35	$0,31 \cdot 10^{-5}$	1,05	$3,23 \cdot 10^6$

Ця обставина дозволила виділити перетинами $z = 0$ і $z = \Delta z$ поперечний шар масиву товщиною Δz і апроксимувати систему тривимірними скінченними елементами з розміром Δz вздовж координати z . Скінченно-елементна модель системи з виділенням її пошаровим фрагментом 1-4 і ґрунтовим масивом 5 показана на рис. 2.4. Збоку кожного фрагмента вказано число скінченних елементів дискретної моделі. При цьому загальне число скінченних елементів склало 29868.

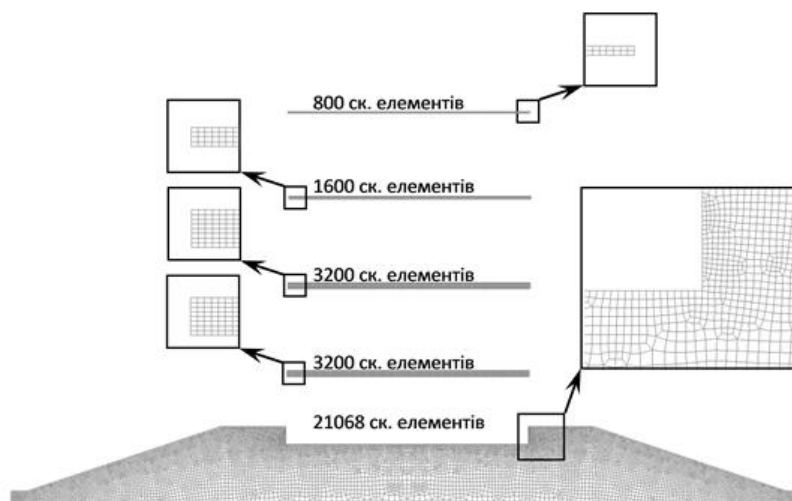


Рисунок. 2.4 – Скінченно-елементна модель перерізу дороги

2.2.3 Основні розв’язувальні співвідношення

Досліджуються процеси зміни поля температури в масиві покритву дороги при добовій зміні температури навколишнього середовища. З урахуванням натурних спостережень прийнято, що в результаті атмосферних температурних варіацій температура T на поверхні покритву та придорожнього ґрунту в денний час змінюється за законом синусоїди від деякого початкового значення T_0 (вранці) до її максимуму $T_{\max}$ (опівдні) і до вечора знову падає до вихідного значення T_0 . Схема зміни протягом 12 годин ($0 \leq t \leq 43200$ с) показана на рис. 2.5.

Задача про термопружне деформування дорожнього покритву розв’язується в лінійній постановці. Це дозволяє аналізувати тільки прирости деформацій і напружень, викликані приростами температури.

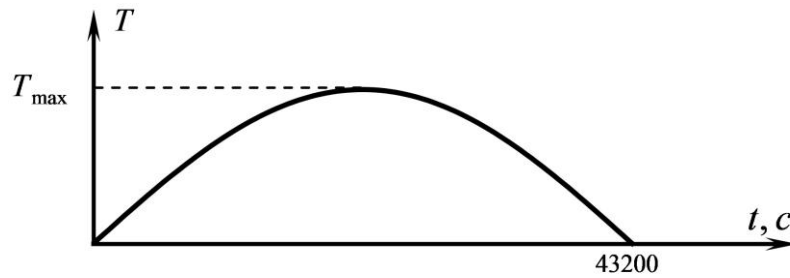


Рисунок 2.5 – Графіки зміни температури $T(t)$ на поверхні покриття

Тому будемо вважати, що в початковому стані температура всього масиву (як і T_0), деформації та напруження дорівнюють нулю і будемо аналізувати процес термопружного деформування при зміні температури $T(t)$ на поверхні за законом (рис. 2.5)

$$T(t) = (T_{\max} - T_0) \sin(\pi / 43200). \quad (2.23)$$

Тоді еволюція поля температури на границях кожного шару покриття і масиву ґрунту визначається рівнянням нестационарної теплопровідності [21]

$$\nabla^2 T - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (2.24)$$

де $a = \lambda_q / c_{об}$ – коефіцієнт температуропровідності;

λ_q – коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·К);

$c_{об}$ – питома об'ємна теплоємність, Дж/(м³·К);

доданок $\nabla^2 T$ – еквівалентний виразу $\partial T / \partial x^2 + \partial T / \partial y^2 + \partial T / \partial z^2$.

Вважаємо, що при термопружному деформуванні всього масиву силами інерції можна знехтувати і процес буде квазістатичним. Тоді поле пружних переміщень $\mathbf{u}(x, y, z)$ описується векторним рівнянням [21, 33, 34]

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\chi + \mu) \text{grad div} \mathbf{u} - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \text{grad}(T) = 0, \quad (2.25)$$

де λ і μ – ізотермічні параметри Ляме, МПа.

Граничні умови для функції $T(x, y, z, t)$ на вільній поверхні задаються у формі (2.23), на умовних кінцях виділеної області прийнято, що теплові потоки в напрямку нормалі відсутні, тому похідна від T за нормаллю $\mathbf{n}$ дорівнює нулю,

$$\partial T / \partial n = 0. \quad (2.26)$$

При формулюванні граничних умов для функції $\mathbf{u}(x, y, z)$ вважалося, що на верхній поверхні середовище вільне від нормальних і дотичних напружень, а на бічних і нижній поверхнях умовних розрізів переміщення по нормалі і дотичній напруження дорівнюють нулю. На поверхнях контакту шарів покриву між собою і з ґрунтовим масивом були прийняті умови сполучення функцій T і відповідних функцій переміщень і деформацій.

Прийнята постановка задачі про термопружне деформування виділеного багатошарового масиву дозволила використовувати алгоритм її вирішення, при якому спочатку розв'язується задача нестационарної теплопровідності для рівняння (2.24) на всьому діапазоні часу t , рівному 12 годин (43200 с). Потім в потрібні для нас моменти часу t_i з використанням побудованих полів температури $T(x, y, z, t_i)$, за допомогою рівнянь (2.25) визначалися поля переміщень, деформацій і напружень.

Розв'язання цих рівнянь здійснюється шляхом переходу до скінченно-елементних моделей

$$\begin{aligned} [K_T]\{T\} - [A]\{\dot{T}\} &= \{T_f(t)\}; \\ [K_u]\{u\} &= [L]\{T(t_i)\}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

де $[K_T]$ – матриця коефіцієнтів скінченно-елементної моделі рівняння теплопровідності,

$[A]$ – матриця коефіцієнтів моделі при похідній T ;

$\{T_f(t)\}$ – вектор заданих значень температури T на поверхні покриття;

$[K_u]$ – матриця жорсткості для скінченно-елементної моделі пружного масиву;

$[L]$ – матриця, яка відображає вплив температури на переміщення елементів масиву.

Після підрахунку значень компонент вектора переміщень $\{u\}$ у вузлах скінченно-елементної моделі обчислювалися компоненти тензорів деформацій ε_{jk} і напружень σ_{jk} . Вони визначалися за допомогою рівностей [33]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{jk} &= \frac{1}{2}(u_{j,k} + u_{k,j}); \\ \sigma_{jk} &= 2\mu\varepsilon_{jk} + [\lambda\varepsilon_{ll} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T \cdot T]\delta_{jk}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

дискретизованих в кожному вузлі моделі.

У цих рівностях індекси j, k, l пробігають значення 1, 2, 3; при цьому напрямки x_1, x_2, x_3 відповідають напрямам x, y, z ; $u_{j,k} = \partial u_j / \partial x_k$; $\varepsilon_{ll} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$; δ_{jk} – символ Кронекера, що дорівнює 0 при $j \neq k$ і рівний 1 при $j = k$.

2.2.4 Особливості термопружного деформованого стану покриття дороги

Попередній розгляд геометричної схеми дорожнього одягу (рис. 2.3), термомеханічних параметрів властивостей його фрагментів (табл. 2.1) і форми функції теплового збурення (рис. 2.5) дають змогу зробити припущення, що поставлена задача проста і термопружні ефекти, які вайдбуваються разом зі зміною поля температур в даному шаруватому масиві, є елементарними. Однак такий висновок є поверхневим і не відповідає дійсності. Є дві причини, які роблять це явище, нетривіальним і вельми привабливим, а проблему його моделювання досить трудомісткою. По-перше, середовище, в якому еволюціонує температурне поле, шарувато-неоднорідне і, по-друге, проблема його моделювання при обраних значеннях термомеханічних характеристик і розмірів виділеної для розгляду області відноситься до класу сингулярно збурених [257]. Зауважимо, що задача теплопровідності є сингулярно збуреною, якщо коефіцієнт $1/a$ перед похідною $\partial T / \partial t$ в рівнянні (2.35) малий, а розмір області в напрямку поширення теплового потоку досить великий. Тоді при зовнішньому тепловому збуренні тепловий потік не встигає проникнути від граничної поверхні вглиб тіла і поле температури отримує помітну зміну лише в приграничній зоні, набуваючи форму так званого крайового ефекту. У цьому випадку функція температури $T(x, y, z, t)$ не тільки досягає помітні прирости в крайовій області, а й характеризується також високими значеннями її градієнтів, тобто похідних за просторовими змінними. Такий ефект супроводжується утворенням великих перепадів значень функції переміщень і деформацій пружного тіла, а також нормальних і дотичних напружень. Відомо, що тільки у випадку, коли в однорідному пружному тілі, вільному

від в'язей, поле температури $T(x, y, z)$ постійне або навіть змінюється лінійно за просторовими змінними x, y, z , то всі напруження в ньому дорівнюють нулю. У всіх інших випадках у ньому формуються ненульові напруження і вони зростають з ускладненням температурних полів. Другий фактор пов'язаний з тим, що інтенсивності термопружних напружень ще більше збільшуються, якщо неоднорідними є також характеристики пружності середовища, тим більше, якщо вони шарувато неоднорідні. Тоді поле напружень стає розривним і набуває яскраво виражені екстремуми. Очевидно, що всі ці явища є деструктивними для тіл і середовищ, що розглядаються, а задачі теоретичного (комп'ютерного) моделювання цих явищ відрізняються великою складністю і поганою обчислювальною збіжністю. У зв'язку з цим чисельне дослідження термопружного напруженого стану таких систем доводиться проводити на малих скінченно-елементних решітках і додатково тестувати результати обчислень.

2.2.5 Аналіз результатів скінченно-елементного моделювання

За розробленою методикою проведено комп'ютерне моделювання конструкції дорожнього одягу, представленої на рис. 2.3, при значеннях параметрів, наведених у табл. 2.1, на основі скінченно-елементної моделі, показаної на рис. 2.4. Приймалося, що протягом дня температура на верхній поверхні покриття змінювалася за законом (2.23) при $T_0 = 0$, $T_{\max} = 12^\circ \text{C}$ (див. графік на рис. 2.5). На рис. 2.6 показано поле розподілу температури в поперечному перерізі конструкції дороги в момент часу $t = 6$ годин, коли температура на поверхні покриття досягає максимуму.



Рисунок 2.6 – Поле температури

Значення температури в кожній точці перерізу можуть бути визначені за шкалою кольорової палітри, яка наведена праворуч. Для наочності температурне поле представлено на окремих фрагментах системи (рис. 2.7). Можна помітити, що максимальні значення температури локалізуються в крайовій зоні, прилеглій до верхньої поверхні покриття. Для більшої наочності представимо в детальній формі графік зміни температури вздовж центральної вертикалі покриття.

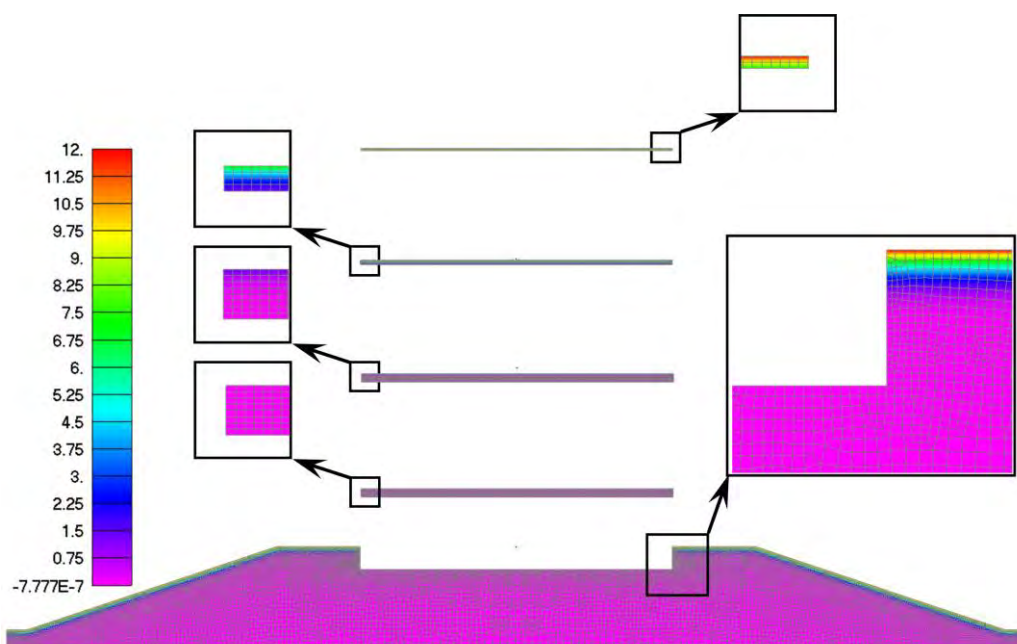


Рисунок 2.7 – Поля температури у фрагментах дороги

На рис. 2.8 подана схема шарів покритву, що знаходиться у відповідності з координатною віссю Oy , яка напрямлена вертикально. На цій осі побудована функція для моменту часу $t=6$ год (рис. 2.8 б). Можна побачити, що поле температури має помітні значення лише на границях першого і половини другу шарів. При цьому наступні (більш низькі) шари і ґрунт виявилися непрогрітими. На рис. 2.8 б видно також істотний градієнт функції $T(y)$ в приграничній зоні, яка знаходиться у відповідності з теорією сингулярно збурених рівнянь параболічного типу [110, 257]. Рис. 2.8 в дублює в кольоровій формі рис. 2.8 б. Він побудований шляхом виділення центрального стовпчика на рис. 2.6. На рис. 2.8 г представлена палітра кольорової шкали, яка відповідає кольоровому полю на рис. 2.8 в.

Генерування температурного поля у вигляді крайового ефекту і шарувата неоднорідність дорожнього покритву обумовлюють формування в ньому полів напружень досить складної структури. Для їх побудови спочатку з використанням знайденої функції температури розв'язується система рівнянь (2.25) на тій же самій скінченно-елементній решітці і потім за допомогою формул (2.28) обчислюються деформації і напруження в усіх її вузлах.

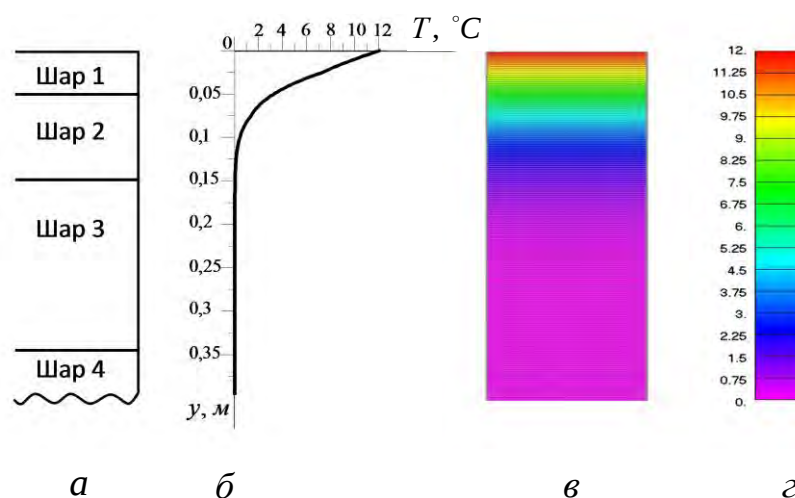


Рисунок 2.8 – Схема розподілу температури по глибині у виділеному центральному скінченно-елементному стовпчику

На рис. 2.9 представлена схема поперечного перерізу покриття в деформованому стані. Відповідний йому напружений стан конструкції має особливу специфіку. Вона обумовлена не тільки неоднорідністю температурного поля і характеристик пружності системи, але і її конструкцією.

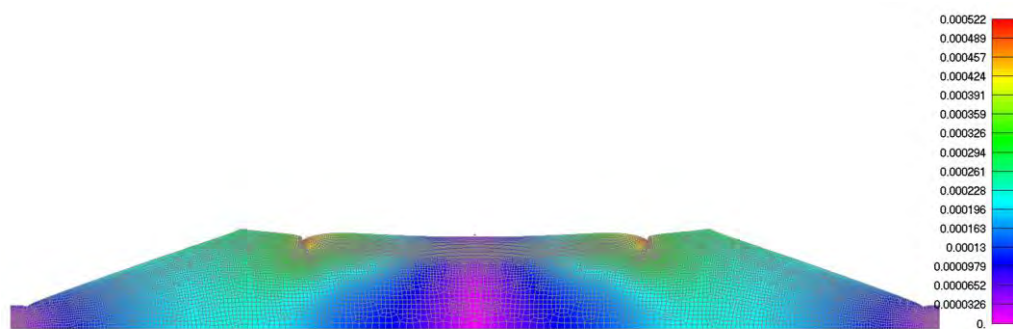


Рисунок 2.9 – Схема перерізу дороги в термодформованому стані

По-перше, як вже зазначено вище, можна вважати, що нормальні напруження σ_{yy} на площадках $y = \text{const}$ малі і тоді приймемо, що

$$\sigma_{yy} = 0. \quad (2.40)$$

По-друге, враховуючи, що модуль пружності ґрунту E_5 помітно менший модулів пружності $E_i (i = 1 \div 4)$ кожного з шарів покриття, то ґрунтове середовище на бічних границях покриття слабо перешкоджає вільному тепловому розширенню в бічному напрямку і шари майже вільно розширюються. Тому можна зробити висновок, що при додатній T деформація ε_{xx} також додатня і в рівності для ε_{xx} ця величина набуває порівняно невеликі за модулем від'ємні (стискаючі) значення за рахунок другого доданка.

У цьому випадку за допомогою рівності $\sigma_{zz} = \sigma_{xx} - 2\mu\varepsilon_{xx}$ можна встановити третю характерну особливість розподілу полів термопружних

напружень в даній структурі. Так як в правій частині цієї рівності величина σ_{xx} порівняно мала і від’ємна і від неї віднімається немала величина (другий член з додатним ε_{xx}), то σ_{zz} приймає від’ємне і найбільше за модулем значення.

Результати проведеного скінченно-елементного моделювання підтвердили ці висновки. Оскільки під дією теплового збурення встигають прогріватися тільки шари конструкції, прилеглі до її вільної поверхні, то термопружні переміщення також мають помітні переміщення лише в приграничній зоні (рис. 2.9), хоча їх значення залишаються досить малими і лише трохи перевищують 0,5 мм.

Сформульовані вище докази про особливості формування полів напружень σ_{xx} і σ_{zz} також відповідають даним чисельного аналізу (рис. 2.10 і 2.11, відповідно).

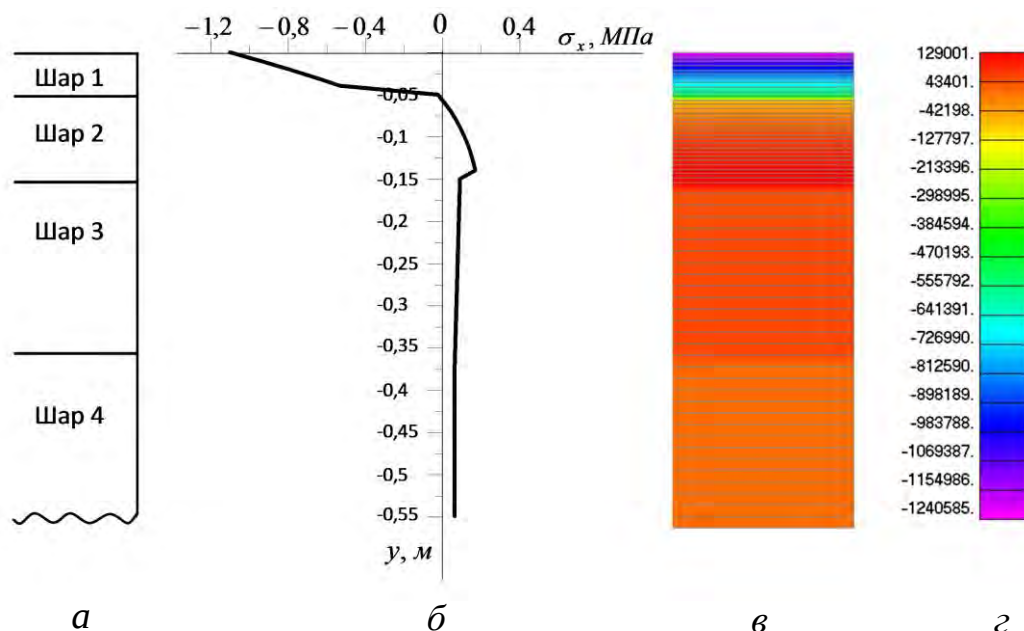


Рисунок. 2.10 – Схема розподілу термопружних напружень σ_{xx} у виділеному центральному скінченно-елементному стовпці

Перш за все зазначимо, що стискаючі напруження σ_{xx} досягають

пікових значень в границях першого шару, де найбільшими є і модуль пружності E (див. табл. 2.1), і значення температури T . У границях другого шару напруження σ_{xx} набули істотно менших значень, причому вони виявилися знакозмінними. Цей ефект обумовлений тим, що перший шар, завдяки підвищеній температурі, отримав більш істотні переміщення u_x і захопив за собою другий шар, який при цьому виявився частково розтягнутим. Інші шари покриву виявилися практично ненапруженими.

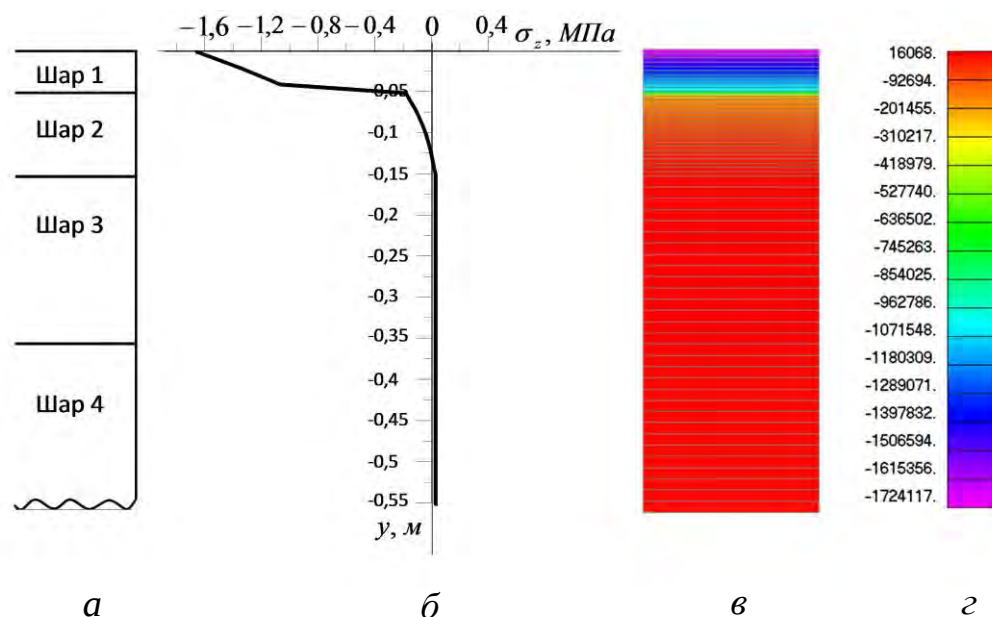


Рисунок 2.11 – Схема розподілу термопружних напружень σ_{zz} у виділеному центральному скінченно-елементному стовпці

Маючи в своєму розпорядженні графік функції σ_{xx} на рис. 2.10, можна за допомогою формули $\sigma_{zz} = \sigma_{xx} - 2\mu\epsilon_{xx}$ легко оцінити вид напружень σ_{zz} (рис. 2.11). Вони помітно перевищують напруження σ_{xx} і їх концентрація в границях першого шару є очевидною. Дотичні напруження σ_{xy} в даній системі формуються завдяки згенерованому градієнту температурного поля в крайовій зоні. У центральному стовпці конструкції вони дорівнюють нулю в силу симетрії системи відносно цього перерізу і досягають найбільших значень приблизно у вертикальному перерізі, який віддалений на чверть

ширини покриття від центру (див. рис. 2.12). Причому максимальне значення цієї функції досягається на границі першого і другого шарів, де максимальним є градієнт $T(x, y)$.

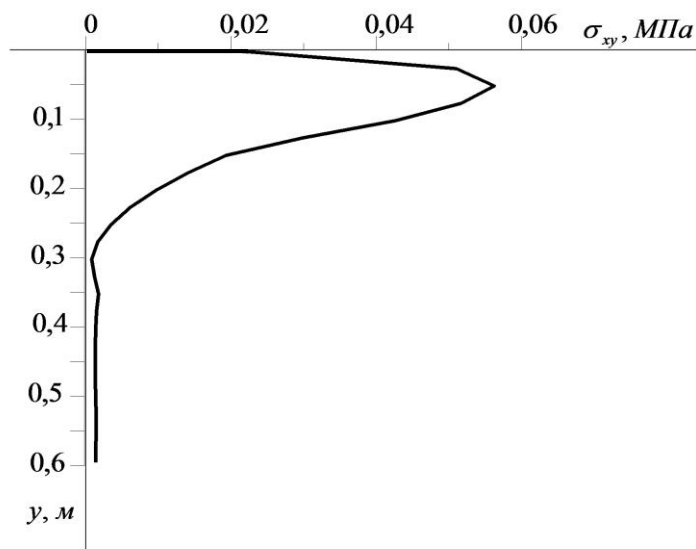


Рисунок 2.12 – Схема розподілу термопружних напружень σ_{xy} у виділеному центральному скінченно-елементному стовпці

Відзначимо також, що напруження σ_{xx} і σ_{xy} зростають зі збільшенням ширини дороги L_4 і зменшуються з її зменшенням.

Відповідно якщо ширина дороги велика і потрібно зменшити термопружні напруження, то це можна зробити за рахунок роздільного шва уздовж осьової лінії дороги.

Отже, результати комп'ютерного моделювання підтвердили, що поля температури, що змінюються у часі, мають вигляд крайового ефекту, переважно зосередженого в зоні першого або першого і другого асфальтобетонних шарів і володіють високими градієнтами. Показано, що істотна неоднорідність полів напружень, яка пов'язана з розривами функцій напружень і їх концентрацією в крайовій зоні у вільній поверхні, залежить від високоградієнтної неоднорідності еволюціонуючих полів температури і

шаруватій неоднорідності механічних характеристик шарів конструкцій дорожнього одягу, які супроводжуються також зміною модуля пружності асфальтобетонних дорожньо-будівельних матеріалів при зміні температури. Встановлено, що пікові значення поздовжніх напружень розтягу у верхньому шарі покриття і зсувних напружень, локалізованих між першим і другим шарами, можуть бути причиною спостережуваних на практиці в зимовий час утворення на дорозі на початковій стадії руйнування поперечних тріщин і її розшарування.

2.3 Висновки до розділу 2

У розділі 2 виконано аналіз концентрації термонапружень в шаруватих конструкціях дорожніх покриттів. Поставлена та розв'язана задача про чисельне дослідження термопружного деформування шаруватих дорожніх одягів з урахуванням зміни характеристик жорсткості їх матеріалів при добових і сезонних змінах температури навколишнього середовища. Сформульовані розв'язувальні рівняння, побудовані їх скінченно-елементні аналоги.

1. Методом комп'ютерного аналізу розв'язування рівнянь нестационарної теплопровідності встановлено, що при обраних значеннях геометричних і термомеханічних параметрів дорожньої конструкції задача нестационарної теплопровідності при добових змінах навколишньої температури є сингулярно збуреною. Внаслідок цього, як підтвердили результати комп'ютерного моделювання, поля температури, що еволюціонують у часі, мають вигляд крайового ефекту, переважно зосередженого в зоні першого або першого і другого асфальтобетонних шарів і володіють високими градієнтами. Чисельним дослідженням показано, що високоградієнтна неоднорідність еволюціонуючих полів температури і шарувата

неоднорідність механічних характеристик покриття доріг, які супроводжуються також зміною модуля пружності асфальтобетонних матеріалів при зміні температури, обумовлюють істотну неоднорідність полів напружень, пов'язану з розривами функцій напружень і їх концентрацією в крайовій зоні у вільній поверхні. Встановлено, що пікові значення поздовжніх напружень розтягу у верхньому шарі покриття і зсувних напружень, локалізованих між першим і другим шарами, можуть бути причиною спостережуваних на практиці в зимовий час утворення на дорозі на початковій стадії руйнування поперечних тріщин і її розшарування.

2. Отримані результати дозволяють сформулювати основні закономірності формування полів термopужних напружень. До найпомітнішого явища можна віднести утворення крайового ефекту у функції розподілу температури $T(x, y, z, t)$. У зв'язку з цим суміщення гладкої неоднорідності температурного поля і шаруватої неоднорідності термомеханічних властивостей фрагментів покриття приводить до концентрацій напружень, які є розривними функціями і змінюють свої знаки при еволюції температурного поля. Вони також значною мірою залежать від наявності обмежень, що перешкоджають вільному термopужному розширенню-звуженню окремих фрагментів системи. В зв'язку з цим можна прийти до висновку, що з допомогою зміни термомеханічних параметрів кожного із шарів дорожнього одягу можна цілеспрямовано змінювати в них поля температур і напружень, оптимізуючи конструктивні характеристики дороги.

5. Результати досліджень даного розділу викладено у наступних публікаціях [3, 12, 13, 17, 43, 55, 66, 69, 81, 258].

РОЗДІЛ 3

КОНЦЕНТРАЦІЯ ТЕРМОНАПРУЖЕНЬ НА ПОВЕРХНЯХ ЗЕРНИСТИХ ВКЛЮЧЕНЬ В КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛАХ

3.1 Негативні термомеханічні ефекти в зернистих композитах з несумісними термомеханічними параметрами їх компонент

3.1.1 Про Внутрішній Механізм ініціювання термонапружень в композитах із зернистими наповнювачами

Однак нерідко їх впровадження стримується негативними термомеханічними ефектами, що виникають в умовах коливань значень високих і низьких температур.

Один із проявів ефекту виникнення додаткових термонапружень в неоднорідних тілах пов'язаний із внутрішнім Механізмом їх ініціювання за рахунок нерівномірного термодетормування їх окремих фракцій. Цей ефект є властивим для всіх середовищ зі змінними (і особливо, несумісними) термомеханічними характеристиками їх компонент, в тому числі для композитних матеріалів та матеріалів асфальтобетонних покриттів. У зв'язку з цим на першому етапі дослідження цієї проблеми вона формулюється для композитів загального виду, а потім в наступному розділі розглядається застосовано до неоднорідних матеріалів дорожніх покриттів.

У композитах із зернистим наповнювачем несучим елементом є матриця, а міцніші зерна грають роль перешкод на шляху поширення тріщини, що виникла під впливом сил [114, 232, 285]. Армуючі зерна можуть мати різні форми та розміри, а відстані між ними можуть становити від 0,1 до 3 і більше розмірів самого зерна.

Оскільки сконструйовані таким чином матеріали мають підвищені показники механічних і термофізичних властивостей, дослідники приділяють велику увагу питанням теоретичного передбачення значень ефективних модулів термомеханічних параметрів (модуля пружності, коефіцієнта Пуассона, коефіцієнта теплопровідності та коефіцієнта лінійного температурного розширення) комбінованої системи [116, 173, 184, 196, 267]. При цьому для матеріалів, що використовуються у великих діапазонах зміни температури, широке обговорення та практичне застосування на прикладах включень сферичних моделей знаходить ідея інтегрування в матрицю композиту включень з низьким (і навіть негативним [209, 215, 217]) коефіцієнтом лінійного температурного розширення (КЛТР) для зниження ефективного КЛТР всього композиту. Так, за загальної об'ємної частки включень від 5% до 40% пропонується знизити ефективний КЛТР до 50%, а в роботі [114, 116, 118, 173] цього результату вдалося досягти з 18% часткою включень з $\text{BiNi}_{0.85}\text{Fe}_{0.15}\text{O}_3$ в епоксидну матрицю.

Матеріали з низьким або навіть від'ємним КЛТР можна використовувати при значних змінах температури, коли вільне деформування в умовах значних конструктивних обмежень не відчуває додаткових термічних напружень. Проте виникає питання: за рахунок чого досягаються такі структурні зміни? Як вони впливають на загальну силову та термічну міцність наваго матеріалу? Оскільки, в такому випадку реалізується термічна несумісність матриці, яка має високий позитивний КЛТР, а включення при цьому – низький або від'ємний КЛТР. Крім цього всередину матеріалу ми поміщаємо додаткові, непомітні концентратори термонапружень. Вони на поверхні контакту матеріалів матриці та включення можуть викликати локальні деструкції та мікродефекти.

Щоб підтвердити або спростувати припущення, поставлена та

розв'язана задача про термонапружений стан ізолюваного пружного включення у вигляді сферичної моделі зерна наповнювача. В умовах стаціонарної зміни температури термомеханічні властивості наповнювача та включення є різними. Отримано аналітичний розв'язок цього завдання. Показано, що додаткові контактні термонапруження для матеріалів з несумісними термомеханічними параметрами можуть досягати значних величин, причому вони мають яскраво виражений локалізований характер і зменшуються пропорційно кубу відстані від центру включення до розглянутої точки. Зазначимо, що остання властивість дозволяє вважати отриманий розв'язок для ізолюваного включення прийнятним і у разі системи включень, оскільки завдяки йому взаємний вплив їх полів напружень виявляється несуттєвим.

Більш складну структуру мають композити з включеннями, покритими оболонкою з третього матеріалу. Така трифазна система має велику кількість термомеханічних і геометричних параметрів, тому для неї відкриваються ширші можливості для управління в ній додатковими внутрішніми термонапруженнями. Отриманий для цього випадку розв'язок є більш громіздким, але з нього випливає, що термонапруження в системі також зменшуються пропорційно кубу радіальної координати.

З побудованих розв'язків також випливає, що термонапруження зростають пропорційно добутку модулів пружності окремих фракцій. Тому ці напруження зменшуватимуться зі збільшенням пружної податливості включення. Цей ефект може бути досягнутий за рахунок створення в ньому порожнини, як це буває у сферопластиках зі скляними порожнистими сферами [97, 120, 200, 265]. Отримані в цьому випадку аналітичні розв'язки підтвердили достовірність цього ефекту. Окремим випадком є завдання концентрації термонапружень на поверхні сферичної пори. Це завдання

також розглянуто нижче.

3.1.2 Концентрація термонапружень на сферичному включенні

Розглянемо задачу про термонапружений стан пружної кулі (тіло 1 на рис. 3.1 а), яка включена в пружне середовище 2 (рис. 3.1 б). Температура в цій системі змінюється на величину T . Розміри середовища 2 є не обмеженими, а радіус пружної кулі становить r_1 .

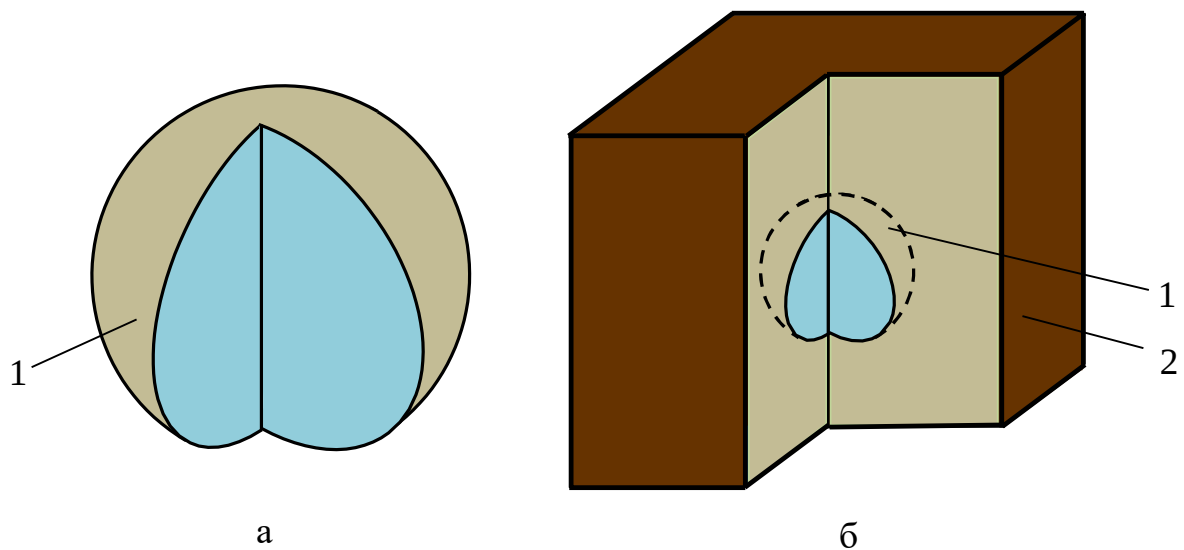


Рисунок 3.1 – Схема сферичного включення 1 в пружному середовищі 2

Термодеформований стан системи з включенням має центральну симетрію, тому використаємо сферичні координати r , φ , θ (рис. 3.2)). Вважатимемо, що початок сферичної системи збігається з центром тіла 1.

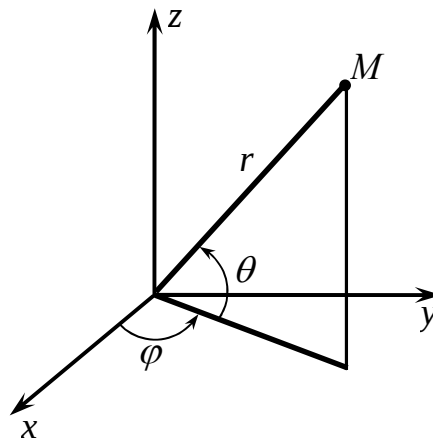


Рисунок 3.2 – Схема сферичної системи координат

Рівняння термопружної рівноваги даної системи має вигляд [188]

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2\sigma_r - \sigma_\varphi - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (3.1)$$

Вирази для нормальних напружень $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_\theta$ на відповідних майданчиках $r = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, $\theta = \text{const}$, мають вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_r + \lambda(\varepsilon_\varphi + \varepsilon_\theta) - (3\lambda + 2\mu)\alpha T; \\ \sigma_\varphi &= \sigma_\theta = \lambda\varepsilon_r + 2(\lambda + \mu)\varepsilon_\varphi - (3\lambda + 2\mu)\alpha T, \end{aligned} \quad (3.2)$$

де λ і μ – ізотермічні параметри Ламе, α – коефіцієнт лінійного температурного розширення.

Представимо також рівності для деформацій ε_r , ε_φ , вздовж відповідних координатних ліній

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}, \quad (3.3)$$

де u – радіальне переміщення.

Виконавши відповідні підстановки перетворюємо систему (3.1) – (3.3) до одного рівняння:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} - \frac{2}{r^2} u = 0. \quad (3.4)$$

Рівняння (3.4) в межах пружної кулі і пружного середовища можна записати у формах

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u_{(1)}) \right] &= 0; \quad (r < r_1); \\ \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u_{(2)}) \right] &= 0; \quad (r \geq r_1). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Розв’язок цієї системи має вигляд

$$\begin{aligned} u_{(1)}(r) &= rC_1 + \frac{1}{r^2} C_2; \quad (r < r_1); \\ u_{(2)}(r) &= rC_3 + \frac{1}{r^2} C_4; \quad (r \geq r_1). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Чотири константи C_1, C_2, C_3, C_4 в рівностях (3.6) можна знайти, використавши умови контакту середовищ та граничні умови

$$u_{(1)}(0) = 0, \quad (3.7)$$

$$u_{(1)}(r_1) = u_{(2)}(r_1), \quad (3.8)$$

$$\sigma_r^{(1)}(r_1) = \sigma_r^{(2)}(r_1), \quad (3.9)$$

$$\sigma_r^{(2)}(r) \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (3.10)$$

Константа

$$C_2 = 0, \quad (3.11)$$

вона визначена з першого рівняння системи (3.6) та рівності (3.7).

Скориставшись рівностями (3.9), (3.10), випишемо формули

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)}(r) &= (\lambda_1 + 2\mu_1) \frac{\partial u_{(1)}}{\partial r} + \frac{2\lambda_1}{r} u_{(1)} - (3\lambda_1 + 2\mu_1) \alpha_1 T = \\ &= (3\lambda_1 + 2\mu_1) C_1 - (3\lambda_1 + 2\mu_1) \alpha_1 T, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(2)}(r) &= (\lambda_2 + 2\mu_1) \frac{\partial u_{(2)}}{\partial r} + \frac{2\lambda_2}{r} u_{(2)} - (3\lambda_2 + 2\mu_2) \alpha_2 T = \\ &= (3\lambda_2 + 2\mu_2) C_3 - \frac{4\mu_2}{r^3} C_4 - (3\lambda_2 + 2\mu_2) \alpha_2 \Delta T. \end{aligned} \quad (3.13)$$

З умови (3.10) та рівняння (3.13) можна знайти

$$C_3 = \alpha_2 T. \quad (3.14)$$

За допомогою рівностей (3.11), (3.14) зведемо систему (3.8), (3.9) до

вигляду

$$\begin{aligned} r_1 C_1 - \frac{1}{r_1^2} C_4 &= r_1 \alpha_2 T; \\ (3\lambda_1 + 2\mu_1) C_1 - \frac{4\mu_2}{r_1^3} C_4 &= (3\lambda_1 + 2\mu_1) \alpha_1 T. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Вона має розв'язок

$$\begin{aligned} C_1 &= \alpha_2 T + \frac{(3\lambda_1 + 2\mu_1)(\alpha_1 - \alpha_2)T}{3\lambda_1 + 2\mu_1 + 4\mu_2}; \\ C_4 &= \frac{r_1^2 (3\lambda_1 + 2\mu_1)(\alpha_1 - \alpha_2)T}{3\lambda_1 + 2\mu_1 + 4\mu_2}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Знайдемо напруження $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_\theta$ в пружному тілі 1, використовуючи знайдені константи

$$\sigma_r^{(1)} = \sigma_\varphi^{(1)} = \sigma_\theta^{(1)} = -\frac{4\mu_2(3\lambda_1 + 2\mu_1)(\alpha_1 - \alpha_2)T}{3\lambda_1 + 2\mu_1 + 4\mu_2} \quad (3.17)$$

та в пружному середовищі 2

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(2)} &= -\frac{4r_1^3 \mu_2 (3\lambda_1 + 2\mu_1)(\alpha_1 - \alpha_2)T}{r^3 (3\lambda_1 + 2\mu_1 + 4\mu_2)}; \\ \sigma_\varphi^{(2)} = \sigma_\theta^{(2)} &= \frac{2r_1^3 \mu_2 (3\lambda_1 + 2\mu_1)(\alpha_1 - \alpha_2)T}{r^3 (\lambda_1 + 2\mu_1 + 4\mu_2)}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Іноді буває зручно розглядати співвідношення (3.17), (3.18), виразивши

їх через модуль пружності E та коефіцієнт Пуассона ν за допомогою формул переходу

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (3.19)$$

Тоді напруження $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_\theta$ в включенні 1 набудуть вигляду:

$$\sigma_r^{(1)} = \sigma_\varphi^{(1)} = \sigma_\theta^{(1)} = -\frac{4E_1E_2(1+\nu_1)(\alpha_1-\alpha_2)T}{E_1(1+\nu_1)(1+\nu_2)+2E_2(1-2\nu_2)} \quad (3.20)$$

і в середовищі 2

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(2)}(r) &= -\frac{2r_1^3}{r^3} \cdot \frac{E_1E_2(1+\nu_1)(\alpha_1-\alpha_2)T}{E_1(1+\nu_1)(1+\nu_2)+2E_2(1-2\nu_2)}; \\ \sigma_\varphi^{(2)}(r) &= \sigma_\theta^{(2)}(r) = \frac{r_1^3}{r^3} \cdot \frac{E_1E_2(1+\nu_1)(\alpha_1-\alpha_2)T}{E_1(1+\nu_1)(1+\nu_2)+2E_2(1-2\nu_2)}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Проаналізувавши формули (3.17), (3.18) або (3.20), (3.21) можна стверджувати, що у включенні 1 термонапруження $\sigma_r^{(1)}, \sigma_\varphi^{(1)}, \sigma_\theta^{(1)}$ є рівними та дорівнюють напруженню $\sigma_r^{(2)}(r_1)$ в середовищі 2 на контакті поверхні $r = r_1$. Вони не залежать від значення r , проте пропорційні різниці $(\alpha_1 - \alpha_2)$ та зростають з збільшенням значень E_1 і E_2 .

Як видно із рівностей (3.21) термонапруження $\sigma_\varphi^{(2)}(r)$ і $\sigma_\theta^{(2)}(r)$ в середовищі 2 у два рази менші за термонапруження $\sigma_r^{(2)}(r)$ та відрізняються лише знаком. Їх значення зменшуються обернено пропорційно кубу відстані

r від центра системи до точки, яка розглядається.

На рис. 3.3 побудовані графіки функцій термонапружень для випадку $\alpha_1 < \alpha_2$, $T > 0$.

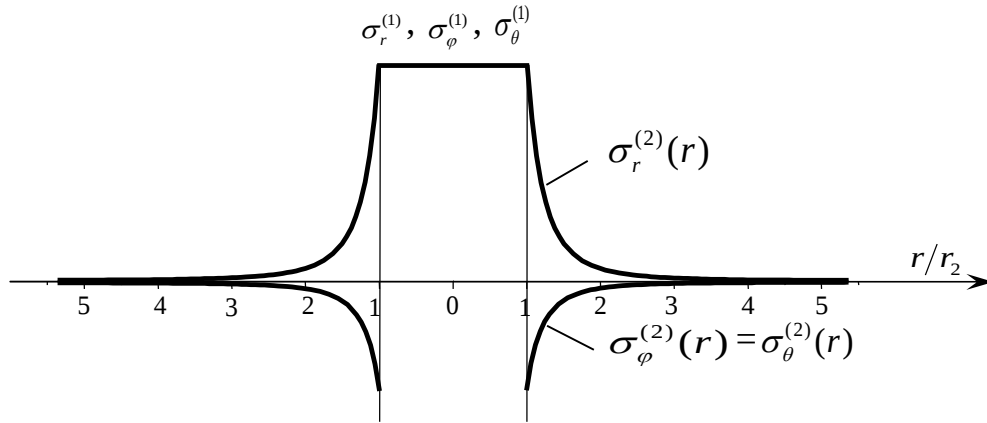


Рисунок 3.3 – Графіки розподілу функцій $\sigma_r^{(i)}$, $\sigma_\phi^{(i)}$, $\sigma_\theta^{(i)}$ ($i=1,2$) у тілі 1 та середовищі 2

Аналіз графіків на рис. 3.3 дозволяє зробити висновок про додаткові термонапруження $\sigma_r^{(2)}(r)$, $\sigma_\phi^{(2)}(r)$, $\sigma_\theta^{(2)}(r)$ в середовищі 2, які викликані різницею КЛТР α_1 і α_2 . Вони мають форму сингулярностей третього порядку. Їх значення залежить від знаків різниці $(\alpha_1 - \alpha_2)$ і температури T , причому одне з напружень обов'язково приймає додатне значення, а інше – від'ємне. Цей факт необхідно враховувати для матеріалів, які піддаються розтягу.

Як приклад розглянемо випадки, коли матеріалами середовища 2 є алюміній і титан, а частинки включень (тіла 1) складаються з алмазу або вольфраму. У табл. 3.1. подані значення термомеханічних параметрів для даним матеріалів.

Таблиця 3.1 – Значення термомеханічних властивостей компонентів композитів

Термомеханічні параметри	Al	Ti	C	W
λ , ГПа	55,5	74,1	306	208
μ , ГПа	25,5	41,4	478	151
α 10^6 , K ⁻¹	22,6	8,6	1,2	4,3

В такій комбінації матеріалів при зміні температури системи на величину $\Delta T = 100^\circ \text{K}$ обчислені значення термонапруження $\sigma_r^{(1)}$, $\sigma_\varphi^{(1)}$ у включенні (тіло 1) та максимальні значення $\sigma_{r,\max}^{(2)}$, $\sigma_{\varphi,\max}^{(2)}$ на поверхні $r = r_1$ в матриці (середовище 2). В табл. 3.2. подані їх значення.

Таблиця 3.2 – Розрахункові значення термонапружень

Комбінація матеріалів	$\sigma_r^{(1)} = \sigma_\varphi^{(1)}$, ГПа	$\sigma_{r,\max}^{(2)}$, ГПа	$\sigma_{\varphi,\max}^{(2)}$, ГПа
C-Al	0,2070	0,2070	-0,1035
W-Al	0,1681	0,1681	-0,0840
C-Ti	0,1125	0,1125	-0,0563
W-Ti	0,0604	0,0604	-0,0302

Як видно з отриманих даних, додаткові внутрішні локалізовані термонапруження алюмінієвого середовища 2, які виникають при несумісності параметрів матриці і включення, мають високі значення при незначній зміні температури. Вони співставні зі значеннями меж міцності для алюмінієвих сплавів, що знаходяться в діапазоні 0,16 – 0,5 ГПа. Цей факт залежить від значення КЛТР $\alpha_2 = 22,6 \cdot 10^{-6} \text{K}^{-1}$.

Для титанового середовища ситуація дещо краща, оскільки в нього КЛТР $\alpha_2 = 8,6 \cdot 10^{-6} \text{K}^{-1}$, однак і в цьому випадку ситуація близька до критичної, тому що для сплавів титану межі міцності лежать у діапазоні

0,7 – 1,05 ГПа

Враховуючи наведені міркування, необхідно взяти до уваги, що в прийнятій моделі розглянуті зерна ідеальної сферичної форми, тоді як реальні армуючі частинки мають грановані форми з ребрами та вершинами, на яких інтенсивність термонапружень суттєво зростає. Однак тут має місце ще одна особливість, яка пов'язана з тим, що додаткові локальні термонапруження зменшуються обернено пропорційно кубу радіуса. Тому велика ймовірність, що в матеріалі металевої матриці в околі зерен виникають пластичні деформації та дефекти, а в матрицях з крихких керамічних або полімерних матеріалів відбувається локальне розтріскування. Таким чином, з великою ймовірністю можна стверджувати, що в матеріалі металевої матриці в околі зерен виникають пластичні деформації та дефекти, в той час як у матрицях з крихких керамічних або полімерних матеріалів відбувається локальне розтріскування. У загальному випадку вони можуть мати прихований характер і не піддаватися виявленню. Крім того необхідно зазначити, що в процесі пружнопластичних і тендітних деформацій рівні термонапружень падають (релаксують), проте локальні дефекти і тріщини, що знижують загальну міцність всього композиту, залишаються.

3.1.3 Зниження рівня концентрації термонапружень шляхом створення порожнини у сферичному включенні

Як впливає з залежностей (3.20), (3.21), рівень концентрації термонапружень на сферичному включенні залежить від значень модулів пружності E_1 і E_2 (жорсткості) контактуючих тіл. Однак радіальну жорсткість тіла можна зменшити створенням в ньому сферичної порожнини 3 (рис. 3.4). Розглянемо як зміниться термонапружений стан системи.

Для цього випадку позначимо r_1 – радіус сферичної порожнини, r_2 –

радіус зовнішньої сферичної поверхні включення 1.

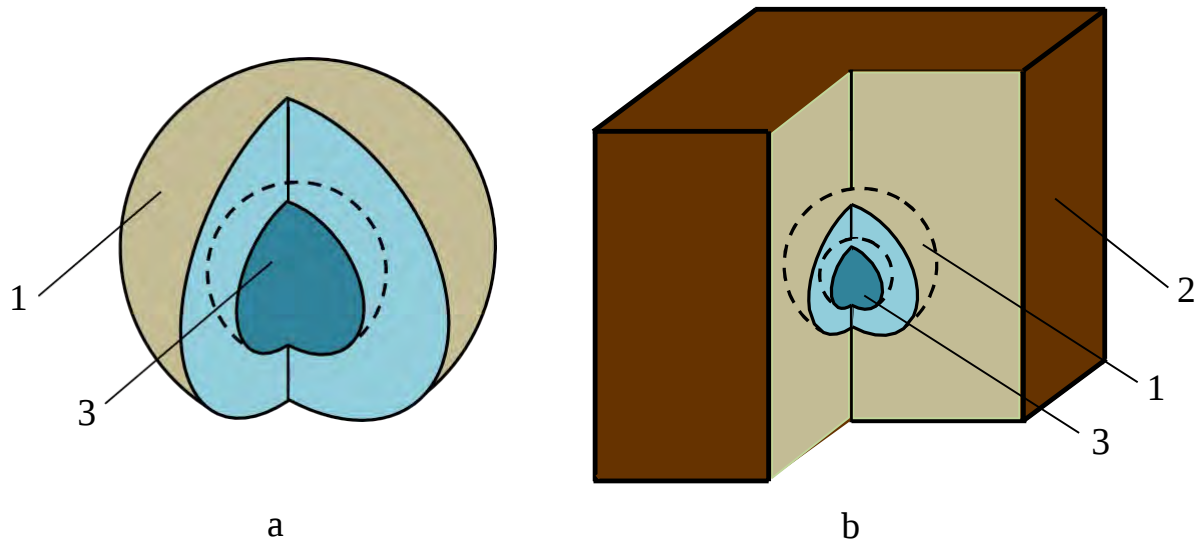


Рисунок 3.4 – Геометрична схема сферичного включення з порожниною

Тоді співвідношення (3.1) – (3.6) зберігають силу, а замість співвідношень (3.7) – (3.10) використовуються умови

$$\sigma_r^{(1)}(r_1) = 0, \quad (3.22)$$

$$u^{(1)}(r_2) = u^{(2)}(r_2), \quad (3.23)$$

$$\sigma_r^{(1)}(r_2) = \sigma_r^{(2)}(r_2), \quad (3.24)$$

$$\sigma_r^{(2)}(r) \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (3.25)$$

З умови (3.25) знову випливає рівність (3.14)

$$C_3 = \alpha_2 T, \quad (3.26)$$

а умови (3.22) – (3.24) зводяться до вигляду

$$\begin{aligned} (3\lambda_1 + 2\mu_1)C_1 - \frac{4\mu_1}{r_1^3}C_2 &= (3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_1 T; \\ r_2 C_1 + \frac{1}{r_2^2}C_2 - \frac{1}{r_2^2}C_4 &= r_2 \alpha_2 T; \\ (3\lambda_1 + 2\mu_1)C_1 - \frac{4\mu_1}{r_2^3}C_2 - \frac{4\mu_2}{r_2^3}C_4 &= (3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_1 T; \\ 2(\lambda_2 + \mu_2)C_3 - (3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2 \Delta T &= 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Розв'язуючи систему (3.27), знайдемо константи

$$\begin{aligned} C_1 &= (\alpha_1 - \alpha_2)T \left(\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{(\mu_2 - \mu_1)}{r_2^3} \right) / \left[\left(\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{(\mu_2 - \mu_1)}{r_2^3} \right) + \frac{4\mu_1\mu_2}{r_1^3(3\lambda_1 + 2\mu_1)} \right] + \alpha_2 T; \\ C_2 &= -(\alpha_1 - \alpha_2)T \mu_2 / \left[\left(\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{(\mu_2 - \mu_1)}{r_2^3} \right) + \frac{4\mu_1\mu_2}{r_1^3(3\lambda_1 + 2\mu_1)} \right]; \\ C_3 &= \alpha_2 T, \\ C_4 &= (\alpha_1 - \alpha_2)T \mu_1 r_2^3 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) / \left[\left(\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{(\mu_2 - \mu_1)}{r_2^3} \right) + \frac{4\mu_1\mu_2}{r_1^3(3\lambda_1 + 2\mu_1)} \right]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Зазначимо, що при $r_1 \rightarrow 0$ тіло 1 стає суцільним і константи (3.28)

приймають значення

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{(3\lambda_1 + 2\mu_1)(\alpha_1 - \alpha_2)T}{3\lambda_1 + 2\mu_1 + 4\mu_2} + \alpha_2 T; \\ C_2 &\rightarrow 0; \\ C_3 &= \alpha_2 T; \\ C_4 &\rightarrow \frac{r_1^3(3\lambda_1 + 2\mu_1)(\alpha_1 - \alpha_2)T}{3\lambda_1 + 2\mu_1 + 4\mu_2}, \end{aligned}$$

відповідні знайденим вище значенням констант для суцільного включення.

Маючи значення констант (3.28), можна обчислити функції термонапружень у включенні 1 і середовищі 2

$$\begin{aligned}
 \sigma_r^{(1)}(r) &= (3\lambda_1 + 2\mu_1)C_1 - \frac{4\mu_1}{r^3}C_2 - (3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_1 T \quad (r_1 \leq r < r_2); \\
 \sigma_\varphi^{(1)}(r) = \sigma_\theta^{(1)}(r) &= (3\lambda_1 + 2\mu_1)C_1 + \frac{2\mu_1}{r^3}C_2 - (3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_1 T \quad (r_1 \leq r < r_2); \\
 \sigma_r^{(2)}(r) &= -\frac{4\mu_2}{r^3}C_4; \quad (r_1 \geq r_2); \\
 \sigma_\varphi^{(2)}(r) = \sigma_\theta^{(2)}(r) &= \frac{2\mu_2}{r^3}C_4; \quad (r_1 \geq r_2).
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Після підстановки в (3.29) виразів (3.28) вони набувають громіздкого вигляду, тому вирази для функцій $\sigma_r^{(1)}$, $\sigma_\varphi^{(1)}$ важко піддаються огляду. Очевидно, для їх аналізу має сенс будувати графіки $\sigma_r^{(1)}(r)$, $\sigma_\varphi^{(1)}(r)$, в кожному конкретному випадку.

Функції $\sigma_r^{(2)}(r)$, $\sigma_\varphi^{(2)}(r)$ виявляються більш простими. Вони мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r^{(2)} &= -\frac{4\mu_1\mu_2(r_2^3 - r_1^3)(\alpha_1 - \alpha_2)T}{r^3} \bigg/ \left[\left(\mu_1 + \frac{r_1^3(\mu_2 - \mu_1)}{r_2^3} \right) + \frac{4\mu_1\mu_2}{3\lambda_1 + 2\mu_1} \right]; \\
 \sigma_\varphi^{(2)} = \sigma_\theta^{(2)} &= \frac{2\mu_1\mu_2(r_2^3 - r_1^3)(\alpha_1 - \alpha_2)T}{r^3} \bigg/ \left[\left(\mu_1 + \frac{r_1^3(\mu_2 - \mu_1)}{r_2^3} \right) + \frac{4\mu_1\mu_2}{3\lambda_1 + 2\mu_1} \right].
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Як і в попередньому випадку, тут додаткові внутрішні $\sigma_r^{(2)}(r)$ і $\sigma_\varphi^{(2)}(r)$

викликані різницею КЛТР порожнього сферичного включення 1 і пружного середовища 2 відрізняються знаками і мають локальний характер, оскільки зменшуються пропорційно кубу відстані, і функції $\sigma_{\varphi}^{(2)}(r)$, $\sigma_{\theta}^{(2)}(r)$ по модулю в два рази менше функції $\sigma_r^{(2)}(r)$.

У табл. 3.3 наведено значення напружень $\sigma_r^{(1)}(r_2) = \sigma_r^{(2)}(r_2)$ і $\sigma_{\varphi}^{(2)}(r_2) = \sigma_{\theta}^{(2)}(r_2)$ для комбінацій вольфрам-алюміній і вольфрам-титан при відношенні $r_1/r_2 = 0.5, 0.75$ і 0.9 .

Таблиця 3.3 – Значення термонапружень для випадків сферичних включень з порожнинами

Комбінація матеріалів	$\sigma_r^{(1)}(r_2) = \sigma_r^{(2)}(r_2)$, ГПа			$\sigma_{\varphi}^{(2)}(r_2) = \sigma_{\theta}^{(2)}(r_2)$, ГПа		
	$\frac{r_1}{r_2} = 0.5$	$\frac{r_1}{r_2} = 0.75$	$\frac{r_1}{r_2} = 0.9$	$\frac{r_1}{r_2} = 0.5$	$\frac{r_1}{r_2} = 0.75$	$\frac{r_1}{r_2} = 0.9$
W-Al	0,1672	0,1397	0,0987	-0,0836	-0,0699	-0,0494
W-Ti	0,05726	0,04718	0,01719	-0,03863	-0,02359	-0,00859

Як приклад розглянемо також композит, сферичні включення якого складаються з карбону з властивостями: $\lambda_1 = 113,35$ ГПа, $\mu_1 = 89,06$ ГПа, границя міцності $[\sigma]_1 = 3500$ МПа, $\alpha_1 = 0,88 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, матриця – сплав D16 із параметрами $\lambda_2 = 58,68$ ГПа, $\mu_2 = 27,61$ ГПа, границя міцності $[\sigma]_2 = 365$ МПа, $\alpha_2 = 2,29 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.

Зміна температури системи складає $\Delta T = 100^\circ \text{C}$. Якщо включення суцільні, то напруження в системі обчислюються за формулами (9), (10). Їх максимальні значення склали: $\sigma_r^{(1)}(r) = \sigma_{\varphi}^{(1)}(r) = \sigma_{\theta}^{(1)}(r) = 128,4$ МПа при

$$r \leq r_1, \sigma_r^{(2)}(r_1) = 128,4 \text{ МПа}, \sigma_\varphi^{(2)}(r_1) = \sigma_\theta^{(2)}(r_1) = -64,2 \text{ МПа}.$$

Введення порожнини у включення призводить до перерозподілу термонапружень у системі. В табл. 3.4 наведені їх значення на характерних поверхнях $r = r_1$ та $r = r_2$ для випадків $r_1/r_2 = 0,5$, $r_1/r_2 = 0,75$, $r_1/r_2 = 0,9$.

Зіставлення цих даних між собою і наведеними вище результатами для суцільного включення дозволяє зробити висновок, що введення порожнини у включення призводить до помітного зменшення внутрішньоструктурних термонапружень у матриці, яка має знижену міцність, та до збільшення напружень у включенні, що не є небезпечним, оскільки його міцність дуже велика. Тому можна вважати, що з точки зору забезпечення термостійкості композита введення порожнини в його включення є раціональним.

Таблиця 3.4 – Термонапруження на інтерфейсних поверхнях порожнистого включення

Вид напруження, МПа	$r_1/r_2 = 0,5$	$r_1/r_2 = 0,75$	$r_1/r_2 = 0,9$
$\sigma_r^{(1)}(r_1)$	0,000	0,000	0,000
$\sigma_\varphi^{(1)}(r_1)$	207,3	253,3	328,9
$\sigma_r^{(1)}(r_2)$	120,9	97,64	59,43
$\sigma_\varphi^{(1)}(r_2)$	146,8	204,5	229,2
$\sigma_r^{(2)}(r_2)$	120,9	97,64	59,43
$\sigma_\varphi^{(2)}(r_2)$	-60,5	-48,82	-29,71

Вони свідчать про те, що, як і слід очікувати, введення порожнини у включення призводить до зниження рівня термонапруження в системі.

3.1.4 Термонапруження в композиті зі сферичним включенням, вкритим пружною оболонкою

Якщо кульове включення 1 матриці 3 композиту вкрито шаром сферичної оболонки 2 (рис. 3.5), то композит являє собою трифазну структуру, що характеризується при постійній температурі дев'ятьма термомеханічними параметрами $\lambda_i, \mu_i, \alpha_i$ ($i=\overline{1,3}$).

У цьому випадку надаються ширші можливості для управління додатковим внутрішнім термонапруженим станом системи за рахунок варіювання її термомеханічних характеристик, хоча завдання при цьому стає менш наочним.

Нехай тіло 1 обмежене сферою радіусу r_1 , оболонка 2 обмежена сферичними поверхнями радіусів r_1 і r_2 середовище 3 із зовнішніх сторін необмежене. Тоді за зміни температури системи на величину T їх термопружний стан визначається рівняннями (3.1) – (3.5).

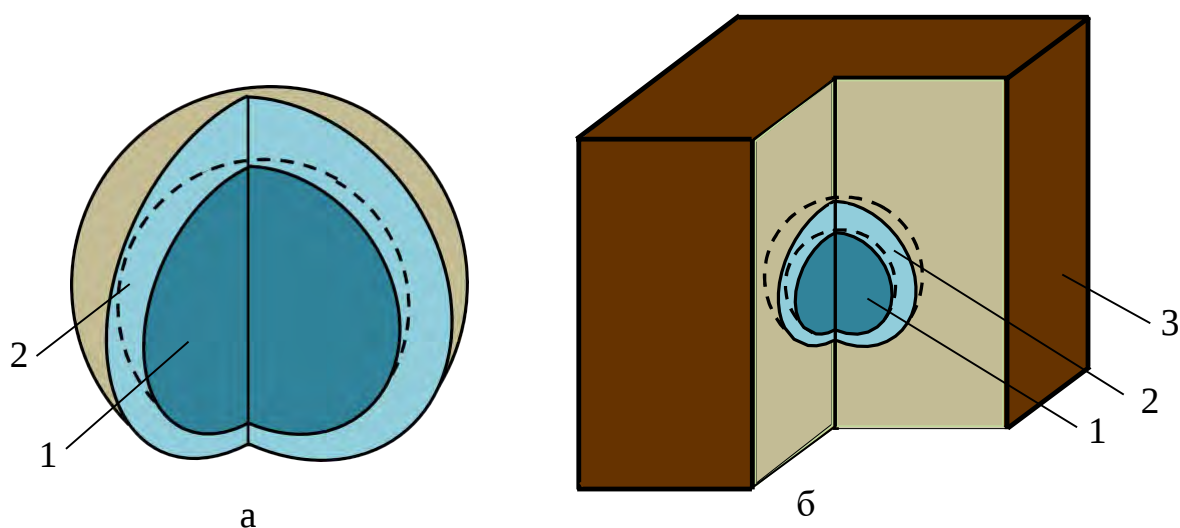


Рисунок 3.5 – Схема композиту зі сферичним включенням, вкритим пружною оболонкою

У межах кожної фази ці рівняння мають розв'язки

$$\begin{aligned} u_{(1)}(r) &= rC_1 + \frac{1}{r^2}C_2; \quad (0 \leq r < r_1); \\ u_{(2)}(r) &= rC_3 + \frac{1}{r^2}C_4; \quad (r_1 \leq r < r_2); \\ u_{(3)}(r) &= rC_5 + \frac{1}{r^2}C_6; \quad (r \geq r_2). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Константи $C_1 \dots C_6$, що сюди входять, знаходяться з крайових і контактних умов

$$u_{(1)}(0) = 0, \quad (3.32)$$

$$u_{(1)}(r_1) = u_{(2)}(r_1), \quad (3.33)$$

$$\sigma_r^{(1)}(r_2) = \sigma_r^{(2)}(r_1), \quad (3.34)$$

$$u_{(2)}(r_2) = u_{(3)}(r_2), \quad (3.35)$$

$$\sigma_r^{(2)}(r_2) = \sigma_r^{(3)}(r_2), \quad (3.36)$$

$$\sigma_r^{(3)}(r) \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad (3.37)$$

За допомогою умови (3.32) отримуємо

$$C_2 = 0. \quad (3.38)$$

Умова (3.33) дає

$$r_1 C_1 = r_1 C_3 + \frac{1}{r_1^2} C_4. \quad (3.39)$$

Щоб використувати умови (3.34) – (3.37), випишемо вирази для напружень

$$\sigma_r^{(1)}(r) = (3\lambda_1 + 2\mu_1)C_1 - (3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_1 T, \quad (3.40)$$

$$\sigma_r^{(2)}(r) = (3\lambda_2 + 2\mu_2)C_3 - \frac{4\mu_2}{r^3} C_4 + \frac{1}{r_2^2} C_2 - (3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2 T, \quad (3.41)$$

$$\sigma_r^{(3)}(r) = (3\lambda_3 + 2\mu_3)C_5 - \frac{4\mu_3}{r^3} C_6 - (3\lambda_3 + 2\mu_3)\alpha_3 T. \quad (3.42)$$

Зі співвідношень (3.37), (3.42) отримуємо

$$C_5 = \alpha_3 T. \quad (3.43)$$

$$\sigma_r^{(3)}(r) = -\frac{4\mu_3}{r^3} C_6. \quad (3.44)$$

За допомогою рівностей (3.43), (3.44) умови (3.34) - (3.36) зводимо до вигляду:

$$\begin{aligned} & (3\lambda_1 + 2\mu_1)C_1 - (3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_1 T = \\ & = (3\lambda_2 + 2\mu_2)C_3 - \frac{4\mu_2}{r_1^3} C_4 - (3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2 T; \\ & r_2 C_3 + \frac{1}{r_2^2} C_4 = r_2 \alpha_3 T + \frac{1}{r_2^2} C_6; \\ & (3\lambda_2 + 2\mu_2)C_3 - \frac{4\mu_2}{r_2^3} C_4 - (3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2 T = -\frac{4\mu_3}{r_2^3} C_6. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Після перетворень системи рівнянь (3.39), (3.45), які опущені через їхню громіздкість, знайдені наступні вирази для констант:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\Delta_3}{\Delta} + \frac{1}{r_1^2} \frac{\Delta_4}{\Delta}; & C_2 &= 0; \\ C_3 &= \frac{\Delta_3}{\Delta}; & C_4 &= \frac{\Delta_4}{\Delta}; \\ C_5 &= \alpha_3 T; & C_6 &= r_2^3 \frac{\Delta_3}{\Delta} + \frac{\Delta_4}{\Delta} - r_2^3 \alpha_3 T, \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \frac{T}{r_1^3} [(3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2 - \mu_3\alpha_2] \cdot [(3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2 + 4\mu_2] - \\ &\quad - \frac{4T}{r_2^3} [(3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_1 - (3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2] (\mu_3 - \mu_2); \\ \Delta_3 &= T(3\lambda_2 + 2\mu_2 + 4\mu_3) \cdot [(3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_1 - (3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2] - \\ &\quad - T[(3\lambda_1 + 2\mu_1) - (3\lambda_2 + 2\mu_2)] \cdot [(3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2 - \mu_3\alpha_3]; \\ \Delta &= \frac{1}{r_1^3} (3\lambda_2 + 2\mu_2 + 4\mu_3) \cdot (3\lambda_1 + 2\mu_1 + 4\mu_2) - \\ &\quad - \frac{4}{r_2^3} [(3\lambda_1 + 2\mu_1) - (3\lambda_2 + 2\mu_2)] (\mu_3 - \mu_2). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Маючи значення констант (3.37), можна обчислити функції додаткових внутрішніх термонапружень

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(2)}(r) &= (3\lambda_2 + 2\mu_2) \left(\frac{\Delta_3}{\Delta} - \alpha_2 T \right) - \frac{4\mu_2}{r^3} \frac{\Delta_4}{\Delta}; & (r_1 \leq r \leq r_2); \\ \sigma_\varphi^{(2)}(r) &= \sigma_\theta^{(2)}(r) = \frac{2\mu_2}{r^3} \frac{\Delta_4}{\Delta}; & (r_1 \leq r \leq r_2); \\ \sigma_r^{(3)}(r) &= -\frac{4\mu_3}{r^3} \left[r_2^3 \left(\frac{\Delta_3}{\Delta} - \alpha_3 T \right) + \frac{\Delta_4}{\Delta} \right]; & (r > r_2); \\ \sigma_\varphi^{(3)}(r) &= \sigma_\theta^{(3)}(r) = \frac{2\mu_3}{r^3} \left[r_2^3 \left(\frac{\Delta_3}{\Delta} - \alpha_3 T \right) + \frac{\Delta_4}{\Delta} \right]; & (r > r_2). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Тут також напруження $\sigma_r^{(3)}(r)$ і $\sigma_\varphi^{(3)}(r) = \sigma_\theta^{(3)}(r)$ мають різні знаки, причому радіальні напруження вдвічі більші за колові.

Проаналізуємо вплив покриваючого шару сферичного включення на термодформування середовища при зміні температури системи на величину $\Delta T = 100^\circ \text{C}$ (рис. 3.5). Покладемо, що, як і раніше, матеріал включення – карбон, середовище – сплав D16, їх властивості наведено вище. На включення нанесено шар із титану, значення термомеханічних параметрів якого такі: $\lambda_2 = 91,98$ ГПа, $\mu_2 = 43,28$ ГПа, $[\sigma]_2 = 140$ МПа, $\alpha_2 = 0,85 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.

У табл 3.5 наведено значення термонапружень на поверхнях контакту фаз системи для відношень $r_1/r_2 = 0,5$, $r_1/r_2 = 0,75$, $r_1/r_2 = 0,9$. Як видно, нанесення додаткового титанового покриття на карбонову кульку не суттєво впливає на термонапружений стан системи. Цей ефект можна пояснити близькістю значень їх коефіцієнтів $\alpha_1 = 0,88 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ і $\alpha_2 = 0,85 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.

Таблиця 3.5 – Термонапруження на інтерфейсних поверхнях включення з покриваючим шаром у матриці зі сплаву D16

Вид напруження, МПа	$r_1/r_2 = 0,5$	$r_1/r_2 = 0,75$	$r_1/r_2 = 0,9$
$\sigma_r^{(1)}(r_1)$	129,1	129,9	130,8
$\sigma_\varphi^{(1)}(r_1)$	129,1	129,9	130,8
$\sigma_r^{(2)}(r_1)$	129,1	129,9	130,8
$\sigma_\varphi^{(2)}(r_1)$	115,6	116,3	117,0
$\sigma_r^{(2)}(r_2)$	126,7	124,7	122,7
$\sigma_\varphi^{(2)}(r_2)$	116,8	118,9	121,0
$\sigma_r^{(3)}(r_2)$	126,7	124,7	122,7
$\sigma_\varphi^{(3)}(r_2)$	-63,3	-62,3	-61,4

Якщо різниця між коефіцієнтами α_1 та α_2 очевидна, то роль покриву у формуванні додаткових внутрішньоструктурних полів термонапружень виявляється більш істотною. Як приклад розглянемо комбінацію карбон – включення, покриву – сплав D16, мідна матриця. Термомеханічні властивості карбону і сплаву D16 наведено вище, для міді вони складають: $\lambda_3 = 95,06$ ГПа; $\mu_3 = 40,74$ ГПа; $[\sigma]_3 = 210$ МПа; $\alpha_3 = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$. Термонапруження для цього випадку при $\Delta T = 100^\circ \text{C}$ наведено в табл. 3.6.

Таблиця 3.6 – Термонапруження на інтерфейсних поверхнях включення з покриваючим шаром у мідній матриці

Вид напруження, МПа	$r_1/r_2 = 0,5$	$r_1/r_2 = 0,75$	$r_1/r_2 = 0,9$
$\sigma_r^{(1)}(r_1)$	89,75	76,75	64,64
$\sigma_\varphi^{(1)}(r_1)$	89,75	76,75	64,64
$\sigma_r^{(2)}(r_1)$	89,75	76,75	64,64
$\sigma_\varphi^{(2)}(r_1)$	-92,43	-101,95	-110,80
$\sigma_r^{(2)}(r_2)$	56,84	7,87	-37,70
$\sigma_\varphi^{(2)}(r_2)$	-75,98	-67,51	-59,63
$\sigma_r^{(3)}(r_2)$	56,84	7,87	-37,64
$\sigma_\varphi^{(3)}(r_2)$	-28,42	-3,94	18,82

Відмітимо, що у відповідній системі без покриваючого шару термонапруження на поверхні $r = r_1$ складають $\sigma_r^{(1)}(r_1) = \sigma_\varphi^{(1)}(r_1) = \sigma_r^{(2)}(r_1) = 101,66$ МПа, $\sigma_\varphi^{(2)}(r_1) = -50,83$ МПа. Додавання в цю систему покриваючого шару дає змогу помітно їх знизити, причому зі збільшенням товщини шару вони продовжують ще більше зменшуватися, а при деяких геометричних співвідношеннях вони обертаються на нуль і змінюють знаки.

Таким чином в умовах зміни температури композита зі сферичними включеннями, покритими пружною оболонкою, вплив додаткового шару на термодетормування системи може відбуватися під дією двох факторів. По-перше, суттєву роль відіграє модуль пружності інтерфейсу. Так, при збільшенні пружної податності шару він може слугувати прокладкою, що нейтралізує або знижує деформаційний вплив більш жорсткого включення на матрицю. По-друге, позитивний ефект може досягатися завдяки спеціальному підбору коефіцієнта термічного розширення прокладки, що дозволяє за рахунок її заданої усадки чи дилатації компенсувати неузгодження термічних деформацій включення і матриці.

3.1.5 Концентрація термонапружень на поверхні сферичної пори

Випадок концентрації термонапружень на поверхні сферичної пори 1 радіуса r_1 (рис. 3.6) є найбільш простим для аналізу, але він також заслуговує на увагу [244].

Очевидно, що якщо переміщення на зовнішній межі однорідного середовища 2 нічим не обмежені, то при однакових значеннях температури T у всіх точках середовища додаткові термонапруження в цьому середовищі дорівнюють нулю. Однак якщо на деякому достатньому віддаленні від пори (у розрахунках прийнято, що на нескінченності) на переміщення накладені в'язі, то в доповнені до загальних термонапружень на поверхні пори виникнуть додаткові концентратори напружень. Обчислимо ці напруження.

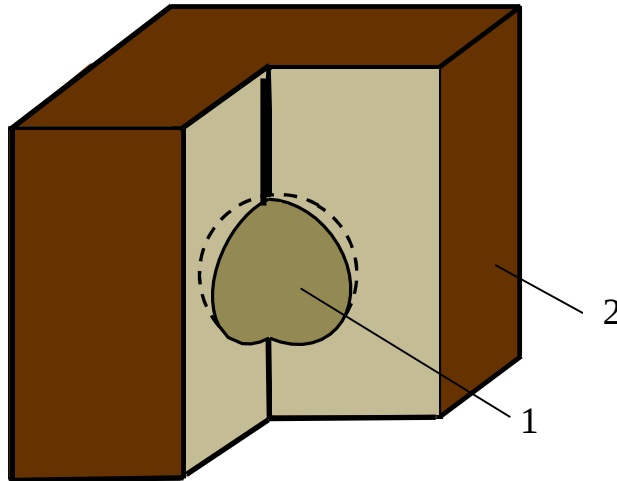


Рисунок 3.6 – Геометрична схема сферичної порожнини в нескінченному пружному середовищі

Як і в попередніх випадках, термонапружений стан середовища 2 визначається рівняннями (3.1) – (3.5) і розв’язок цієї системи має вигляд

$$u(r) = rC_1 + \frac{1}{r^2}C_2. \quad (3.49)$$

Тут константи C_1 і C_2 обчислюються, виходячи з умов на поверхні пори $r = r_1$

$$\sigma_r(r_1) = 0 \quad (3.50)$$

і на нескінченності

$$u(r) \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (3.51)$$

На базі рівностей (3.2) та (3.49) отримуємо

$$\begin{aligned}
\sigma_r(r) &= (3\lambda + 2\mu)C_1 - \frac{4\mu}{r^3}C_2 - (3\lambda + 2\mu)\alpha T; \\
\sigma_\varphi(r) &= \sigma_\theta(r) = (3\lambda + 2\mu)C_1 + \frac{2\mu}{r^3}C_2 - (3\lambda + 2\mu)\alpha T.
\end{aligned}
\tag{3.52}$$

Тоді за допомогою формул (3.49), (3.52) з умов (3.50), (3.51) виводимо

$$C_1 = 0; \quad C_2 = -\frac{r_1^3}{4\mu}(3\lambda + 2\mu)\alpha T. \tag{3.53}$$

В цьому випадку

$$\begin{aligned}
\sigma_r(r) &= \frac{r_1^3}{r^3}(3\lambda + 2\mu)\alpha T - (3\lambda + 2\mu)\alpha T; \\
\sigma_\varphi(r) &= \sigma_\theta(r) = -\frac{r_1^3}{2r^3}(3\lambda + 2\mu)\alpha T - (3\lambda + 2\mu)\alpha T; \quad (r \geq r_1).
\end{aligned}
\tag{3.54}$$

Графіки цих напружень наведено на рис. 3.7.

При $r \rightarrow \infty$ $\sigma_r(\infty) = \sigma_\varphi(\infty) = \sigma_\theta(\infty)$ і всі вони прямують до величини $\sigma(\infty) = -(3\lambda + 2\mu)\alpha T$. Тому замість рівностей (3.54) можемо записати

$$\begin{aligned}
\sigma_r(r) &= \sigma(\infty) \left(1 - \frac{r_1^3}{r^3} \right); \\
\sigma_\varphi(r) &= \sigma_\theta(r) = \sigma(\infty) \left(1 + \frac{r_1^3}{2r^3} \right).
\end{aligned}
\tag{3.55}$$

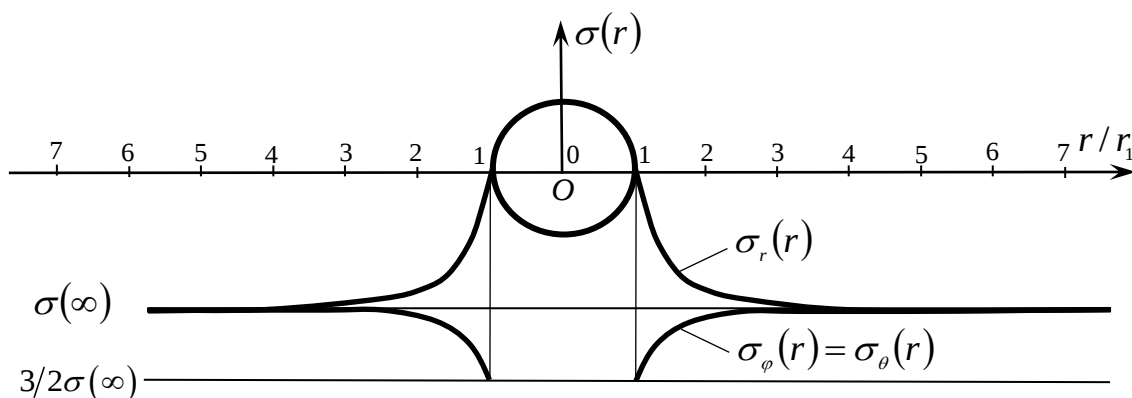


Рисунок 3.7 – Графіки розподілу термонапружень в пружному середовищі зі сферичною порожниною

Вони свідчать, що наявність сферичної порожнини для пружного середовища з обмеженнями на нескінченності призводить до локального зменшення радіальних термонапружень, але супроводжується локальним збільшенням колових термонапружень $\sigma_\phi(r) = \sigma_\theta(r)$, які зростають в 1,5 рази.

3.1.6 Прояв принципу Сен Венана у побудованих розв'язаннях та підтвердження достовірності отриманих результатів

Побудовані поля термонапружень в околі сферичних включень різної структури перебувають в узгодженні відповідно до принципів Сен Венана, який був встановлений у теорії пружності в 1855 р. Пізніше цей принцип у різних редакціях викладали R. Mises, A. Love та J. Boussinesq для плоских і трьохмірних пружних тіл. Наведемо деякі формулювання цього принципу:

1. Різниця між ефектами двох різних, але статично еквівалентних навантажень стає дуже малою на досить великій відстані від навантажень. При цьому відмінності в їх полях напружень і деформацій залишаються помітними лише поблизу області прикладання навантажень.

2. Якщо сили, які діють на малій ділянці поверхні пружного тіла,

замінити іншою статично еквівалентною системою сил (тобто з таким же головним вектором і головним моментом), що діє на тій самій ділянці, то цей перерозподіл навантаження призведе до суттєвих змін напружень тільки поблизу цієї ділянки.

3. Напруження, які викликані в пружному середовищі системою навантажень з нульовим головним вектором і моментом, зменшується при віддаленні від місця прикладання навантажень пропорційно величині r^{-k} , де r – характерний розмір зони прикладання навантажень, k – показник, рівний двом для плоского пружного середовища і трьом – для тривимірного випадку.

Цей принцип у третьому формулюванні повністю реалізується у задачах, які розглянуті у цьому підрозділі для сферичних включень, з боку яких на контактну поверхню середовища діє зрівноважена система нормальних, радіально направлених напружень $\sigma_r^{(1)}(r_1)$ (чи $\sigma_r^{(1)}(r_1)$). Як випливає з формул (3.36), (3.48) і (3.34), викликані цими силами напруження $\sigma_r(r)$ і $\sigma_\varphi(r)$ в середовищі зменшуються пропорційно величині r^{-3} . Наочне уявлення цієї особливості дають рис. 3.3 та 3.7. Підкреслимо також, що встановлені ефекти є одним із факторів, які підтверджують достовірність одержаних результатів.

3.2 Концентрація термонапружень на поверхні мінеральних включень в асфальтобетоні

Оскільки асфальтобетон також є композитним матеріалом, при зміні його температури в ньому провокуються термонапруження, інтенсивність яких пропорційна рівню несумісності термомеханічних характеристик його фракцій. Для їх аналізу може бути застосована змінена в попередньому підрозділі методика термопружного моделювання термдеформування

композитів із урахуванням того, що при позитивних за Цельсієм температурах бітум, що входить до складу цього матеріалу, проявляє в'язкопружні властивості. Тому, при розрахунках будемо використовувати зведені значення характеристик матеріалів, що розглядаються, враховуючи, що їх результати в більшій мірі відповідають випадкам понижених температур.

Для аналізу впливу несумісності термомеханічних параметрів матеріалу покриву на ініціювання в ньому додаткових внутрішніх термонапружень вибрана розрахункова модель, що складається із нескінченного бітумного середовища з внутрішнім кулеподібним кам'яним включенням 1 (рис. 3.8). Системі надається додатній чи від'ємний приріст температури ΔT і за допомогою отриманих в підрозділі 3.1 формул (3.20), (3.21) визначаються поля додаткових приростів та термонапружень в системі, а також можливий характер внутрішніх термічних пошкоджень.

Дослідження проводиться в сферичній системі координат з початком, що співпадає з центром включення 1, радіус якого дорівнює r_1 . При розрахунках прийнято, що бітумне середовище обмежене сферичною поверхнею радіусом r_2 , який прямує до нескінченності.

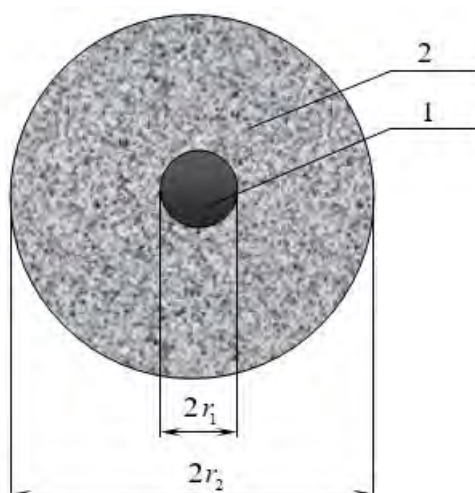


Рисунок 3.8 – Схема сферичного включення 1 в асфальтобетоні 2

Випишемо ще раз формули (3.20), (3.21) для термонапружень в тілі 1

$$\sigma_r^{(1)} = \sigma_\varphi^{(1)} = \sigma_\theta^{(1)} = -\frac{2E_1E_2(1+\nu_1)(\alpha_1-\alpha_2)T}{E_1(1+\nu_1)(1+\nu_2)+2E_2(1-2\nu_2)} \quad (3.56)$$

і в середовищі 2

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(2)}(r) &= -\frac{2r_1^3}{r^3} \cdot \frac{E_1E_2(1+\nu_1)(\alpha_1-\alpha_2)T}{E_1(1+\nu_1)(1+\nu_2)+2E_2(1-2\nu_2)}; \\ \sigma_\varphi^{(2)}(r) = \sigma_\theta^{(2)}(r) &= \frac{r_1^3}{r^3} \cdot \frac{E_1E_2(1+\nu_1)(\alpha_1-\alpha_2)T}{E_1(1+\nu_1)(1+\nu_2)+2E_2(1-2\nu_2)}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Їх попередній аналіз свідчить про те, що включення 1 знаходиться в однорідному (гідростатичному) термонапруженому стані. При $(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T > 0$ це тіло відчуває стискаючі напруження, які не залежать від напрямку та однакові у всіх точках. Якщо $(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T < 0$, тоді напруження виявляються розтягуючими.

В бітумному середовищі 2 на контактній поверхні $r = r_1$ радіальні напруження $\sigma_r^{(2)}(r_1)$ дорівнюють напруженням $\sigma_r^{(1)}(r_1)$ в тілі 1 та з віддаленням цієї поверхні вони швидко спадають обернено пропорційно кубу радіуса r . При цьому колові термонапруження $\sigma_\varphi^{(2)}(r)$ і $\sigma_\theta^{(2)}(r)$ вдвічі менші за радіальні і мають порівняно з ними протилежні знаки.

З відміченими особливостями полів термонапружень пов'язана специфіка термдеформування цієї системи. Справа в тому, що бітум по-різному опирається розтягуючим та стискаючим напруженням, володіючи малою міцністю при розтягуванні. Але оскільки при довільному знаку різниці $(\alpha_1 - \alpha_2)$ величина $(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T$ може мати довільні знаки у зв'язку з можливістю підвищення та пониження температури T , розтягуючі радіальні

(σ_r) або колові $(\sigma_\varphi, \sigma_\theta)$ термонапруження обов'язково є розтягуючими. В загальному випадку при великій різниці, значних перепадах температури ΔT та спільній дії транспортних навантажень ці напруження можуть призводити до локальних пружно-пластичним деформацій бітуму. Для перевірки такої можливості обчислені напруження (3.56), (3.57) при найбільш типових значеннях температурних параметрів E_1 , $[\sigma_1]_{\text{міц}}$, α_1 , ν_1 кам'яних включень та E_2 , $[\sigma_2]_{\text{міц}}$, α_2 , ν_2 бітумної матриці, наведених в табл. 3.7 та 3.8

Таблиця 3.7 – Значення термомеханічних параметрів кам'яних порід

	Кам'яна порода	E_1 , ГПа	$[\sigma_1]_{\text{міц}}$, МПа	ν_1	$10^5 \alpha_1$, $1/^\circ \text{C}$
1	Граніт	40-70	90-120	0,2-0,3	0,44
2	Вапняк	20-70	40-90	0,2-0,3	0,33
3	Мармур	50-100	80-140	0,2-0,3	0,56
4	Піщаник	5-15	5-150	0,2-0,3	0,65

Розрахунки виконані при значеннях температури $T = -20, -30$ та -40°C для її можливого добового приросту $\Delta T = 12^\circ \text{C}$. Було розглянуто п'ять комбінацій матеріалів та температури з табл. 3.7 та 3.8. Результати обчислень подано в табл. 3.9. В позиціях 1, 2 та 5 цієї таблиці для включення 1 були вибрані найменші значення модулів пружності E_1 , в позиціях 3 і 4 для вапняку – найбільше значення $E_1 = 70$ ГПа.

Таблиця 3.8 – Значення термомеханічних параметрів бітуму

	T , $^\circ \text{C}$	E_2 , ГПа	$[\sigma_2]_{\text{міц}}$, МПа	ν_2	$10^5 \alpha_2$, $1/^\circ \text{C}$
1	20	0,6	-	0,5-0,45	1,72-2,23
2	10	1,4	-	0,5-0,45	1,72-2,23
3	0	3,2	2,5	0,5-0,45	1,72-2,23
4	-10	11	3,6	0,35	1,72-2,23
5	-20	56	4,0	0,35	1,72-2,23
6	-30	316	1,9	0,35	1,72-2,23
7	-40	1413	1,8	0,35	1,72-2,23

Таблиця 3.9 – Розрахункові значення термонапружень в бітумному середовищі на контактній поверхні $r = r_1$

	Кам'яна порода	$T, ^\circ\text{C}$	$\sigma_r^{(1)} = \sigma_r^{(2)}(r_1),$ МПа	$\sigma_\varphi^{(2)}(r_1),$ МПа	$[\sigma_1]_{\text{min}}, \text{МПа}$
1	Граніт	-20	0,01128	-0,00564	4,0
2	Граніт	-30	0,06348	-0,03174	1,9
3	Вапняк	-30	0,10491	-0,05246	1,9
4	Вапняк	-40	0,46699	-0,23344	1,8
5	Піщаник	-40	0,35247	-0,17623	1,8

При аналізі отриманих даних необхідно відмітити, що обрані для аналізу матеріали тіла 1 та бітуму 2 відрізняються не співставною різницею жорсткостей (модулів пружності). Тому включення 1 у всіх випадках відіграє роль абсолютно твердого тіла і зміна величини E_1 для різних кам'яних порід практично не впливає на рівень напруженого стану бітумного середовища, яке в основному, залежить від її модуля пружності та різниці значень коефіцієнтів лінійного розширення $(\alpha_1 - \alpha_2)$. В той же час ці коефіцієнти для обох фракцій відрізняються не суттєво, вони одного знаку та мають однаковий порядок. Тому додаткові термонапруження, що ініціюються в бітумі при вибраних умовах термічного впливу відносно малі і не співставні з їх граничними напруженнями, хоча вони можуть внести свій вклад в порушення міцності асфальтобетонного матеріалу в дорожньому одязі при спільній дії з транспортним навантаженням.

Крім всього цього дослідження виконано на базі моделі самотнього включення ідеальної сферичної форми. Тому додаткова концентрація полів термонапружень на геометричних нерегулярностях форми включень та їх спільне накладання на сусідні концентратори мають привести до їх помітного зростання.

3.3 Теоретичне моделювання зародження внутрішніх прихованих термодефектів у бітумному середовищі з гумовими включеннями

3.3.1 Аналіз переваг та недоліків армуючих гумових включень у бітумному середовищі

В даний час у світі все гостріше стає проблема утилізації відходів виробництва гуми, зокрема, гумових автомобільних шин, оскільки при їх захороненні та відкритому зберіганні відбувається забруднення повітря, стічних вод та ґрунтів шкідливими та отруйними продуктами їх розпаду [38, 85, 124, 189, 220, 223, 236, 247]. Одна з тенденцій цього напрямку пов'язана з можливістю використання подрібненої гуми як добавки до асфальтобетонного матеріалу дорожніх покриттів [26, 42, 92, 105, 166, 179, 203, 255, 268, 293]. Перші експерименти щодо створення таких матеріалів проводилися давно. У різних країнах та регіонах були побудовані експериментальні ділянки доріг та аеродромів із гумовою крихтою. Спочатку вони показували досить високі характеристики, відзначалася їх підвищена тріщиностійкість, водостійкість, зниження на них рівня вібрацій і шуму, зменшення гальмівного шляху та ін. Але потім цей матеріал почав зарекомендовувати себе з негативного боку, оскільки такий асфальтобетон виявився схильним до швидкого старіння, розуцільнення та руйнування. При цьому гумова крихта, не пов'язана з бітумом міцними зв'язками, викришувалася з покриття і практично в незмінному вигляді розносилася вітром, забруднюючи околиці.

Щоб усунути зазначений недолік, крихту стали модифікувати перед введенням її в бітум для утворення розвиненого міжфазного шару на межі фаз гумова крихта - бітум і підвищення адгезії в'язучого до мінеральних складових асфальтобетону [65, 109, 138, 204, 243]. Модифіковані таким

чином бітум і крихта є однорідною сумішшю окисленого дорожнього бітуму з досить дрібнодисперсною крихтою з гум загального призначення, підданій спеціальній хімічній обробці в процесі виготовлення. У цьому випадку частки гуми повністю не розкладаються і не розчиняються, а зв'язуються з міцними компонентами бітуму, але досить гнучкими хімічними зв'язками і виявляють свої якості навіть у складі нового матеріалу. При цьому крупність зерен – не більше 1 мм і за обсягом вони займають 5% – 7% від загального обсягу суміші. У той же час, спроби збільшення розмірів зерен (до 1 см і більше) і об'ємного відсоткового складу суміші (до 20% і більше) зазвичай призводили до негативного результату. Очевидно, це пов'язано з особливими термомеханічними властивостями, якими володіє гума (як гіперпружний матеріал), і тією роллю, яку грає тонкий міжфазний шар на поверхнях малих та чималих зерен включень при зміні температури системи [31, 115, 193, 201].

Зазначимо, що зазвичай гуми мають малий модуль пружності ($E = 1 \div 10 \text{ МПа}$), проте дуже великий коефіцієнт Пуассона. Так, для більшості каучуків він дорівнює $\nu = 0,5$, для вулканізованої гуми він складає $\nu = 0,48 \div 0,5$. Тому при деформаціях гумового тіла, пов'язаних із зміною його форми, гумі властиві дуже мала жорсткість та висока еластичність. Ця властивість проявляється при одновісних та двовісних силових навантаженнях гумових тіл, а також при їх зсувних деформаціях.

При спробах деформування гуми зі зміною її об'єму, але зі збереженням форми, для неї характерна велика жорсткість, оскільки $\nu = 0,5$. Тому з інженерної точки зору гума вважається нестисливим матеріалом. Ця властивість характерна для її тривимірного термонапруженого деформування при змінах температури в обмеженому об'ємі та тривісних силових впливах, що призводять до всебічного обтискання. Як показано нижче, нестискання гуми не дозволяє їй пружно компенсувати термічні деформації бітуму, через

що в ньому виникають додаткові термічні напруження. Завдяки тому, що на поверхні крихти при контакті з бітумом утворюється міжфазний шар малої товщини, що стискається, він при малих розмірах крихти в деякій мірі знімає термонапруження за рахунок власної податливості. На великих включеннях тонкий м'який шар не може компенсувати їх жорсткість і на їх поверхнях генеруються великі термонапруження, які призводять до локальних пластичних деформацій, дефектів і тріщин в бітумі.

До цих характеристик гуми необхідно додати ще одну її особливість. Справа в тому, що і при помірних значеннях температури, її коефіцієнт температурного розширення змінюється в широких межах, приймаючи нульові і навіть від'ємні значення. У той же час при високих температурах (150°C і вище) її коефіцієнт температурного розширення за допомогою утворення у ній порів, заповнених парою, значно більше значень цього коефіцієнта інших матеріалів [209, 267]. Така несумісність термомеханічних параметрів бітуму та гуми є додатковим фактором, що сприяє концентрації термонапруженості на поверхнях контакту бітуму з великими гумовими включеннями та їх відшарування. Для дослідження цього ефекту на основі теорії термопружності розроблено математичну модель термонапруженого стану асфальтобетонного середовища зі сферичними гумовими включеннями під дією температурних збурень, сформульовано розв'язувальні диференціальні рівняння, знайдено їх розв'язок в замкнутій формі. Аналіз побудованих полів термонапружень дозволив встановити основні особливості зародження вихідних мікродефектів у композитному матеріалі, армованому гумовими крихтами.

Оцінюючи побудовані розв'язки, необхідно враховувати, що вони отримані шляхом використання методів теорії пружності, тоді як бітум і гума є в'язкоупружними матеріалами. Тому ці розв'язки, хоч і відображають отримані закономірності деформування їхньої комбінації, при розрахунку

реальних дорожніх покривів мають бути уточнені. Таке узгодження розв'язків може бути виконане на основі принципу відповідності розв'язків задач теорії пружності та в'язкопружності, викладеного в роботах L. Khazanovich [186] та G.H. Paulino, Z.-H. Jin [225].

3.3.2 Термонапружений стан асфальтобетонного матеріалу зі сферичним гумовим включенням

Для встановлення загальних закономірностей розподілу полів термонапружень у бітумному середовищі з гумовими включеннями будемо використовувати модель кулястого пружного тіла 1 радіуса r_1 , пов'язаного на своїй поверхні $r = r_1$ з пружним середовищем 2 (рис. 3.9), для якої радіус r_2 на зовнішній граничній сферичній поверхні може набувати нескінченно великі значення.

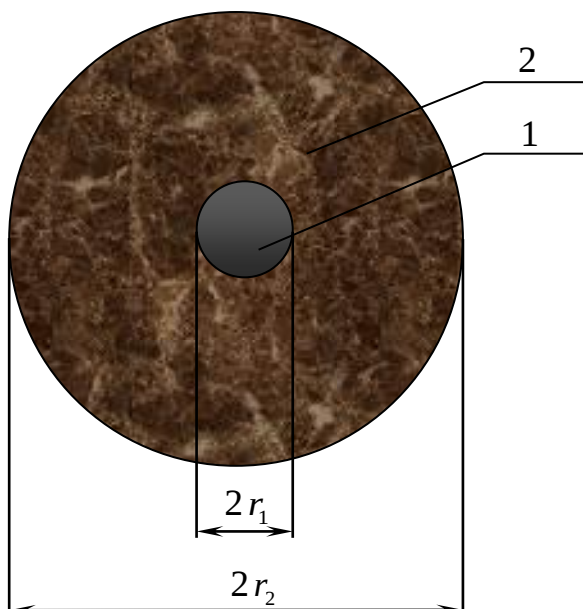


Рисунок 3.9 - Схема сферичного пружного включення 1 у пружному середовищі 2

Розглянемо термопружну рівновагу системи, коли її температура у всіх точках стаціонарно змінюється від 0 до T . Нехай термомеханічні властивості тіла 1 і середовища 2 характеризуються значеннями їх модулів пружності E_1 та E_2 , коефіцієнтів Пуассона ν_1 і ν_2 та коефіцієнтів їх лінійного температурного розширення α_1 і α_2 . Описуватимемо термічне деформування системи у сферичній системі координат $Or\varphi\theta$, початок O якої збігається з центром тіла 1 (рис. 3.10).

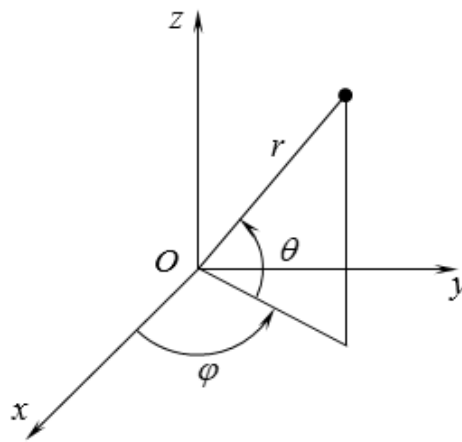


Рисунок 3.10 - Схема сферичної системи координат

Деформований стан пружної системи в цих координатах має властивість центральної симетрії, тому її рівновага описується двома рівняннями [188, 218, 219]

$$\frac{d\sigma_r^{(i)}}{dr} + \frac{2\sigma_r^{(i)} - \sigma_\varphi^{(i)} - \sigma_\theta^{(i)}}{r} = 0; \quad (i=1,2),, \quad (3.58)$$

де $\sigma_r^{(i)}, \sigma_\varphi^{(i)}, \sigma_\theta^{(i)}$ – нормальні напруження на відповідних елементарних майданчиках $r = const, \varphi = const, \theta = const$ в тілі 1 при $i=1$ і в середовищі 2 при $i=2$. Вони виражаються через компоненти тензора відносних

деформацій $\varepsilon_r^{(i)}$, $\varepsilon_\varphi^{(i)} = \varepsilon_\theta^{(i)}$:

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(i)} &= \frac{E_i(1-\nu_i)}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} \varepsilon_r^{(i)} + \frac{2E_i\nu_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} \varepsilon_\varphi^{(i)} - \frac{E_i}{(1-2\nu_i)} \alpha_i T; \\ \sigma_\varphi^{(i)} = \sigma_\theta^{(i)} &= \frac{E_i\nu_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} \varepsilon_r^{(i)} + \frac{E_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} \varepsilon_\varphi^{(i)} - \frac{E_i}{(1-2\nu_i)} \alpha_i T; \quad (i=1,2).\end{aligned}\quad (3.59)$$

Тут необхідно підкреслити, що у правих частинах цих виразів усі доданки у знаменниках містять множник $(1-2\nu_i)$. Оскільки для гуми $\nu \approx 0,5$, всі ці доданки діляться на малу величину, і на цьому рівні вноситься особлива специфіка термомеханічного поведінки гуми.

Деформації, що використовуються в (3.59), визначаються через радіальне переміщення $u^{(i)}$

$$\varepsilon_r^{(i)} = \frac{du^{(i)}}{dr}; \quad \varepsilon_\varphi^{(i)} = \frac{u^{(i)}}{r}; \quad (i=1,2). \quad (3.60)$$

За допомогою цих рівностей зведемо вирази (3.59) до виду

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(i)}(r) &= \frac{E_i(1-\nu_i)}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} \frac{du^{(i)}}{dr} + \frac{2E_i\nu_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} \frac{u^{(i)}}{r} - \frac{E_i}{(1-2\nu_i)} \alpha_i T; \\ \sigma_\varphi^{(i)} = \sigma_\theta^{(i)} &= \frac{E_i\nu_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} \frac{du^{(i)}}{dr} + \frac{E_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} \frac{u^{(i)}}{r} - \frac{E_i}{(1-2\nu_i)} \alpha_i T; \quad (i=1,2).\end{aligned}\quad (3.61)$$

Після підстановки (3.61) у (3.58) отримуємо рівняння

$$\frac{d^2 u^{(i)}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du^{(i)}}{dr} - \frac{2}{r^2} u^{(i)}; \quad (i=1,2). \quad (3.62)$$

Зведемо їх до форми, зручної для інтегрування

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 u^{(i)}) \right] = 0; \quad (i = 1, 2). \quad (3.63)$$

Система (3.63) має розв'язок

$$\begin{aligned} u^{(1)}(r) &= rC_1^{(1)} + \frac{1}{r^2} C_1^{(2)}; \quad (r \leq r_1); \\ u^{(2)}(r) &= rC_1^{(2)} + \frac{1}{r^2} C_2^{(2)}; \quad (r \geq r_1), \end{aligned} \quad (3.64)$$

де $C_1^{(1)}$, $C_2^{(1)}$, $C_1^{(2)}$, $C_2^{(2)}$ – константи, які визначаються з граничних умов при $r = 0$ і $r_2 \rightarrow \infty$ та умов поєднання розв'язків (3.64) на поверхні $r = r_1$. Ці умови мають вигляд:

$$u^{(1)}(0) = 0, \quad (3.65)$$

$$u^{(1)}(r_1) = u^{(2)}(r_1), \quad (3.66)$$

$$\sigma_r^{(1)}(r_1) = \sigma_r^{(2)}(r_1), \quad (3.67)$$

$$\sigma_r^{(2)}(r) \rightarrow 0 \text{ при } r_2 \rightarrow \infty. \quad (3.68)$$

З рівності (3.65) випливає, що існування функції $u^{(1)}(r)$ в (3.64) можливо тільки при

$$C_2^{(1)} = 0. \quad (3.69)$$

За допомогою співвідношень (3.61) і (3.64) представимо функції $\sigma_r^{(i)}(r)$, $\sigma_\varphi^{(i)}(r)$, $\sigma_\theta^{(i)}(r)$, що використовуються в (3.67) та (3.68), у формі:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(i)}(r) &= \frac{E_i}{(1-2\nu_i)} C_1^{(i)} - \frac{2E_i}{r^3(1+\nu_i)} C_2^{(i)} - \frac{E_i}{(1-2\nu_i)} \alpha_i T; \\ \sigma_\varphi^{(i)} = \sigma_\theta^{(i)} &= \frac{E_i}{(1-2\nu_i)} C_1^{(i)} + \frac{E_i}{r^3(1+\nu_i)} C_2^{(i)} - \frac{E_i}{(1-2\nu_i)} \alpha_i T; \quad (i=1,2). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Тоді для виконання умов (3.68) необхідно, щоб сума першого та третього доданків у правій частині $\sigma_r^{(i)}(r)$ при $i=2$ дорівнювала нулю. Це можливо при

$$C_1^{(2)} = \alpha_2 T. \quad (3.71)$$

Константи $C_1^{(1)}$, $C_2^{(2)}$ знаходяться з умов (3.66) та (3.67). Перепишемо їх у вигляді:

$$\begin{aligned} r_1 C_1^{(1)} &= \frac{1}{r_1^{(2)}} C_2^{(2)} + r_1 \alpha_2 T; \\ \frac{E_1}{(1-2\nu_1)} C_1^{(1)} - \frac{E_1}{(1-2\nu_1)} \alpha_1 T &= -\frac{2E_2}{r_1^3(1+\nu_2)} C_2^{(2)} - \frac{E_2}{(1-2\nu_2)} \alpha_2 T. \end{aligned} \quad (3.72)$$

З цієї системи випливає

$$\begin{aligned}
C_1^{(1)} &= \frac{E_1(1+\nu_2)\alpha_1 T + 2E_2(1-2\nu_1)\alpha_2 T}{E_1(1+\nu_2) + 2E_2(1-2\nu_1)}; \\
C_2^{(2)} &= \frac{r_1^3 E_1(1+\nu_2)(\alpha_1 - \alpha_2)T}{E_1(1+\nu_2) + 2E_2(1-2\nu_1)}.
\end{aligned} \tag{3.73}$$

За допомогою рівностей (3.69), (3.70), (3.73) при $i=1$ знаходимо термонапруження $\sigma_r^{(1)}(r)$, $\sigma_\varphi^{(1)}(r)$, $\sigma_\theta^{(1)}(r)$ у включенні 1

$$\sigma_r^{(1)}(r) = \sigma_\varphi^{(1)}(r) = \sigma_\theta^{(1)}(r) = \frac{2E_1E_2(\alpha_2 - \alpha_1)T}{E_1(1+\nu_2) + 2E_2(1-2\nu_1)}; \quad (r \leq r_1). \tag{3.74}$$

Радіальні термонапруження $\sigma_r^{(2)}(r)$ у середовищі 2 обчислюються з використанням рівностей (3.70), (3.71), (3.73) при $i=2$

$$\sigma_r^{(2)}(r) = \frac{2r_1^3}{r^3} \frac{E_1E_2(\alpha_2 - \alpha_1)T}{E_1(1+\nu_2) + 2E_2(1-2\nu_1)}; \quad (r \geq r_1). \tag{3.75}$$

Термонапруження $\sigma_\varphi^{(2)}(r)$, $\sigma_\theta^{(2)}(r)$ у середовищі 2 обчислюються з урахуванням співвідношень (3.61), (3.71), (3.73) при $i=2$

$$\sigma_\varphi^{(2)}(r) = \sigma_\theta^{(2)}(r) = -\frac{r_1^3}{r^3} \frac{E_1E_2(\alpha_2 - \alpha_1)T}{E_1(1+\nu_2) + 2E_2(1-2\nu_1)}; \quad (r \geq r_1). \tag{3.76}$$

З рівностей (3.74), (3.75) випливає, що відповідно до умови (3.67) радіальні напруження $\sigma_r^{(1)}(r)$ в тілі 1 і $\sigma_r^{(2)}(r)$ в середовищі 2 на поверхні контакту $r = r_1$ однакові. Крім того в середовищі 2 напруження $\sigma_r^{(2)}(r)$ в два

рази більше напруження $\sigma_{\varphi}^{(2)}(r)$, $\sigma_{\theta}^{(2)}(r)$ і всі вони зменшуються вздовж радіальної координати пропорційно кубу відстані від центру тіла 1 до точки, що розглядається. Зазначимо також, що всі напруження в системі пропорційні різниці $(\alpha_2 - \alpha_1)$ та добутку $E_1 E_2$.

Вирази (3.74) – (3.76) суттєво спрощуються, якщо $\nu = 0,5$. Тоді маємо

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(1)}(r) &= \sigma_{\varphi}^{(1)}(r) = \sigma_{\theta}^{(1)}(r) = \frac{2E_2(\alpha_2 - \alpha_1)T}{1 + \nu_2}; & (r \leq r_1); \\ \sigma_r^{(2)}(r) &= \frac{2r_1^3}{r^3} \frac{E_2(\alpha_2 - \alpha_1)T}{1 + \nu_2}; & (r \geq r_1); \\ \sigma_{\varphi}^{(2)}(r) &= \sigma_{\theta}^{(2)}(r) = -\frac{r_1^3}{r^3} \frac{E_2(\alpha_2 - \alpha_1)T}{1 + \nu_2}; & (r \geq r_1).\end{aligned}\quad (3.77)$$

У цьому випадку гумове включення поводить ся як абсолютно тверде тіло і тому термонапруження (3.77) не залежать від його модуля пружності E_1 .

Отримані вирази (3.74) – (3.76) та (3.77) дозволяють встановити основні особливості впливу вихідних термонапружень у бітумному середовищі з гумовими включеннями на її термостійкість. При цьому ще раз звернемо увагу на суттєву термомеханічну несумісність гуми та бітуму. В загальному випадку їх властивості можуть змінюватися у широких межах залежно від своїх фізико-механічних структур. Нижче при проведенні аналізу для гуми використовуємо значення $E_1 = 1 \div 10$ МПа, $\nu_1 = 0,48, 0,49$ і $0,5$, $\alpha_1 = 0$, хоча навіть за помірних температур α_1 може бути від'ємним. Для бітуму приймемо $E_2 = 3000$ МПа, $\nu_2 = 0,25$, $\alpha_2 = 2,3 \cdot 10^{-4}$ $1/^\circ\text{C}$.

При таких значеннях вихідних параметрів та $T = 30^\circ\text{C}$,

використовуючи формули (3.74) – (3.76), отримуємо
 $\sigma_r^{(1)}(r) = \sigma_\varphi^{(1)}(r) = \sigma_\theta^{(1)}(r) = (0,3414 \div 3,1245)$ МПа $(r \leq r_1)$,

$$\sigma_r^{(2)}(r) = \frac{r_1^3}{r^3}(0,3414 \div 3,1245) \text{ МПа}, \quad \sigma_\varphi^{(2)}(r) = \sigma_\theta^{(2)}(r) = -\frac{r_1^3}{r^3}(0,1707 \div 1,562)$$

МПа $(r \geq r_1)$. Тут перші значення у дужках відповідають випадку $E_1 = 1$ МПа, другі – випадку $E_1 = 10$ МПа.

Графіки цих функцій при $E_1 = 10$ МПа наведені на рис. 3.11.

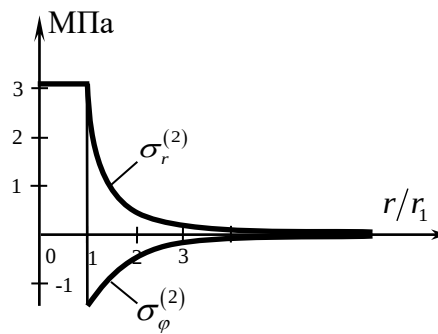


Рисунок 3.11 - Графіки розподілу функцій $\sigma_r^{(i)}(r)$ і $\sigma_\varphi^{(i)}(r)$ ($i=1,2$)

в системі гума-бітум для випадку $E_1 = 10$ МПа

Як видно, у бітумному середовищі функції $\sigma_r^{(2)}(r)$, $\sigma_\varphi^{(2)}(r)$, $\sigma_\theta^{(2)}(r)$ концентруються на контактній поверхні $r = r_1$ і спадають обернено пропорційно кубу координати r . При цьому в зоні своєї концентрації навіть за невисокого значення T та нульовому α_1 ці функції знаходяться в зоні граничних значень для бітуму, які становлять $[\sigma_{np}] = 3 \div 8$ МПа при тривалості дії 0,1 с. та температурі $T = 5 \div 10^\circ\text{C}$. Насправді при тривалій дії температурних збурень і великих інтервалах зміни температури, значення $[\sigma_{np}]$ можуть бути набагато нижчими.

Важливим є питання про дослідження впливу надтвердості гуми, що визначається коефіцієнтами ν_1 , на концентрацію додаткових

термонапружень в бітумі. У табл. 3.10 наведено значення термонапружень $\sigma_r^{(1)} = \sigma_\phi^{(1)}$, $\sigma_r^{(2)}(r_1)$ і $\sigma_\phi^{(2)}(r_1)$ при $\nu_1 = 0,48, 0,49$ і $0,5$.

Таблиця 3.10 – Значення максимальних термонапружень при різних значеннях коефіцієнта ν_1

E_1 , МПа	ν_1	$10^4 \alpha_1$, 1/ °C	E_2 , МПа	ν_2	$10^4 \alpha_2$, 1/ °C	$\sigma_r^{(1)} = \sigma_\phi^{(1)}$, МПа	$\sigma_r^{(2)}(r_1)$, МПа	$\sigma_\phi^{(2)}(r_1)$, МПа
10	0,48	0	3000	0,25	2,3	1,6396	1,6396	– 0,8189
10	0,49	0	3000	0,25	2,3	3,1245	3,1245	– 1,5623
10	0,50	0	3000	0,25	2,3	33,120	33,120	– 16,560

З цих результатів випливає, що зі збільшенням ν_1 додаткові термонапруження в бітумі швидко зростають, і при $\nu_1 = 0,5$, коли гума стає абсолютно твердим тілом, вони значно перевищують її $[\sigma_{np}]$

В результаті виконаних розрахунків можна вважати, що в малому околі гумового включення бітум (або асфальтобетон) постійно перебуває в граничному або позаграничному стані, що призводить до зниження його термостійкості, утворення в ньому прихованих локальних дефектів, а при дії транспортних навантажень до провокування відшарування та викришування гумових включень. У зв'язку з цим позитивну роль відіграє процедура модифікації бітуму, що використовується на практиці, дрібними гумовими частинками, на поверхні яких в результаті додаткової хімічної обробки формується проміжний прошарок з підвищеними механічними властивостями. Очевидно, що на більших гумових включеннях цей позитивний ефект може не виявитися. У зв'язку з цим цікавить питання про дослідження термонапруженого стану гумового включення з додатковим пружним покриттям.

3.3.3 Моделювання термонапруженого стану гумового сферичного включення з пружним прошарком

Розглянемо випадок, коли сферичне гумове включення 1, покрите оболонкою 2 знаходиться в бітумному середовищі 3 (рис. 3.12).

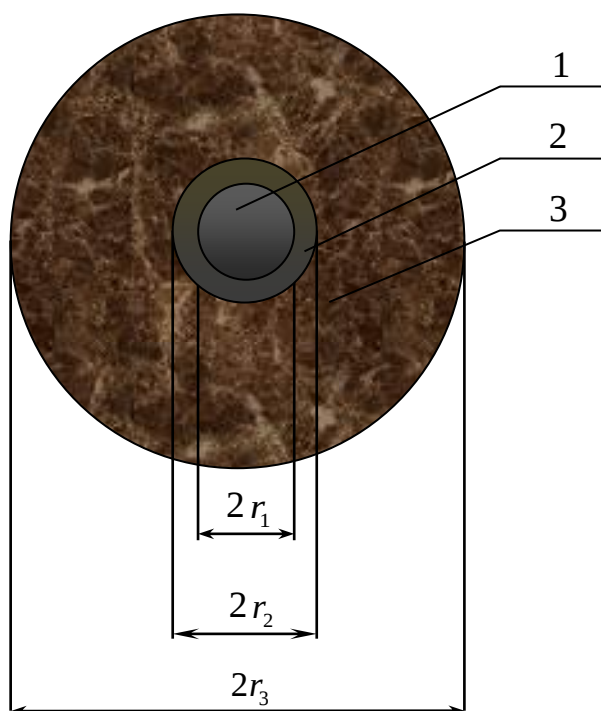


Рисунок 3.12 - Схема сферичного включення 1 зі сферичним прошарком 2, поміщених у пружне середовище 3

Тіло 1 обмежене сферичною поверхнею радіусу r_1 , прошарок 2 – двома поверхнями радіусів r_1 і r_2 , середовище 3 – двома поверхнями радіусів r_2 і r_3 . У розрахунках прийнято, що $r_3 \rightarrow \infty$. Термомеханічні властивості цієї системи характеризуються параметрами E_i , ν_i , α_i ($i = \overline{1,3}$) при однаковій температурі T .

Термонапружений рівноважний стан цієї трифазної системи описується трьома рівняннями виду (3.58)

$$\frac{d\sigma_r^{(i)}}{dr} + \frac{2\sigma_r^{(i)} - \sigma_\varphi^{(i)} - \sigma_\theta^{(i)}}{r} = 0; \quad (i = \overline{1,3}),, \quad (3.78)$$

в яких однак індекс пробігає значення 1,2,3, відповідні номерам тіл 1,2,3.

Для системи, що розглядається, зберігають сенс також і рівняння (3.59) – (3.62) при значеннях індексу $(i = \overline{1,3})$ замість $(i = 1,2)$. Ці рівняння можуть бути зведені до системи трьох рівнянь рівноваги, виражених через радіальні переміщення $u^{(i)} (i = \overline{1,3})$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 u^{(i)}) \right] = 0; \quad (i = \overline{1,3}). \quad (3.79)$$

Ця система має розв'язок

$$\begin{aligned} u^{(1)}(r) &= rC_1^{(1)} + \frac{1}{r^2} C_2^{(1)}; \quad (r \leq r_1); \\ u^{(2)}(r) &= rC_1^{(2)} + \frac{1}{r^2} C_2^{(2)}; \quad (r_1 \leq r \leq r_2); \\ u^{(3)}(r) &= rC_1^{(3)} + \frac{1}{r^2} C_2^{(3)}; \quad (r_1 \leq r \leq r_2). \end{aligned} \quad (3.80)$$

Шість констант $C_1^{(i)}$, $C_2^{(i)}$, що використовуються в цих рівностях, знаходяться з шести крайових умов супрягання функції (3.80) на контактних поверхнях

$$u^{(1)}(0) = 0, \quad (3.81)$$

$$u^{(1)}(r_1) = u^{(2)}(r_1), \quad (3.82)$$

$$\sigma_r^{(1)}(r_1) = \sigma_r^{(2)}(r_1), \quad (3.83)$$

$$u^{(2)}(r_2) = u^{(3)}(r_2), \quad (3.84)$$

$$\sigma_r^{(2)}(r_2) = \sigma_r^{(3)}(r_2), \quad (3.85)$$

$$\sigma_r^{(3)}(r_3) = 0 \quad r_2 \rightarrow \infty, \quad (3.86)$$

З рівності (3.81) випливає

$$C_2^{(1)} = 0. \quad (3.87)$$

Умову (3.86) перепишемо у формі:

$$\sigma_r^{(3)}(r_3) = \frac{E_3}{(1-2\nu_3)} C_1^{(3)} - \frac{2E_3}{r_3^3(1+\nu_3)} C_2^{(3)} - \frac{E_3}{(1-2\nu_3)} \alpha_3 T \quad \text{при } r_3 \rightarrow \infty. \quad (3.88)$$

Його реалізація можлива лише при

$$\frac{E_3}{1-2\nu_3} C_1^{(3)} - \frac{E_3}{1-2\nu_3} \alpha_3 T = 0. \quad (3.89)$$

Тоді

$$C_1^{(3)} = \alpha_3 T, \quad (3.90)$$

I

$$\sigma_r^{(3)}(r) = -\frac{2E_3}{r^3(1+\nu_3)} C_2^{(3)}. \quad (3.91)$$

Використовуючи рівності (3.80), (3.87), (3.90), (3.91), зведемо рівняння (3.81) – (3.85) до системи чотирьох алгебраїчних рівнянь

$$C_1^{(1)} - C_1^{(2)} - \frac{1}{r_1^3} C_2^{(2)} = 0, \quad (3.92)$$

$$\frac{E_1}{1-2\nu_1} C_1^{(1)} - \frac{E_2}{1-2\nu_2} C_1^{(2)} + \frac{2E_2}{r_1^3(1+\nu_2)} C_2^{(2)} = \frac{E_1}{1-2\nu_1} \alpha_1 T - \frac{E_2}{1-2\nu_2} \alpha_2 T, \quad (3.93)$$

$$C_1^{(2)} + \frac{1}{r_2^3} C_2^{(2)} - \frac{1}{r_2^3} C_2^{(3)} = \alpha_3 T, \quad (3.94)$$

$$\frac{E_2}{1-2\nu_2} C_1^{(2)} - \frac{2E_2}{r_2^3(1+\nu_2)} C_2^{(2)} + \frac{2E_3}{r_2^3(1+\nu_3)} C_2^{(3)} = \frac{E_2}{1-2\nu_2} \alpha_2 T \quad (3.95)$$

з чотирма невідомими $C_1^{(1)}$, $C_1^{(2)}$, $C_2^{(2)}$, $C_2^{(3)}$.

За допомогою (3.92), (3.94) виразимо $C_1^{(1)}$ і $C_2^{(3)}$ через $C_1^{(2)}$ і $C_2^{(2)}$

$$C_1^{(1)} = C_1^{(2)} + \frac{1}{r_1^3} C_2^{(2)}, \quad (3.96)$$

$$C_2^{(3)} = r_2^3 C_1^{(2)} + C_2^{(2)} - r_2^3 \alpha_3 T \quad (3.97)$$

і виключимо їх із рівнянь (3.93), (3.95). У результаті отримаємо систему двох рівнянь відносно двох невідомих $C_1^{(2)}$, $C_2^{(2)}$

$$\begin{aligned} \frac{E_1(1-2\nu_2) - E_2(1-2\nu_1)}{(1-2\nu_1)(1-2\nu_2)} C_1^{(2)} + \frac{E_1(1+\nu_2) + 2E_2(1-2\nu_1)}{r_1^3(1-2\nu_1)(1+\nu_2)} C_2^{(2)} &= \frac{E_1\alpha_1 T}{1-2\nu_1} - \frac{E_2\alpha_2 T}{1-2\nu_2}; \\ \frac{E_2(1+\nu_3) + 2E_3(1-2\nu_2)}{(1-2\nu_2)(1+\nu_3)} C_1^{(2)} + \frac{-2E_2(1+\nu_3) + 2E_3(1+\nu_2)}{r_2^3(1+\nu_2)(1+\nu_3)} C_2^{(2)} &= \frac{2E_3\alpha_3 T}{1+\nu_3} + \frac{E_2\alpha_2 T}{1-2\nu_2}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Введемо позначення

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{E_1(1-2\nu_2) - E_2(1-2\nu_1)}{(1-2\nu_1)(1-2\nu_2)}; & a_{11} &= \frac{E_1(1+\nu_2) + 2E_2(1-2\nu_1)}{r_1^3(1-2\nu_1)(1+\nu_2)}; \\ a_{21} &= \frac{E_2(1+\nu_3) + 2E_3(1-2\nu_2)}{(1-2\nu_2)(1+\nu_3)}; & a_{22} &= \frac{-2E_2(1+\nu_3) + 2E_3(1+\nu_2)}{r_2^3(1+\nu_2)(1+\nu_3)}; \\ b_1 &= \frac{E_1}{1-2\nu_1} \alpha_1 T - \frac{E_2}{1-2\nu_2} \alpha_2 T; & b_2 &= \frac{2E_3}{1+\nu_3} \alpha_3 T + \frac{E_2}{1-2\nu_2} \alpha_2 T. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Тоді

$$C_1^{(2)} = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}; \quad C_2^{(2)} = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}. \quad (3.100)$$

Таким чином, знаючи $C_2^{(1)}$ і $C_1^{(3)}$, за формулами (3.99), (3.100) можна обчислити $C_1^{(2)}$ і $C_2^{(2)}$, а потім і константи $C_1^{(1)}$, $C_2^{(3)}$ за формулами (3.96), (3.97). Після цього за допомогою рівностей (3.61) при $i = \overline{1,3}$ обчислюються

всі функції термонапружень $\sigma_r^{(i)}(r)$, $\sigma_\phi^{(i)}(r)$, $\sigma_\theta^{(i)}(r)$ при $i = \overline{1,3}$.

В якості прикладів розглянемо випадки, коли гумове включення малого радіусу r_2 модифіковано в бітумному середовищі за допомогою хімічної обробки та на ньому утворився шар 2 сферичного оболонкового покриття завтовшки $r_2 - r_1 = h$. Простір $r_2 < r < r_3$ (при $r \rightarrow \infty$) заповнено бітумним середовищем 3. Вважатимемо, що термомеханічні властивості гумового тіла 1 (E_1, ν_1, α_1) та бітумного середовища 3 (E_3, ν_3, α_3) відповідають властивостям тіла 1 та середовища 2, прийнятим у підпункті 2. При заданні термомеханічних характеристик гумової крихти, модифікованої в бітумному середовищі, врахуємо, що вони можуть змінюватися в широких межах залежно від хімічних добавок, температури і технології процесу модифікування. У зв'язку з цим при виборі значень E_2, ν_2, α_2 її характеристик, приймемо, що вони можуть набувати деякі проміжні значення між характеристиками гуми та бітуму і поставимо їх рівними $E_2 = 50$ МПа, а ν_2 і α_2 рівні середнім арифметичним значенням величин ν_1, α_1 и ν_3, α_3 . Тоді для немодифікованої гуми $E_1 = 10$ МПа, $\nu_1 = 0,49$, $\alpha_1 = 0$, для модифікованої гуми $E_2 = 50$ МПа, $\nu_2 = 0,37$, $\alpha_2 = 1,15 \cdot 10^{-4}$ 1/°C, і для бітума $E_3 = 3000$ МПа, $\nu_3 = 0,25$, $\alpha_3 = 2,3 \cdot 10^{-4}$ 1/°C. При цих значеннях розглядаємо два випадки. У першому випадку система є двофазною, в якій перша фаза (включення 1) є немодифікованою гумою, а друга бітум 3 або модифіковану гуму 2 (фаза 1) і бітум 3 (фаза 2). Значення напружень для цих поєднань наведені в табл. 3.11.

З неї випливає, що для комбінації $i=1$, $i=3$ з гумовим включенням 1 повністю виявляються особливі властивості гуми, пов'язані з її стисливістю ($\nu_1 = 0,49$) та нульовим значенням α_1 . Для такої системи при $T = 30^\circ\text{C}$ радіальні напруження $\sigma_r^{(3)}(r_1) = 3,1245$ МПа у бітумі на поверхні контакту

$r = r_1$ перевищили його можливу межу міцності $[\sigma] = 3$ МПа. Цей ефект може бути причиною ефекту викришування гумових включень з дорожніх покриттів, що спостерігається на практиці. Зазначимо також, що влітку температура покриття може досягати 60°C . Очевидно, що в таких ситуаціях ймовірність руйнації покриття з гумовим включенням зростає ще більше.

Таблиця 3.11 – Значення термонапружень у двофазних середовищах

	i	E_i , МПа	ν_i	$\alpha_i, 1/^\circ \text{C}$	$\sigma_r^{(1)} = \sigma_\varphi^{(1)}$, МПа	$\sigma_r^{(3)}(r_1)$, МПа	$\sigma_\varphi^{(3)}(r_1)$, МПа
1	$i=1$	10	0,49	0	3,1245	3,1245	– 1,5623
	$i=3$	3000	0,25	$2,3 \cdot 10^{-4}$			
2	$i=2$	50	0,37	$1,15 \cdot 10^{-4}$	0,637904	0,637904	– 0,318952
	$i=3$	3000	0,25	$2,3 \cdot 10^{-4}$			

Ситуація істотно покращується, якщо гумова крихта є дрібнодисперсною і завдяки цьому її можна повністю модифікувати в бітумі. Цей випадок відповідає другій комбінації табл.3.11. Тоді властивості нестисливості та нульового термічного розширення гуми втрачаються і максимальні значення радіального напруження в бітумі падають до $\sigma_r^{(3)}(r_1) = 0,637904$ МПа, що цілком допустимо. Цим можна пояснити збільшення термостійкості отриманого матеріалу до різких перепадів температури в часі та її високоградієнтної неоднорідності, а також поліпшену адгезію між різними фазами в системі.

У другому випадку система є трифазною, в ній фаза 1 - немодифікована гума, фаза 2 – модифікована гума, фаза 3 – бітум. При цьому відношення меншого радіусу r_1 до більшого радіусу r_2 набували значень $r_1/r_2 = 0,5$ і $r_1/r_2 = 159/160$.

Відношення $r_1/r_2 = 0,5$ відповідає неповній модифікації гуми бітумом,

завдяки чому на поверхні зерна утворився шар завтовшки $r_2 - r_1 = r_1$ з проміжними властивостями E_2 , ν_2 , α_2 . Для порівняння розглядаємо також приклад, коли розмір гумового включення не дуже малий і тому його вдалося модифікувати лише на глибину $r_2/160$. Значення термонапружень у трьох фракціях $i=1,2,3$ на контактних поверхнях $r=r_1$ і $r=r_2$ для розглянутих ситуацій при $T=30^\circ\text{C}$ наведено у табл. 3.12.

Таблиця 3.12 – Значення термонапружень у трифазних середовищах

	r_1/r_2	$\sigma_r^{(1)} = \sigma_\varphi^{(1)}$, МПа	$\sigma_r^{(2)}(r_1)$, МПа	$\sigma_\varphi^{(2)}(r_1)$, МПа	$\sigma_r^{(2)}(r_2)$, МПа	$\sigma_\varphi^{(2)}(r_2)$, МПа	$\sigma_r^{(3)}(r_2)$, МПа	$\sigma_\varphi^{(3)}(r_2)$, МПа
1	0,5	1,1278	1,1278	0,58266	0,80108	0,73291	0,80108	-0,40054
2	$\frac{159}{160}$	3,0451	3,0451	2,02604	3,0316	2,03202	3,0316	-1,5158

Графіки функцій $\sigma_r(r)$ і $\sigma_\varphi(r)$ для випадку $r_1/r_2=0,5$ дані на рис. 3.13.

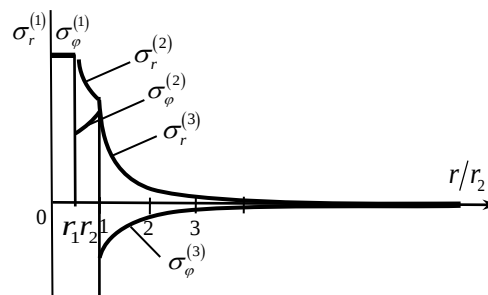


Рисунок 3.13 - Графіки зміни функцій термонапружень $\sigma_r(r)$ і $\sigma_\varphi(r)$ в трифазному середовищі при $r_1/r_2=0.5$

Порівняння значень термонапружень, наведених у позиції 1 табл. 3.12 і в позиціях 1 і 2 табл. 3.11, свідчать про те, що модифікування гумової сферичної крихти навіть у її шарі товщиною, що дорівнює половині її радіусу, призводить до істотного зниження радіальних термонапружень у

бітумі, хоча і меншою мірою порівняно з випадком повного модифікування крихти (порівняйте позицію 1 табл. 3.12 і позицію 2 табл. 3.11).

Однак якщо розміри крихти не малі, то модифікування її матеріалу вдається здійснити лише в тонкому приповерхневому шарі. У цьому випадку зниження термонапружень на поверхні його контакту з модифікованою гумою несуттєве (порівняйте дані, наведені в позиції 2 табл. 3.12 та позиції 1 табл. 3.11). Тому в цих зонах можуть локалізуватися пластичні деформації, що призводять до появи локальних дефектів у бітумі та подальшого викришування гумових зерен.

Таким чином можна зробити висновок, що використання гумової крихти як заповнювача в асфальтобетонному матеріалі дорожнього покриття поєднано з додатковими особливостями, пов'язаними з термомеханічними властивостями гуми.

По-перше, у гуми дуже малий модуль пружності E . У зв'язку з цим вона слабо чинить опір навантаженням, що призводять до зміни форми тіла, виготовленого з неї (наприклад, одновісним і зсувним транспортним навантаженням).

По-друге, її коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,48 \div 0,50$, тобто гума з технічного погляду є нестисливим матеріалом. Ця властивість проявляється як недолік при температурних впливах, що викликають всебічні усадки чи дилатації. Оскільки гумова крихта в цьому випадку поводить себе як абсолютно тверде тіло і перешкоджає вільному тривісному термічному деформуванню бітуму, в ньому на поверхні контакту з гумовим включенням генеруються концентратори термонапружень.

По-третє, як показано вище, термічні напруження у фракціях композиту дорожнього покриття пропорційні різниці значень коефіцієнта лінійного температурного розширення його компонент. Тому бажано, щоб ці коефіцієнти були одного знаку та мали близькі значення. Однак у гуми при

нормальних значеннях температури коефіцієнт лінійного температурного розширення близький до нуля або від'ємний. Цей фактор ще більше сприяє зростанню термонапружень у зоні контакту гумового включення та бітуму. Результати проведених розрахунків дозволяють на кількісному рівні підтвердити отримані на практиці висновки щодо ефективності процедури модифікування гумової крихти бітумом та використовувати її для подальшого вдосконалення цього матеріалу.

До того ж слід зазначити, що проведені дослідження виконані із застосуванням моделі сферичних гумових крихт. Насправді ці крихти можуть мати неправильну грановану форму з ребрами та вершинами, які відіграють роль додаткових концентраторів термонапружень. Цей фактор необхідно враховувати при аналізі термомеханіки матеріалів, що розглядаються.

3.4 Висновки до розділу 3

У розділі 3 на основі методів теорії термопружності поставлено та досліджено задачі про концентрацію термонапружень на поверхнях зернистих включень в жорстких та нежорстких композитних матеріалах.

1. Виявлено та досліджено негативні термомеханічні ефекти можливих зароджень додаткових термонапружень у зернистих композитах залежно від несумісності термомеханічних параметрів їх компонент. Розглянуто випадки, коли армуючі сферичні зерна композитів є суцільним пружним тілом; включення зі сферичною порожниною; тіло, вкрите пружною сферичною оболонкою; а також випадок розподілу термонапружень у середовищі зі сферичною порою.

В результаті побудови аналітичних розв'язків поставлених завдань показано, що додаткові термонапруження в матриці композиту концентруються на поверхні її контакту з включенням, вони пропорційні

різниці значень коефіцієнтів лінійного температурного розширення фаз системи і пропорційно зменшуються кубу радіальної координати.

За допомогою конкретних прикладних прикладів встановлено, що навіть при порівняно помірних значеннях зміни температури додаткові термонапруження можуть досягати граничних значень, що сприяють утворенню в системі прихованих внутрішніх локалізованих дефектів і тріщин.

2. Також поставлено задачу про термонапружений стан асфальтобетонного дорожнього покриття з гумовими включеннями. Сформовано розв'язувальні рівняння термопружного деформування системи для сферичної моделі однорідного включення та включення, покритого сферичним шаром модифікованої гуми, побудовано їх аналітичні розв'язки.

В результаті виконаних розрахунків можна вважати, що в малому околі гумового включення бітум (або асфальтобетон) постійно перебуває в граничному або позаграничному стані, що призводить до зниження його термостійкості, утворення в ньому прихованих локальних дефектів, а при дії транспортних навантажень до провокування відшарування та викришування гумових включень. У зв'язку з цим позитивну роль відіграє процедура модифікації бітуму, що використовується на практиці, дрібними гумовими частинками, на поверхні яких в результаті додаткової хімічної обробки формується проміжний прошарок з підвищеними механічними властивостями. Так наприклад, якщо система є двофазною, в якій перша фаза (включення 1) є немодифікованою гумою, а друга бітум, то повністю проявляються особливі властивості гуми, пов'язані з її стисливістю ($\nu_1 = 0,49$) та нульовим значенням α_1 . Для такої системи при $T = 30^\circ\text{C}$ радіальні напруження $\sigma_r^{(3)}(r_1) = 3,1245$ МПа у бітумі на поверхні контакту $r = r_1$ перевищили його можливу межу міцності $[\sigma] = 3$ МПа. Цей ефект може бути причиною викришування гумових включень з дорожніх покриттів, що

спостерігається на практиці. Варто звернути увагу, що влітку температура покриття може досягати 60° С. Очевидно, що в таких ситуаціях ймовірність руйнації покриття з гумовим включенням зростає ще більше. Ситуація істотно покращується, якщо гумова крихта є дрібнодисперсною і завдяки цьому її можна повністю модифікувати в бітумі. Тоді властивості нестисливості та нульового термічного розширення гуми втрачаються і максимальні значення радіального напруження в бітумі падають до $\sigma_r^{(3)}(r_1)=0,637904$ МПа, що цілком допустимо. Цим можна пояснити збільшення термостійкості отриманого матеріалу до різких перепадів температури в часі та її високоградієнтної неоднорідності, а також поліпшену адгезію між різними фазами в системі.

Отже, за допомогою аналітичних обчислень продемонстровано, що пом'якшення додаткових термомеханічних дефектів та їх усунення можна досягти за рахунок зниження термомеханічної несумісності властивостей фаз композиту шляхом бітумного модифікування гуми. При цьому ефективність цього способу підвищується зі збільшенням глибини проникнення модифікованого шару в гумове зерно.

3. Результати досліджень даного розділу викладено у наступних публікаціях [8, 11, 13, 21, 67, 75, 76, 151, 154].

РОЗДІЛ 4

КОНЦЕНТРАЦІЯ ТЕРМОНАПРУЖЕНЬ НА ПОВЕРХНЯХ СТРИЖНЕВОЇ (ВОЛОКНИСТОЇ) АРМАТУРИ В КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛАХ

4.1 Концентрація термонапружень в асфальтобетоні в зоні його контакту зі стрижневою арматурою

4.1.1 Стан проблеми

Міцність та довговічність дорожнього полотна значною мірою визначаються інтенсивністю транспортних навантажень та впливом кліматичних умов. Помітні руйнування покриттів доріг, мостів, тунелів і гребель, а також інших інфраструктурних об'єктів у кліматичних зонах з великими перепадами температури, як правило, відбуваються у періоди міжсезоння, що супроводжуються високими градієнтами температури.

До числа видів температурних деструкцій дорожнього полотна, що найчастіше зустрічаються, можна віднести появу в ньому поперечних тріщин, викликаних граничними значеннями поздовжніх напружень при низьких негативних температурах в умовах неможливості вільного скорочення верхніх шарів. Для уникнення цього ефекту в конструкцію дороги вводять так звані «розвантажувальні температурні шви» та арматуру (поздовжню, сітчасту та ін.). Таке загальне зміцнення дорожнього полотна арматурою призводить до підвищення його загальної міцності, зниження деформативності, збільшення довговічності та зменшення витрат на ремонтні роботи.

При теоретичному аналізі впливу арматури на міцність конструкції та вивченні загальних термомеханічних властивостей армованих (композитних)

матеріалів та дорожніх покриттів переважно визначають наведені (ефективні) значення параметрів комбінованих систем, що містять включення у вигляді частинок, волокон або стрижнів [46, 116, 173, 196, 210, 227, 271]. При цьому в першому випадку розглядаються, в основному, моделі однорідних та неоднорідних сферичних частинок, у тому числі покритих оболонковими шарами [5]. Виділяються випадки впорядкованого [212, 296] та стохастичного [134, 135, 184] розміщення зерен цих частинок і для них обчислюються наведені значення модуля Юнга, коефіцієнта Пуассона, коефіцієнта теплопровідності та коефіцієнта температурного розширення всієї системи.

Дуже складні процеси термодформування та термодеструкцій спостерігаються у конструкціях асфальтобетонних покриттів доріг та мостів. Їх аналізу присвячені роботи [5-7, 20, 14-16, 27, 94, 167, 183, 197, 253, 269, 290]. Питання визначення наведених (ефективних) термодинамічних характеристик асфальтобетонних матеріалів армованих частинками, волокнами та стрижнями розглянуто в публікаціях [108, 116, 125, 143, 189, 203, 269, 290]. Тут, однак, ці завдання ускладнюються, оскільки можна створювати матеріали з спрямованими (анізотропними) властивостями, зокрема, з нульовим значенням КЛТР [215] за рахунок використання арматури з його від'ємним значенням [118, 173, 209, 217, 267]. Питання проектування асфальтобетонних дорожніх покриттів обговорюються в роботах [2, 34, 39, 40, 59, 62, 84, 107, 207, 290].

Крім того, необхідно відзначити, що введення в один матеріал армуючих включень з іншого матеріалу може не тільки поліпшити узагальнені характеристики всього композиту, але при термічних впливах воно також може супроводжуватися породженням помітних додаткових локальних внутрішніх напружень, якщо термомеханічні характеристики

компонент композиту несумісні. Для пластичних матеріалів ці напруження можуть призводити до локальних пластичних деформацій та дефектів, для крихких матеріалів – до локальних розтріскувань. Оскільки ці дефекти мають локалізований та прихований характер, вони не завжди піддаються виявленню. Тому проблема їхнього теоретичного прогнозування є актуальною.

Для моделювання цих ефектів у даному розділі на базі теорії термопружності поставлено задачу про плоский термодетформований стан пружного середовища, що містить пружний стрижень кругового перерізу з термомеханічними параметрами λ_1 , μ_1 , α_1 . Для випадку зміни температури системи на сталу величину ΔT побудовано аналітичний розв'язок диференціальних рівнянь, отримані вирази для термодетформацій і термонапружень. Встановлено, що максимальні термонапруження в середовищі реалізуються на поверхні контакту з пружним включенням і вони зменшуються вздовж радіальної координати пропорційно квадрату відстані до осі стрижня. Сформульовано умови термомеханічної сумісності властивостей середовища та стрижня, за яких додаткові термонапруження в системі відсутні. Показано, що в системі з несумісними параметрами додаткові термонапруження можуть бути зменшені шляхом зменшення радіальної жорсткості включення за рахунок введення циліндричної порожнини.

4.1.2 Теоретичний аналіз концентрації додаткових термонапружень

Сформулюємо задачу про стаціонарне температурне деформування нескінченного пружного середовища 2 (матриці), яке армоване стрижнем 1

кругового перерізу радіуса r_1 . На рис. 4.4 виділено фрагмент цієї системи.

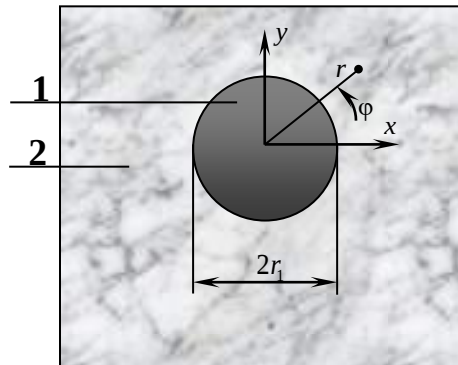


Рисунок 4.1 – Плоский фрагмент пружного середовища зі стрижневим включенням

Скористаємося циліндричною системою координат $Or\varphi z$, вісь Oz якої збігається з віссю стрижня. Нехай термомеханічні характеристики стрижня 1 і середовища 2 визначаються, відповідно, параметрами Ламе λ_1, μ_1 і λ_2, μ_2 і коефіцієнтами температурного лінійного розширення α_1 і α_2 . Температура системи стаціонарно змінюється на величину ΔT . Виділимо випадок, коли термопружні відносні деформації $\varepsilon_z^{(i)}(r, \varphi, z)$ кожного з тіл $i=1, 2$ уздовж осі Oz дорівнюють нулю і система знаходиться в плоскому осесиметричному термодетформованому стані, що описується рівняннями рівноваги [18, 19, 94, 95]

$$\frac{d\sigma_r^{(i)}}{dr} + \frac{\sigma_r^{(i)} - \sigma_\phi^{(i)}}{r} = 0; \quad (i=1, 2), \quad (4.1)$$

де $\sigma_r^{(i)}, \sigma_\phi^{(i)}$ – нормальні радіальні та колові напруження тіл 1 і 2 на відповідних майданчиках $r = \text{const}$ і $\varphi = \text{const}$. Виразимо нормальні

термонапруження через деформації $\varepsilon_r^{(i)}$, $\varepsilon_\phi^{(i)}$, $\varepsilon_z^{(i)}$

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(i)}(r) &= (\lambda_i + 2\mu_i)\varepsilon_r^{(i)} + \lambda_i(\varepsilon_\phi^{(i)} + \varepsilon_z^{(i)}) - (3\lambda_i + 2\mu_i)\lambda_i\Delta T; \\ \sigma_\phi^{(i)}(r) &= (\lambda_i + 2\mu_i)\varepsilon_\phi^{(i)} + \lambda_i(\varepsilon_r^{(i)} + \varepsilon_z^{(i)}) - (3\lambda_i + 2\mu_i)\alpha_i\Delta T; \\ \sigma_z^{(i)}(r) &= (\lambda_i + 2\mu_i)\varepsilon_z^{(i)} + \lambda_i(\varepsilon_r^{(i)} + \varepsilon_\phi^{(i)}) - (3\lambda_i + 2\mu_i)\alpha_i\Delta T; \quad (i=1,2).\end{aligned}\tag{4.2}$$

Далі врахуємо, що $\varepsilon_z^{(i)}(r, \phi, z) = 0$. Тоді вирази (4.2) спростяться

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(i)}(r) &= (\lambda_i + 2\mu_i)\varepsilon_r^{(i)} + \lambda_i\varepsilon_\phi^{(i)} - (3\lambda_i + 2\mu_i)\alpha_i\Delta T; \\ \sigma_\phi^{(i)}(r) &= (\lambda_i + 2\mu_i)\varepsilon_\phi^{(i)} + \lambda_i\varepsilon_r^{(i)} - (3\lambda_i + 2\mu_i)\alpha_i\Delta T; \\ \sigma_z^{(i)}(r) &= \lambda_i(\varepsilon_r^{(i)} + \varepsilon_\phi^{(i)}) - (3\lambda_i + 2\mu_i)\alpha_i\Delta T; \quad (i=1,2).\end{aligned}\tag{4.3}$$

Деформації, що використовуються в (4.3), залежать від радіального переміщення $u(r)$:

$$\varepsilon_r^{(i)}(r) = \frac{\partial u^{(i)}}{\partial r}; \quad \varepsilon_\phi^{(i)}(r) = \frac{u^{(i)}}{r}; \quad (i=1,2).\tag{4.4}$$

З урахуванням (4.3), (4.4) рівняння (4.1) зводиться до виду

$$\frac{d^2 u^{(i)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du^{(i)}}{dr} - \frac{1}{r^2} u^{(i)} = 0\tag{4.5}$$

для кожного з тіл.

Представимо рівняння (4.5) у більш компактній формі:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru^{(i)}) \right] = 0; \quad (i=1,2). \quad (4.6)$$

Інтегруючи ліву частину рівняння (4.6) двічі по r , отримуємо його розв'язок

$$\begin{aligned} u^{(1)}(r) &= rC_1 + \frac{1}{r}C_2 \quad \text{при } i=1; \\ u^{(2)}(r) &= rC_3 + \frac{1}{r}C_4 \quad \text{при } i=2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Невідомі константи C_i ($i=\overline{1,4}$), що сюди входять, визначаються з граничних умов і рівняння контакту при $r=r_1$

$$u^{(0)}(0) = 0, \quad (4.8)$$

$$u_r^{(1)}(r_1) = u_r^{(2)}(r_1), \quad (4.9)$$

$$\sigma_r^{(1)}(r_1) = \sigma_r^{(2)}(r_1), \quad (4.10)$$

$$\sigma_r^{(2)}(r) \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (4.11)$$

З умови (4.8) випливає

$$C_2 = 0. \quad (4.12)$$

Використовуючи рівності (4.7), виразимо деформації та напруження тіл 1 і 2 через C_i ($i=1,3,4$)

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r^{(1)}(r) &= C_1; & \varepsilon_\varphi^{(1)}(r) &= C_1; \\
 \varepsilon_r^{(2)}(r) &= C_3 - \frac{1}{r^2} C_4; & \varepsilon_\varphi^{(2)}(r) &= C_3 + \frac{1}{r^2} C_4; \\
 \sigma_r^{(1)}(r) &= 2(\lambda_1 + \mu_1)C_1 - (3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_1\Delta T; \\
 \sigma_r^{(2)}(r) &= 2(\lambda_2 + \mu_2)C_3 - \frac{2\mu_2}{r_1^2} C_4 - (3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2\Delta T.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

З умови (4.11) та останньої рівності системи (4.13) випливає:

$$C_3 = \frac{3\lambda_2 + 2\mu_2}{2(\lambda_2 + \mu_2)} \alpha_2 \Delta T. \tag{4.14}$$

Константи C_1 і C_4 знаходяться із системи рівнянь (4.9), (4.10), перетвореної з урахуванням рівностей (4.13),

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{[(3\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)\alpha_1 + (3\lambda_2 + 2\mu_2)\mu_2\alpha_2]\Delta T}{2(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)(\lambda_2 + \mu_2)}; \\
 C_4 &= \frac{r_1^2[(3\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)\alpha_1 - (3\lambda_2 + 2\mu_2)(\lambda_1 + \mu_1)\alpha_2]\Delta T}{2(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)(\lambda_2 + \mu_2)}.
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Знаючи константи C_i ($i = \overline{1,4}$), знаходимо функції переміщень

$$\begin{aligned}
u^{(1)}(r) &= \frac{r[(3\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)\alpha_1 + (3\lambda_2 + \mu_2)\mu_2\alpha_2]\Delta T}{2(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)(\lambda_2 + \mu_2)}; \quad (0 \leq r \leq r_1); \\
u^{(2)}(r) &= r \frac{(3\lambda_1 + 2\mu_2)}{2(\lambda_2 + \mu_2)} \alpha_2 \Delta T + \\
&+ \frac{r_1^2}{r} \frac{[(3\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)\alpha_1 - (3\lambda_2 + 2\mu_2)(\lambda_1 + \mu_1)\alpha_2]\Delta T}{2(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)(\lambda_2 + \mu_2)}; \quad (r \geq r_1).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Зазначимо, що в рівнянні для $u^{(2)}(r)$ першим доданком є радіальне переміщення в однорідному середовищі 2 за відсутності стрижня 1, другий доданок обумовлений впливом тіла 1. Воно зменшується пропорційно до радіусу r_1 .

Наведемо також вирази для напружень у стрижні 1

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{(1)}(r) &= \sigma_\varphi^{(1)} = -\frac{\mu_2[(3\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)\alpha_1 - (3\lambda_2 + 2\mu_2)(\lambda_1 + \mu_1)\alpha_2]\Delta T}{(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)(\lambda_2 + \mu_2)}; \\
\sigma_z^{(1)}(r) &= \frac{[-(3\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2)\alpha_1 + (3\lambda_2 + \mu_2)\lambda_1\mu_2\alpha_2]\Delta T}{(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)(\lambda_2 + \mu_2)}; \\
&\quad (0 \leq r \leq r_1),
\end{aligned} \tag{4.17}$$

та в середовищі 2

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{(2)}(r) &= -\frac{r_1^2}{r^2} \frac{\mu_2[(3\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)\alpha_1 - (3\lambda_2 + 2\mu_2)(\lambda_1 + \mu_1)\alpha_2]\Delta T}{(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)(\lambda_2 + \mu_2)}; \\
\sigma_\varphi^{(2)}(r) &= \frac{r_1^2}{r^2} \frac{\mu_2[(3\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)\alpha_1 - (3\lambda_2 + 2\mu_2)(\lambda_1 + \mu_1)\alpha_2]\Delta T}{(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)(\lambda_2 + \mu_2)}; \\
\sigma_z^{(2)}(r) &= -\frac{\mu_2(3\lambda_2 + 2\mu_2)}{(\lambda_2 + \mu_2)} \alpha_2 \Delta T; \quad (r \geq r_1).
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Графіки цих функцій показано на рис. 4.2. Вони свідчать про те, що додаткові термонапруження $\sigma_r^{(2)}(r)$, $\sigma_\varphi^{(2)}(r)$, викликані включенням в середовище 2 армуючого стрижня 1, мають локальний характер і зменшуються пропорційно квадрату радіальної координати.

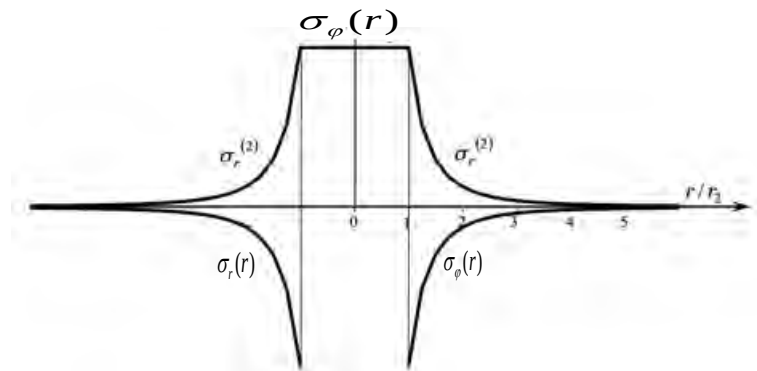


Рисунок 4.2 – Графіки розподілу напружень $\sigma_r(r)$, $\sigma_\varphi(r)$ у площині осьового перерізу армованої системи при плоскому термодетформуванні

Крім того, вони рівні один одному за модулем і відрізняються знаками, які залежать від співвідношення величин α_1 і α_2 . Так, якщо $\alpha_1 > \alpha_2$, то, як випливає з виду чисельників формули (4.18), при $\Delta T > 0$, $\alpha_1 > \alpha_2$, має місце співвідношення $\sigma_r^{(2)}(r) < 0$, $\sigma_\varphi^{(2)}(r) > 0$ і, якщо $\alpha_1 < \alpha_2$, то, навпаки, $\sigma_r^{(2)}(r) > 0$, $\sigma_\varphi^{(2)}(r) < 0$. Це означає, що, оскільки асфальтобетон при розтягуванні має меншу міцність, ніж при стисканні, при будь-яких змінах температури ΔT будуть реалізовуватися несприятливі термонапруження $\sigma_r^{(2)}(r)$ або $\sigma_\varphi^{(2)}(r)$.

Очевидно також, що значення термомеханічних параметрів, при яких чисельники дробів (4.18) функцій $\sigma_r^{(2)}(r)$, $\sigma_\varphi^{(2)}(r)$ дорівнюють нулю, є термічно сумісними. Тому рівність

$$(3\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)\alpha_1 - (3\lambda_2 + 2\mu_2)(\lambda_1 + \mu_1)\alpha_2 = 0 \quad (4.19)$$

є умовою сумісності термомеханічних параметрів матриці та армуючого стрижня.

Умова (4.19) може бути спрощена, якщо параметри Ламе λ і μ замінити на модуль пружності E та коефіцієнт Пуассона ν за допомогою формул

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.20)$$

Тоді замість (4.19) маємо простіший запис цієї умови

$$\frac{\alpha_1}{1+\nu_2} = \frac{\alpha_2}{1+\nu_1}. \quad (4.21)$$

Як приклад розглянемо випадок, коли склопластиковий армуючий стрижень радіусу r_1 з термомеханічними параметрами $\lambda_1 = 30.2$ ГПа, $\mu_1 = 12.9$ ГПа, $\alpha_1 = 0,9 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ знаходиться в асфальбетонному середовищі з параметрами $\lambda_2 = 1,38$ ГПа, $\mu_2 = 0,923$ ГПа, $\alpha_2 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. Прийнято, що $\Delta T = -20^\circ \text{ K}$. При цих даних термонапруження у системі склали $\sigma_r^{(1)} = \sigma_\varphi^{(1)} = 1.298$ МПа, $\sigma_z^{(1)} = 15.541$ МПа, $\sigma_r^{(2)} = 1.298 \frac{r_1^2}{r^2}$ МПа, $\sigma_z^{(2)} = -1.298 \frac{r_1^2}{r^2}$ МПа, $\sigma_z^{(2)} = 0.9986$ МПа.

Якщо врахувати, що межа міцності асфальтобетону при стисканні

становить $5 \div 20$ МПа, а при розтягуванні він виявляється в $6 \div 8$ раз менше цих значень, то можна зробити висновок, що за розглянутих умов додаткові термонапруження в асфальтобетоні, викликані введенням в нього армуючого стрижня зі склопластику, можуть призводити до виникнення локальних дефектів у його малому околі.

4.1.3 Пониження рівня термонапружень в околі трубчастої арматури

Як видно з рівностей (4.17), (4.18), додаткові напруження $\sigma_r^{(i)}$, $\sigma_\varphi^{(i)}$ ($i=1,2$), визначаються не тільки значеннями коефіцієнтів α_1 , α_2 , а й параметрами пружності λ_i , μ_i ($i=1,2$), які у чисельники дробів (4.17), (4.18) входять у третіх степенях, а в знаменники – у других. Тому додаткові термонапруження в системі зростають зі зростанням λ_i , μ_i ($i=1,2$) або, наприклад, зі зростанням радіальної жорсткості стрижня 1 (при збереженні його осьової міцності і жорсткості). І навпаки, вони зменшуються із зменшенням цієї жорсткості. Враховуючи цю властивість, можна запропонувати використовувати як арматуру в асфальтобетонних покриттях трубчасті стрижні (рис. 4.3). Досліджуємо термонапружений стан у цьому випадку. Нехай r_1 і r_2 – внутрішній та зовнішній радіуси труби 1, відповідно, розміри середовища 2 необмежені. Приймемо, як і вище, що λ_i , μ_i ($i=1,2$) – термомеханічні параметри тіл 1 і 2, ΔT – перепад температури тіл у початковому і кінцевому станах. Знайдемо функції термонапружень в системі для її осесиметричного плоского термодетформованого стану.

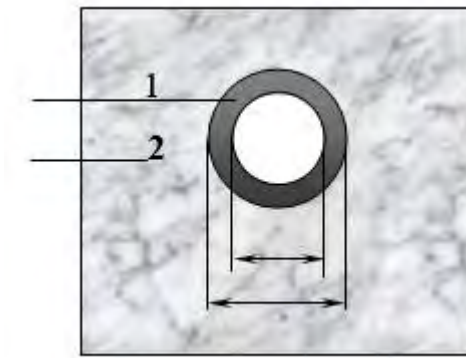


Рисунок 4.3 – Плоский фрагмент пружного середовища з трубчастим включенням

Як і для суцільного стрижня, рівняння термопружності системи мають вигляд (4.1) – (4.6). Розв’язок цих рівнянь знову формулюється у вигляді функцій радіальних переміщень для тіла 1

$$u_1(r) = rC_1 + \frac{1}{r}C_2; \quad (r_1 \leq r \leq r_2), \quad (4.22)$$

та для середовища 2

$$u_2(r) = rC_3 + \frac{1}{r}C_4; \quad (r \geq r_2). \quad (4.23)$$

При цьому константи C_i ($i = \overline{1,4}$) знаходяться з умов

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)}(r_1) &= 0; \\ u^{(1)}(r_2) &= u^{(2)}(r_2); \\ \sigma_r^{(1)}(r_2) &= \sigma_r^{(2)}(r_2); \\ \sigma_r^{(2)}(r) &\rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Після відповідних підстановок ці рівняння зводяться до вигляду

$$\begin{aligned}
 &2(\lambda_1 + \mu_1)C_1 - \frac{2\mu_1}{r_1^2}C_2 - (3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_1\Delta T = 0; \\
 &C_1 + \frac{1}{r_2^2}C_2 - C_3 - \frac{1}{r_2^2}C_4 = 0; \\
 &2(\lambda_1 + \mu_1)C_1 - \frac{2\mu_1}{r_2^2}C_2 - (3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_1\Delta T - \\
 &-2(\lambda_2 + \mu_2)C_3 + \frac{2\mu_2}{r_2^2}C_4 + (3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2\Delta T = 0; \\
 &2(\lambda_2 + \mu_2)C_3 - (3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2\Delta T = 0.
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

З останнього рівняння даної системи отримуємо

$$C_3 = \frac{(3\lambda_2 + 2\mu_2)}{2(\lambda_2 + \mu_2)}\alpha_2\Delta T. \tag{4.26}$$

Далі з інших рівнянь системи (4.25) знаходимо

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{\mu_1}{r_1^2} \frac{[-(3\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)\alpha_1 + (3\lambda_2 + 2\mu_2)(\lambda_1 + \mu_1)\alpha_2]\Delta T}{2(\lambda_1 + \mu_1)^2(\lambda_2 + \mu_2) \left[\frac{\mu_1}{r_1^2(\lambda_1 + \mu_1)} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \right]} + \\
 &+ \frac{(3\lambda_1 + 2\mu_1)}{2(\lambda_1 + \mu_1)}\alpha_1\Delta T; \\
 C_2 &= \frac{[-(3\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)\alpha_1 + (3\lambda_2 + 2\mu_2)(\lambda_1 + \mu_1)\alpha_2]\Delta T}{2(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2) \left[\frac{\mu_1}{r_1^2(\lambda_1 + \mu_1)} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \right]}; \\
 C_4 &= \frac{r_2^2\mu_1 \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right)}{\mu_2} \frac{[(3\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)\alpha_1 - (3\lambda_2 + 2\mu_2)(\lambda_1 + \mu_1)\alpha_2]\Delta T}{2(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2) \left[\frac{\mu_1}{r_1^2(\lambda_1 + \mu_1)} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \right]}.
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

За допомогою знайдених констант можна будувати вирази для переміщень

$$\begin{aligned} u(r) &= rC_1 + \frac{1}{r}C_2; \quad (r_1 \leq r \leq r_2); \\ u(r) &= rC_3 + \frac{1}{r}C_4; \quad (r \geq r_2), \end{aligned} \quad (4.28)$$

і напружень у стрижні 1

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)}(r) &= 2(\lambda_1 + \mu_1)C_1 - \frac{2\mu_1}{r^2}C_2 - (3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_1\Delta T; \\ \sigma_\varphi^{(1)}(r) &= 2(\lambda_1 + \mu_1)C_1 + \frac{2\mu_1}{r^2}C_2 - (3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_1\Delta T; \\ \sigma_z^{(1)}(r) &= 2\lambda_1C_1 - (3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_1\Delta T; \quad (r_1 \leq r \leq r_2), \end{aligned} \quad (4.29)$$

і у середовищі 2

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(2)}(r) &= -\frac{2\mu_2}{r^2}C_4; \\ \sigma_\varphi^{(2)}(r) &= -\frac{2\mu_1}{r^2}C_2; \\ \sigma_z^{(2)}(r) &= 2\lambda_2C_3 - (3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2\Delta T; \quad (r \geq r_1). \end{aligned} \quad (4.30)$$

У табл. 4.1 наведено значення напружень $\sigma_r^{(1)}$, $\sigma_\varphi^{(1)}$, $\sigma_z^{(1)}$ на поверхнях $r = r_1$ і $r = r_2$ склопластикового тіла 1 і напружень $\sigma_r^{(2)}$, $\sigma_\varphi^{(2)}$, $\sigma_z^{(2)}$ на поверхні $r = r_2$ асфальтобетонного середовища 2 для відношень $r_1 / r_2 = 0.5, 0.75$ і 0.9 при значеннях термомеханічних параметрів, наведених вище, і перепаді температури $\Delta T = -20^\circ$.

Таблиця 4.1 – Значення термонапружень у середовищі, армованому трубчастим стрижнем

Види термонапружень	r_1 / r_2			
	0.0	0.5	0.75	0.9
$\sigma_r^{(1)}(r_1)$ МПа	1.2981	0	0	0
$\sigma_\varphi^{(1)}(r_1)$ МПа	1.2981	3.2455	4.5766	7.3764
$\sigma_z^{(1)}(r_1)$ МПа	15.541	15.569	16.235	17.215
$\sigma_r^{(1)}(r_2)$ МПа	1.2981	1.2171	1.0011	0.7008
$\sigma_\varphi^{(1)}(r_2)$ МПа	1.2981	2.0285	3.5742	6.6752
$\sigma_z^{(1)}(r_2)$ МПа	15.541	15.569	16.235	17.215
$\sigma_r^{(2)}(r_2)$ МПа	1.2981	1.2171	1.0011	0.7008
$\sigma_\varphi^{(2)}(r_2)$ МПа	-1.2981	-1.2171	-1.0011	-0.7008
$\sigma_z^{(2)}(r_2)$ МПа	0.9986	0.9986	0.9986	0.9986

Заслуговує на інтерес питання розподілу додаткових термонапружень $\sigma_r^{(i)}(r)$, $\sigma_\varphi^{(i)}(r)$, у радіальному напрямку. На рис. 4.4 показані графіки цих функцій для випадку $r_1 / r_2 = 0,75$.

Як видно, додаткові термонапруження $\sigma_r^{(2)}(r)$, $\sigma_\varphi^{(2)}(r)$ в асфальтобетоні мають найбільші значення на поверхні контакту $r = r_2$ і вони швидко зменшуються в радіальному напрямку.

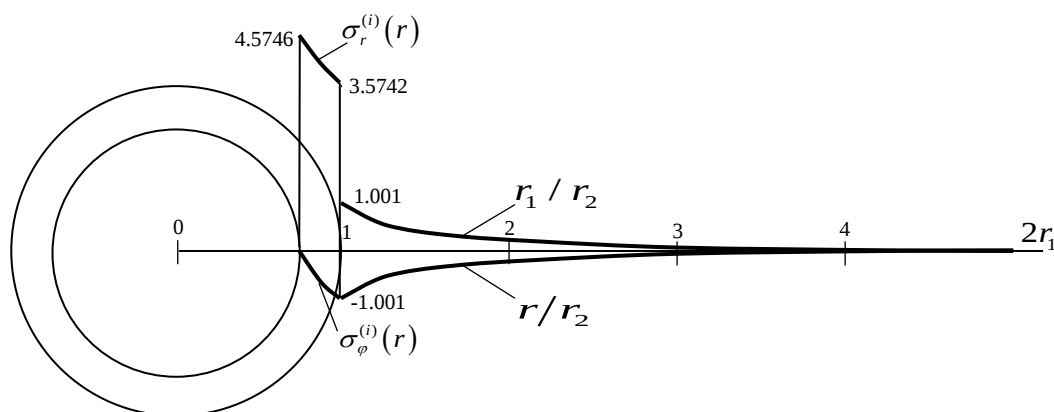


Рисунок 4.4 – Графіки розподілу термонапружень $\sigma_{\varphi}^{(2)}$, $\sigma_r^{(2)}$ (МПа) для випадку $2r = 0,75$.

Аналіз наведених результатів свідчить про те, що заміна суцільного армуючого стрижня трубчастим призводить до помітного зменшення додаткових локальних термонапружень у середовищі матриці, хоча при цьому дещо підвищуються термонапруження в стрижні. Цей ефект стає більш відчутним із зменшенням товщини стрижня трубки.

4.2 Чому в деяких регіонах у конструкціях мостів заборонена сталева арматура з епоксидним покриттям?

4.2.1 Дослідження переваг та недоліків використання армуючих стрижнів з епоксидним покриттям

Залізобетон являє собою композитний матеріал, в якому відносно мала міцність при розтягуванні та низька деформативність його цементобетонної матриці компенсуються сталевую арматурою з високими показниками цих якостей. Оскільки міцність цементобетону при розтягуванні приблизно в 10 разів менше його міцності при стисканні, залізобетонні конструкції проектують так, щоб стискаючі сили в них сприймав бетон, а сили розтягу – сталева арматура. Разом з тим залізобетон володіє ще однією особливістю,

пов'язаною з тим, що коефіцієнти термічного лінійного розширення його компонентів і сталевій арматури приблизно однакові і тому в ньому не зароджуються додаткові внутрішньоструктурні термонапруження, що викликані їх термомеханічною несумісністю.

Однак при експлуатації залізобетонних конструкцій в умовах підвищеної вологості їх довговічність може в значній мірі знижуватися в результаті корозії сталевій арматури [89, 123, 162, 182, 206, 285]. Оскільки об'єм продуктів корозії сталі в 20÷30 разів більше її вихідного об'єму, то в бетоні в зоні кородуючої сталевій арматури утворюється джерело всестороннього тиску на бетон, що викликає дію значних сили розтягу, які перевищують його міцність та такі, що викликають у ньому відколювання та тріщини. Через ці тріщини до зони корозії притікають нові порції води, швидкість корозії та тріщиноутворення зростає і механічний зв'язок між бетоном та арматурою втрачається. Щоб мінімізувати процес корозійної деградації залізобетону в шістдесяті роки минулого сторіччя в США сталеву арматуру стали вкривати ізолюючим епоксидним шаром, сподіваючись довести довговічність конструкцій до ста років. Стверджувалось, що епоксидний шар надає йому підвищену адгезію зі сталлю, він надійно ізолює сталь від взаємодії з електро-хімічними елементами та іонами солей і запобігає її корозії.

Однак швидко проявились і недоліки покриттям епоксидним шаром сталевій арматури. Виявилось, що це призводить до зменшення на 35% загальної сили зчеплення між бетоном та арматурою [286]. Крім того стверджується [230, 246], що найбільшим недоліком епоксидного шару є його легка пошкодженість в процесі нанесення на стрижень та при складуванні готової арматури, а також при її відвантаженні і при транспортуванні, розвантаженні, і при будівельно-монтажних роботах при виготовленні залізобетонних конструкцій. В результаті виявляється, що

навіть найдрібніші пошкодження у формі раковин, подряпин або тріщин надають стимулюючий вплив на процес корозії, епоксидний шар відшаровується та ржавіння арматури з епоксидним шаром починає відбуватись навіть більш інтенсивно порівняно з випадком непокритого стрижня сталевих арматури. У зв'язку з цим для арматури з покриттям були розроблені додаткові інструкції та стандарти по спеціальній очистці її поверхні перед обробкою та способам відвантаження-розвантаження, транспортування та бетонування в польових умовах. Однак ефективність цих заходів продовжувала залишатися вкрай низькою. Натурні спостереження та контроль за мостовими залізобетонними конструкціями в приморських умовах свідчили про те, що стрижні сталевих арматури з епоксидним покриттям, які використовувались, в більшій мірі піддаються корозійній руйнації, ніж непокриті стрижні. За свідченням Групи спостереження за мостами Міністерства транспорту в Онтаріо (Канада) [230] декілька мостових споруд з арматурою з епоксидним покриттям вже піддавались ремонту, не перевищивши навіть 20-річного терміну експлуатації, хоча для багатьох із них цей запланований термін рівний 75 р.

У зв'язку з тим, що вказаний механізм антикорозійного захисту не забезпечує навіть її 30-річної довговічності, у багатьох регіонах США та Канади вона заборонена або не рекомендована до використання. У Флориді (США) вона заборонена в 1979 р., в штаті Орегон – в 1988 р., не рекомендована до використання в штаті Вірджинія, а також в провінції Квебек та Онтаріо (Канада) в 2000 р.

Тим не менше, в наукових публікаціях почала з'являтися інформація про те, що антикорозійний захист арматури з епоксидним покриттям не поступається захисту арматури без покриття. В статті [250] відмічається, що, починаючи з 1986 р., у Флориді контрольним спостереженням була піддана група з 12-ти мостів, побудованих між 1975 та 1991 роками. Було

встановлено, що тільки перші початкові ознаки корозії стали спостерігатись у п'яти мостів на шостий рік експлуатації, які потім продовжували прогресувати. У чотирьох інших мостів прогресуюча корозія була виявлена після 20 років експлуатації.

В статтях [87, 165] відмічається, що за аналізом корозії мостів, що містили арматуру з епоксидним покриттям, повинні бути зібрані додаткові дані, оскільки найстаріші з них експлуатуються всього лише 40 років і тільки у деяких з них виявлені корозійні дефекти, а в статті [104] стверджується, що взагалі арматура з епоксидним покриттям краща від непокритої арматури.

Беручи до уваги розбіжність інформації про вплив епоксидного шару на антикорозійний захист арматури, необхідно підкреслити ще одну особливість. Справа в тому, що корозійні дефекти в арматурі з покриттям, в основному, спостерігались в регіонах Канади та США з великими сезонними перепадами температури. При цьому внутрішньоструктурні термонапруження в матеріалі з непокритою арматурою виявляються практично нечуттєвими до цих перепадів, так як цементобетон та сталь мають практично однакові значення коефіцієнтів лінійного температурного розширення (КЛТР) $\alpha_1 \approx 1 \cdot 10^{-5} \text{ } 1/^{\circ}\text{K}$ і тому їх термічні деформації сумісні [267]. Однак ситуація суттєвим чином змінюється, якщо між бетоном та сталлю розташувати епоксидний прошарок, КЛТР якого $\alpha_2 \approx 5 \cdot 10^{-5} \text{ } 1/^{\circ}\text{K}$ в п'ять разів перевищує α_1 . Тому, як показали розрахунки авторів [12, 238], навіть при помірних перепадах температури на міжфазних (інтерфейсних) поверхнях такого композиту виникають концентратори додаткових внутрішньоструктурних термонапружень, що значно перевищують міцність матеріалу матриці. Викликані ними термопошкодження поширюються вздовж армуючого сталевго стрижня та можуть бути каналами для перенесення вологи по всій його довжині. Цей ефект може сприяти ініціюванню та активізації корозійних процесів в системі. Нижче наведено

теоретичне моделювання цього ефекту на основі методів теорії термопружності.

4.2.2 Постановка задачі

Цементобетон, армований сталевими стрижнями з епоксидним покриттям, являє собою трифазний композит. Для аналізу його внутрішньоструктурних термонапружень, які викликані несумісністю термомеханічних параметрів його компонент, виділимо стрижень 1 з покриттям 2, оточені середовищем цементобетонної матриці 3 (рис. 4.5), та методами термопружності дослідимо деформування системи при зміні температури на величину T .

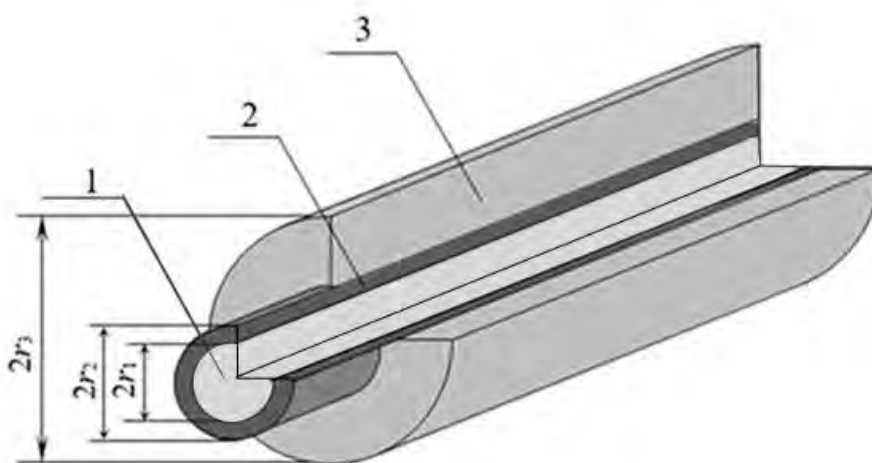


Рисунок 4.5 - Схема включення 1, покритого шаром 2, в середовищі матриці 3

Термомеханічні властивості фаз системи визначаються їх модулями пружності E_i , коефіцієнтами Пуассона ν_i , границями міцності на розтягування $[\sigma]_i$ та коефіцієнта лінійного термічного розширення (КЛТР) α_i . Для сталюого стрижня 1, епоксидного покритву 2 та цементобетонної

матриці 3 вони складають, відповідно: $E_1 = 210$ ГПа, $\nu_1 = 0,3$, $[\sigma]_1 = 250 \div 2600$ МПа, $\alpha_1 = 1 \cdot 10^{-5}$ $1/^\circ\text{C}$; $E_2 = 3,8 \div 5,8$ ГПа, $\nu_2 = 0,33$, $[\sigma]_2 = 40 \div 80$ МПа, $\alpha_2 = 5,5 \cdot 10^{-5}$ $1/^\circ\text{C}$; $E_3 = 30 \div 50$ ГПа, $\nu_3 = 0,2$, $[\sigma]_3 = 2 \div 5$ МПа, $\alpha_3 = 1 \cdot 10^{-5}$ $1/^\circ\text{C}$. Основна особливість цих даних полягає в тому, що КЛТР епоксидного шару більш, ніж в 5 разів перевищує цю величину для сталі та бетону, а бетон має вкрай низьку міцність при розтягуванні.

Відмітимо, що вказану задачу термопружності зручніше формулювати за допомогою параметрів пружності Ляме λ та μ , виражаючи їх через E та ν , використовуючи рівності

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (4.31)$$

Для обчислення використовується циліндрична система координат $O r \varphi z$, в якій r та φ – радіальна та колова координати, відповідно, вісь Oz напрямлена вздовж осі стрижня 1.

Розв’язувальні рівняння системи виражаються через рівняння кожної фракції композита [12, 32, 169]

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u^{(1)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du^{(1)}}{dr} - \frac{1}{r^2} u^{(1)} &= 0; & (0 \leq r \leq r_1); \\ \frac{d^2 u^{(2)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du^{(2)}}{dr} - \frac{1}{r^2} u^{(2)} &= 0; & (r_1 \leq r \leq r_2); \\ \frac{d^2 u^{(3)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du^{(3)}}{dr} - \frac{1}{r^2} u^{(3)} &= 0; & (r \geq r_2), \end{aligned} \quad (4.32)$$

де $u^{(i)}$ ($i=1,2,3$) радіальне переміщення пружного елемента.

Розв’язок рівнянь (4.32) має вигляд [147]

$$\begin{aligned}
u^{(1)}(r) &= rC_1 + \frac{1}{r}C_2; & (0 \leq r \leq r_1); \\
u^{(2)}(r) &= rC_3 + \frac{1}{r}C_4; & (r_1 \leq r \leq r_2); \\
u^{(3)}(r) &= rC_5 + \frac{1}{r}C_6; & (r \geq r_2),
\end{aligned} \tag{4.33}$$

де C_i ($i = \overline{1,6}$) – константи, що визначаються з умов на граничних поверхнях

$$\begin{aligned}
u^{(1)}(0) &= 0; & u^{(1)}(r_1) &= u^{(2)}(r_1); \\
\sigma_r^{(1)}(r_1) &= \sigma_r^{(2)}(r_1); & u^{(2)}(r_2) &= u^{(3)}(r_2); \\
\sigma_r^{(2)}(r_2) &= \sigma_r^{(3)}(r_2); & \sigma_r^{(3)}(r_3) &\rightarrow 0 \quad \text{при } r_3 \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Тут $\sigma_r^{(i)}(r)$ – радіальні термонапруження. Разом з коловими термонапруженнями $\sigma_\varphi^{(i)}(r)$ вони обчислюються за формулами

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{(i)}(r) &= (\lambda_i + 2\mu_i)\varepsilon_r^{(i)} + \lambda_i\varepsilon_\varphi^{(i)} - (3\lambda_i + 2\mu_i)\alpha_i T; \\
\sigma_\varphi^{(i)}(r) &= (\lambda_i + 2\mu_i)\varepsilon_\varphi^{(i)} + \lambda_i\varepsilon_r^{(i)} - (3\lambda_i + 2\mu_i)\alpha_i T; & (i = \overline{1,3}).
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Відносні деформації $\varepsilon_r^{(i)}(r)$, $\varepsilon_\varphi^{(i)}(r)$, що тут використовуються, виражаються через переміщення:

$$\varepsilon_r^{(i)}(r) = \frac{du^{(i)}}{dr}; \quad \varepsilon_\varphi^{(i)}(r) = \frac{u^{(i)}}{r}; \quad (i = 1, 2, 3). \tag{4.36}$$

З першого та останнього співвідношень системи (4.34) випливає:

$$C_2 = 0; \quad C_5 = \frac{(3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_3\Delta T}{2(\lambda_2 + \mu_2)}. \quad (4.37)$$

За допомогою рівностей (4.35), (4.36) чотири рівняння, що залишилися, системи (4.34), зводяться до вигляду

$$\begin{aligned} r_1 C_1 &= r_1 C_3 + \frac{1}{r_1} C_4; \\ 2(\lambda_1 + \mu_1)C_1 - (3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_1 T &= 2(\lambda_2 + \mu_2)C_3 - \frac{2\mu_2}{r_1^2} C_4 - (3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2 T; \\ r_2 C_3 + \frac{1}{r_2} C_4 &= r_2 \frac{(3\lambda_3 + 2\mu_3)\alpha_3 T}{2(\lambda_3 + \mu_3)} + \frac{1}{r_2} C_6; \\ 2(\lambda_2 + \mu_2)C_3 - \frac{2\mu_2}{r_2^2} C_4 - (3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2 T &= -\frac{2\mu_3}{r_2^2} C_6. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} a_{11} &= (\lambda_2 + \mu_2 + \mu_3); & a_{12} &= \frac{1}{r_2}(\mu_3 - \mu_2); \\ a_{21} &= [(\lambda_1 + \mu_1) - (\lambda_2 + \mu_2)]; & a_{22} &= \frac{1}{r_1^2}(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2); \\ b_1 &= \frac{T}{2} \left[\frac{\mu_3}{(\lambda_3 + \mu_3)} (3\lambda_3 + 2\mu_3)\alpha_3 + (3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2 \right]; \\ b_2 &= \frac{T}{2} [(3\lambda_3 + 2\mu_3)\alpha_1 - (3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2]. \end{aligned} \quad (4.39)$$

За їх допомогою з системи (4.38) можна отримати

$$\begin{aligned}
C_3 &= \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}; & C_4 &= \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}; & C_1 &= C_3 + \frac{1}{r_1^2} C_4; \\
C_6 &= -\frac{r_2^2 (\lambda_2 + \mu_2)}{\mu_3} C_3 + \frac{\mu_2}{\mu_3} C_4 + \frac{r_2^2 (3\lambda_2 + 2\mu_2)}{2\mu_3} \alpha_2.
\end{aligned} \tag{4.40}$$

З рівнянь (4.33), (4.35)-(4.37), (4.39), (4.40) випливають вирази для термонапружень у фракціях 1-3:

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{(1)}(r) &= \sigma_\varphi^{(1)}(r) = 2(\lambda_1 + \mu_1) C_1 - (3\lambda_1 + 2\mu_1) \alpha_1 T; & (0 \leq r \leq r_1); \\
\sigma_r^{(2)}(r) &= 2(\lambda_2 + \mu_2) C_3 - \frac{2\mu_2}{r^2} C_4 - (3\lambda_2 + 2\mu_2) \alpha_2 T; & (r_1 \leq r \leq r_2); \\
\sigma_\varphi^{(2)}(r) &= 2(\lambda_2 + \mu_2) C_3 + \frac{2\mu_2}{r^2} C_4 - (3\lambda_2 + 2\mu_2) \alpha_2 T; & (r_1 \leq r \leq r_2); \\
\sigma_r^{(3)}(r) &= -\frac{2\mu_3}{r^2} C_6; & (r \geq r_2); \\
\sigma_\varphi^{(3)}(r) &= \frac{2\mu_3}{r^2} C_6; & (r \geq r_2).
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Використовуючи їх можна обчислити функції (4.41) при заданих параметрах $\lambda_i, \mu_i, \alpha_i (i=\overline{1,3})$. Їхні величини, що виражені через наведені вище значення $E_i, \nu_i (i=\overline{1,3})$ за допомогою формул (4.31), склали: $\lambda_1 = 121,2$ ГПа, $\mu_1 = 80,77$ ГПа, $\alpha_1 = 1 \cdot 10^{-5} 1/^\circ \text{C}$, $\lambda_2 = 4,233$ ГПа, $\mu_2 = 2,18$ ГПа, $\alpha_1 = 5,5 \cdot 10^{-5} 1/^\circ \text{C}$, $\lambda_3 = 13,89$ ГПа, $\mu_1 = 20,83$ ГПа, $\alpha_1 = 1 \cdot 10^{-5} 1/^\circ \text{C}$.

Підкреслимо, що оскільки $\alpha_1 = \alpha_3$, у відсутності епоксидного шару додаткові внутрішньоструктурні термонапруження в залізобетоні при зміні його температури дорівнюють нулю. Однак додавання до системи епоксидного шару з підвищеним значенням α_2 вносить суттєві зміни у розподілення полів додаткових термонапружень.

В табл. 4.2 наведені значення термонапружень в граничних точках

$r = 0$, $r = r_1$ та $r = r_2$ системи при зміні температури від 0°C до $T = -30^\circ \text{C}$ для випадків $r_1 / r_2 = 0,9$; $0,95$ та $0,98$, в яких товщини h шарів епоксидного покриття склали $h = 0,1r_2$; $0,05r_2$ та $0,02r_2$, де r_2 – радіус армуючого стрижня з епоксидним покриттям.

Графіки функцій $\sigma_r^{(i)}(r)$, $\sigma_\varphi^{(i)}(r)$ для випадку $r_1/r_2 = 0,9$ наведені на рис. 4.6. Як видно, функція $\sigma_r(r)$ є ламаною, функція $\sigma_\varphi(r)$ – розривною.

Таблиця 4.2 – Значення термонапружень $\sigma_r^{(i)}(r)$, $\sigma_\varphi^{(i)}(r)$ ($i = \overline{1,3}$) в граничних точках композиту при $T = -30^\circ \text{C}$

$\sigma_r^{(i)}(r)$, $\sigma_\varphi^{(i)}(r)$ МПа	$\frac{r_1}{r_2} = 0,9$	$\frac{r_1}{r_2} = 0,95$	$\frac{r_1}{r_2} = 0,98$
$\sigma_r^{(1)}(0) = \sigma_r^{(1)}(r_1)$	7,179	4,695	2,732
$\sigma_\varphi^{(1)}(0) = \sigma_\varphi^{(1)}(r_1)$	7,179	4,695	2,732
$\sigma_r^{(2)}(r_1)$	7,179	4,695	2,732
$\sigma_\varphi^{(2)}(r_1)$	11,292	14,135	13,133
$\sigma_r^{(2)}(r_2)$	7,967	5,161	2,937
$\sigma_\varphi^{(2)}(r_2)$	9,042	13,675	12,927
$\sigma_r^{(3)}(r_2)$	7,967	5,161	2,937
$\sigma_\varphi^{(3)}(r_2)$	-7,967	-5,161	-2,937

Аналіз цих результатів свідчить про те, що у всіх випадках при вибраній температурі $T = -30^\circ \text{C}$ термонапруження в сталевому стрижні 1 та епоксидному шарі 2 далекі від граничних, однак в бетонному середовищі вони перевищують її границі міцності.

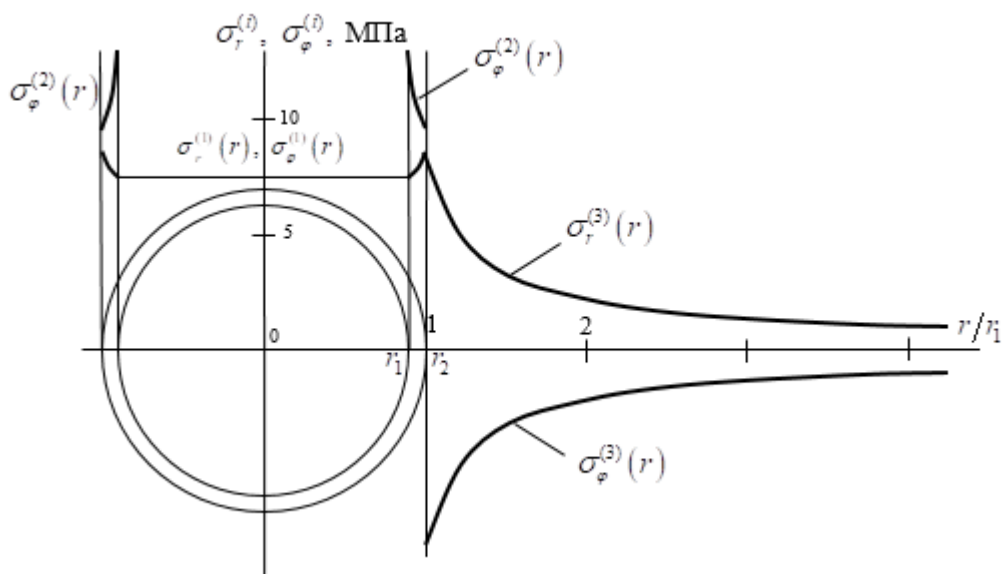


Рисунок 4.6 - Графіки розподілу термонапружень $\sigma_r^{(i)}(r)$, $\sigma_\phi^{(i)}(r)$ (МПа) в композиті при $r_1 / r_2 = 0,9$, $T = -30^\circ \text{C}$.

Причому при від'ємних значеннях T радіальні напруження виявляються розтягуючими, а колові – стискаючими. Це означає, що викликані термопошкодження реалізуються у вигляді колових тріщин та відшарувань в бетоні (рис. 4.7 а). Оскільки ці напруження швидко спадають (див. рис. 4.6), тріщини, що виникли, концентруються в малому околі поверхні $r = r_2$, вони виявляються короткими в коловому напрямі, але розташовуються вздовж всієї довжини стрижня. Все це сприяє поступовій деструкції структурних зв'язків цементобетону з арматурою, у зв'язку з тим що волога може проникати у бетон розповсюджуючись також по всій його довжині, заповнюючи при цьому такі дефекти.

Ці явища супроводжуються додатковими механічними ефектами [132] при зміні знаку температури T з від'ємного до додатного. В цьому випадку термонапруження у бетоні в околі арматури також можуть досягати граничних значень, однак цього разу радіальні напруження виявляються стискаючими, а колові розтягуючими. Це призводить до виникнення в бетоні додаткових радіальних тріщин (рис. 4.7 б), порушенню цілісності бетону в

цій зоні, втраті зв'язку між епоксидним шаром та бетоном та зміні механізму наступної термомеханічної взаємодії фаз системи. Цей механізм розглядається нижче.

4.2.3 Моделювання термонапружень в епоксидному покритті при втраті його зв'язку з бетоном

Проаналізуємо випадок, коли, як показано вище, в результаті багатократних знижень та підвищень температури системи термопошкодження в бетоні супроводжуються порушенням його цілісності поблизу епоксидного шару та втраті механічного зв'язку між ними. Тоді при термічній оцінці термонапруженого стану епоксидного покриття можна вважати, що контактні напруження на поверхні його дотику з бетоном рівні нулю і для обчислення виділити тільки сталевий стрижень 1 з епоксидним покриттям 2.

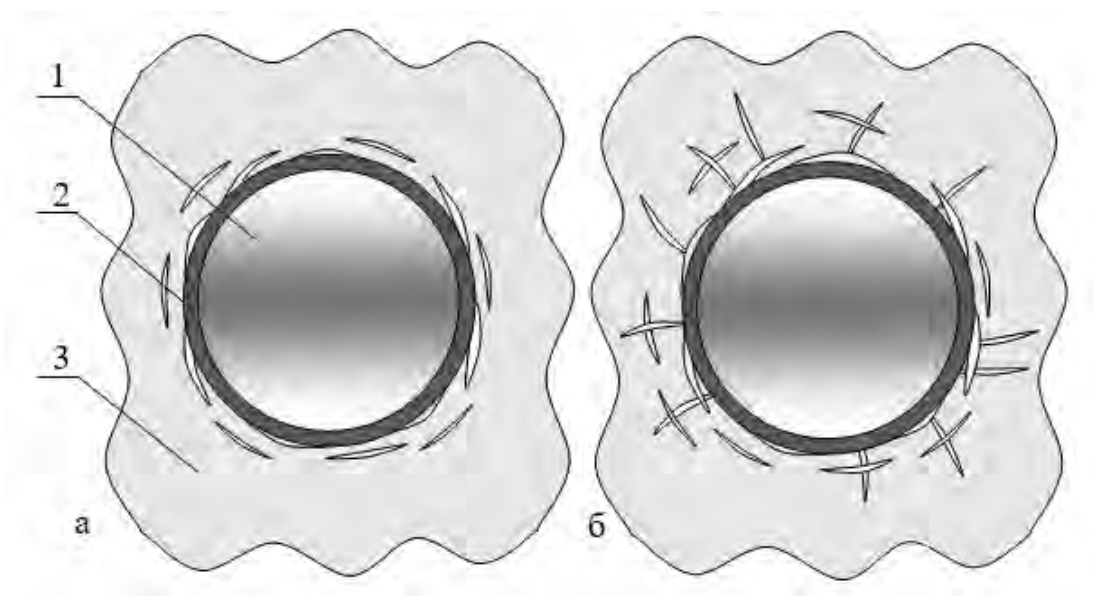


Рисунок 4.7 - Схеми утворення термопошкоджень в цементобетонній матриці в околі епоксидного покриття.

Крім того такий механізм термонапруження реалізуються в армуючому стрижні до його додавання в бетонну масу, наприклад, при зберіганні арматури, її транспортуванні та виконанні вантажно-розвантажувальних робіт.

В цьому випадку із системи рівнянь (4.32) залишаються тільки два перші рівняння

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u^{(1)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du^{(1)}}{dr} - \frac{1}{r^2} u^{(1)} &= 0; \quad (0 \leq r \leq r_1); \\ \frac{d^2 u^{(2)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du^{(2)}}{dr} - \frac{1}{r^2} u^{(2)} &= 0; \quad (r_1 \leq r \leq r_2).\end{aligned}\tag{4.42}$$

Вони мають розв'язок

$$\begin{aligned}u^{(1)}(r) &= rC_1 + \frac{1}{r}C_2; \quad (0 \leq r \leq r_1); \\ u^{(2)}(r) &= rC_3 + \frac{1}{r}C_4; \quad (r_1 \leq r \leq r_2).\end{aligned}\tag{4.43}$$

Константи C_i ($i = \overline{1,4}$), що тут використовуються, знаходяться з крайових умов

$$\begin{aligned}u^{(1)}(0) &= 0; & u^{(1)}(r_1) &= u^{(2)}(r_1); \\ \sigma_r^{(1)}(r_1) &= \sigma_r^{(2)}(r_1); & \sigma_r^{(2)}(r_2) &= 0.\end{aligned}\tag{4.44}$$

Виразимо дану систему через константи

$$\begin{aligned}
C_2 &= 0; \\
r_1 C_1 &= r_1 C_3 + \frac{1}{r_1} C_4; \\
2(\lambda_1 + \mu_1) C_1 - (3\lambda_1 + 2\mu_1) \alpha_1 T &= 2(\lambda_2 + \mu_2) C_3 - \frac{2\mu_2}{r_1^2} C_4 - (3\lambda_2 + 2\mu_2) \alpha_2 T; \\
2(\lambda_2 + \mu_2) C_3 - \frac{2\mu_2}{r_2^2} C_4 - (3\lambda_2 + 2\mu_2) \alpha_2 T &= 0.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Ця система зводиться до вигляду:

$$\begin{aligned}
C_3 &= \frac{\mu_2}{r_2^2(\lambda_2 + \mu_2)} C_4 + \frac{r_2^2(3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2 T}{2(\lambda_2 + \mu_2)}; \\
C_1 - \frac{\mu_2 r_1^2 + (\lambda_2 + \mu_2) r_2^2}{r_1^2 r_2^2 (\lambda_2 + \mu_2)} C_4 &= \frac{(3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2 T}{2(\lambda_2 + \mu_2)}; \\
C_1 - \frac{\mu_2(r_1^2 - r_2^2)}{r_1^2 r_2^2 (\lambda_1 + \mu_1)} C_4 &= \frac{(3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_1 T}{2(\lambda_1 + \mu_1)};
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Вона має розв'язок

$$\begin{aligned}
C_4 &= \left[\frac{(3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2 T}{2(\lambda_2 + \mu_2)} - \frac{(3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_1 T}{2(\lambda_1 + \mu_1)} \right] \times \\
&\quad \frac{r_1^2 r_2^2 (\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)}{\left[(r_1^2 - r_2^2)\mu_2(\lambda_2 + \mu_2) - r_1^2 \mu_2(\lambda_1 + \mu_1) - r_2^2(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2) \right]}; \\
C_1 &= \frac{(r_1^2 - r_2^2)}{r_1^2 r_2^2} \frac{\mu_2}{(\lambda_1 + \mu_1)} C_4 + \frac{(3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_1 T}{2(\lambda_1 + \mu_1)}; \\
C_3 &= \frac{\mu_2}{r_2^2(\lambda_2 + \mu_2)} C_4 + \frac{(3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2 T}{2(\lambda_2 + \mu_2)}.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Значення термонапружень, обчислених для такої конструкційної моделі при $r_1/r_2 = 0,9; 0,95; 0,98$ та $T = -30^\circ$ наведені в табл. 4.3.

Таблиця 4.3 – Значення термонапружень $\sigma_r^{(i)}(r)$, $\sigma_\varphi^{(i)}(r)$ ($i=1,2$) в граничних точках сталюго стрижня з епоксидним покриттям при $T = -30^\circ \text{C}$

$\sigma_r^{(i)}(r), \sigma_\varphi^{(i)}(r)$ МПа	$\frac{r_1}{r_2} = 0,9$	$\frac{r_1}{r_2} = 0,95$	$\frac{r_1}{r_2} = 0,98$
$\sigma_r^{(1)}(0) = \sigma_r^{(1)}(r_1)$	-1,169	-0,588	-0,234
$\sigma_\varphi^{(1)}(0) = \sigma_\varphi^{(1)}(r_1)$	-1,169	-0,588	-0,234
$\sigma_r^{(2)}(r_1)$	-1,169	-0,588	-0,234
$\sigma_\varphi^{(2)}(r_1)$	11,148	11,445	11,624
$\sigma_r^{(2)}(r_2)$	0,0	0,0	0,0
$\sigma_\varphi^{(2)}(r_2)$	9,970	10,8589	11,390

Як видно термонапруження в епоксидному шарі такої конструкції при заданій температурі дещо перевищують ці значення для випадку, коли стрижень знаходиться в середині цементобетонного середовища (див. табл. 4.3), однак вони циклічно змінюються і можуть складати помітну добавку до експлуатаційних (також циклічно діючих) напружень та стають причиною швидкого пошкодження його шару. У такому випадку антикорозійний ефект зникає, сталева арматура кородує, що супроводжується відповідними негативними наслідками

Таким чином вище наведені результати досліджень продемонстрували можливі причини зменшення довговічності мостових залізобетонних конструкцій при застосуванні сталевий арматури з епоксидним покриттям за рахунок комплексної дії деструктивних факторів, викликаних термомеханічний механізм порушення внутрішньоструктурної цілісності бетону та епоксидного покриття, що обумовлений високим значенням його КЛТР у порівнянні із значеннями КЛТР бетону та сталюй арматури.

4.3 Внутрішньоструктурні термонапруження в асфальтобетонних і цементобетонних матеріалах, підсилених фібергласовою, фіберкарбоновою, фібербазальтовою та фіберарамідною арматурою

4.3.1 Аналіз теоретичних передумов використання фібергласової, фіберкарбонової, фібербазальтової та фіберарамідної арматур

Останніми десятиліттями альтернативою сталевій арматурі в цементобетоні при будівництві доріг, мостів дамб, гребель та фундаментів стали композитні стрижні на основі полімерів, підсилені волокнами зі скла, карбону, базальту та арамідів. На відміну від сталевих стрижнів вони не кородують, володіють малою густиною, хімічною стабільністю та механічними властивостями, що забезпечують конструкції достатню міцність та довговічність. В будівельній індустрії накопичений достатній досвід про проектування та експлуатації таких конструкцій, розроблені спеціальні норми та правила по їх будівництву в континентальних та приморських регіонах з підвищеними опадами та вологістю.

Активні пошуки матеріалів для заміни арматури в цементобетонних конструкціях у зв'язку з її інтенсивною корозією почалися в Канаді та США в сімдесяті роки минулого сторіччя. З цією метою на сталеві стрижні почали наносити епоксидне покриття, що захищає сталь від вологи та, за думкою інженерів, що перешкоджає її корозії [182].

Однак, невдовзі в Канаді та північних регіонах США стали помічати випадки погіршення корозійної стійкості конструкцій з такою арматурою [123, 162, 182, 198, 206, 226, 285, 286]. Так, за результатами перевірочних робіт групою спостереження за мостами Міністерства транспорту Онтаріо (Канада) [230] декілька мостових споруд з арматурою з епоксидним

покриттям вже піддавались ремонту, не перевищивши навіть 20-річного терміну експлуатації, хоча для багатьох із них цей запланований термін рівний 75 р.

Після аналізу цієї ситуації послідовники прийшли до висновку [230, 246], що причина цього явища полягає у крихкості та легким пошкодженням епоксидної смоли, що призводить до пошкоджень епоксидного шару при нанесенні його на сталевий стрижень, при складуванні готової арматури, а також при її відвантаженні, транспортуванні, розвантаженні та при будівельно-монтажних роботах у процесі виготовлення залізобетонних конструкцій. Стверджувалось, що в подальшому ці пошкодження порушують цілісність конструкції, стимулюють підведення вологи до сталевій арматури та загострюють корозійні процеси.

У зв'язку з цим після врахування недоліків сталевій арматури з епоксидним покриттям вона була не рекомендована або заборонена у багатьох штатах США та провінціях Канади. Однак разом з цим в науковій літературі почала з'являтися інформація [250] про те, що така арматура по антикорозійним властивостям не поступається звичайній сталевій арматурі та навіть перевершує її [104]. В статтях [87] зауважується, що дослідження у цьому напрямку мають бути продовжені.

Беручи до уваги розбіжність інформації щодо питання, яке розглядається, а також несприятливі кліматичні умови з великими перепадами температури в Канаді та північних регіонах США, в підрозділі 5.3 було проаналізовано вплив термомеханічного фактору на пошкодженість сталевій арматури з епоксидним покриттям та зниження її корозійної стійкості. В ньому показано, що суттєва перебудова механізму термодетормування цементобетону, підсиленого сталевією арматурією з епоксидним покриттям вноситься термомеханічною несумісністю фракцій

композиту, в якому коефіцієнт лінійного термічного розширення епоксидної смоли в п'ять разів перевершує значення цих коефіцієнтів інших фракцій. У зв'язку з цим навіть при помірних варіаціях температури надмірні зміни об'єму епоксидного шару призводять до локальних пошкоджень в цементобетоні, а потім і в епоксидному покритті. Після цього волога вільніше проникає до сталевій арматури, викликаючи її більш інтенсивну корозію. З цієї причини пошуки рішень, що усувають питання корозії сталевій арматури продовжувались.

Відповідно до статистики, США щорічно витрачають біля \$100 мільярдів на ремонти та оновлення мостових конструкцій через ушкодження, що викликані кліматичними факторами в зимовий час. Американські інженери, які зустрілися з проблемою корозійного руйнування мостів та їх швидкого «старіння», досягли значного прогресу в мостобудуванні в 1970-ті роки заміною сталевій стрижневої арматури фібергласовими дротами.

В 1969 р. в Німеччині вперше був побудований міст, підсилений склом та бетоном. Це були перші приклади використання такої арматури в мостах. На даний час лідируючі позиції на ринках фібергласової каркасної арматури та її використання в мостах займає Канада.

Як показує накопичений досвід, фібергласова арматура є ефективним засобом для розв'язання проблеми попередження корозії в умовах різких кліматичних змін, значних температурних змінах та інтенсивних випадань опадів. Вона володіє також високою міцністю під впливом транспортних навантажень.

При цьому сама арматура також є композитом [276]. Вона складається з високоміцних скляних волокон малого діаметру в матриці з полімерної смоли (епoxy, vinylester, polyester) та отримала назву GFRP (glass fibre

reinforced polymer). Її недоліком можна вважати відсутність у неї точки течії та в граничному випадку вона руйнується «без попередження». Паралельно із з фібергласовою арматурою стали виготовляти [226] арматури з волокнами з:

карбону – CFRP – (carbon fibre reinforced polymer),

базальту – BFRP – (basalt fibre reinforced polymer),

араміду – AFRP – (aramid fibre reinforced polymer).

Важливо відмітити, що термомеханічні властивості цих матеріалів можуть змінюватись в широких межах, оскільки вони залежать від діаметру арматурного стрижня та відсоткового вмісту в ньому підсилюючого волокна, яке може складати від 50% до 80% об'єму композитної суміші. При цьому термомеханічні властивості армуючого стрижня в повздовжньому та поперечному напрямках можуть відрізнятися. В табл. 4.4 наведені межі зміни значень модуля пружності E , коефіцієнта Пуассона ν та коефіцієнту лінійного термічного розширення (КЛТР) α , знайдені в науковій літературі для різних конструкційних рішень армуючих стрижнів на основі полімерів.

Таблиця 4.4 – Значення термомеханічних параметрів армуючих стрижнів

Вид арматури	E , ГПа	ν	$10^{-5} \alpha_{\text{попер}}, 1/^{\circ}\text{C}$	$10^{-5} \alpha_{\text{повзз}}, 1/^{\circ}\text{C}$
Фіберглас (GFRP)	48 56,52 62	0,33	2,51 2,25	0,5 0,443
Фіберкарбон (CFRP)	220 210 500	0,2	2,53 9,3	0,0113 0,105 – 0,02
Фібербазальт (BFRP)	40 43	0,25	5,1 5,02 5,56	0,518 0,9
Фіберарамід (AFRP)	72	0,3 0,26	1,71	0,192

Можна відмітити велику різницю в значеннях КЛТР в поперечному

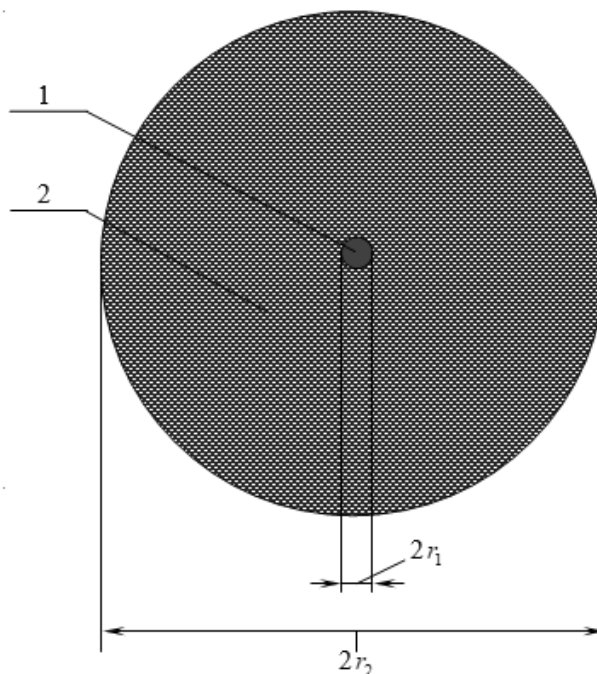
($\alpha_{\text{попер}}$) та повздовжньому ($\alpha_{\text{повздо}}$) напрямках для всіх видів арматури.

Наведемо також значення параметрів термопружності для цементобетону $E = 25 \div 50$ ГПа, $\nu = 0,1 \div 0,2$, $\alpha = 1 \cdot 10^{-5} 1/^{\circ}\text{C}$, та для асфальтобетону $E = 2,4$ ГПа, $\nu = 0,3$, $\alpha = 2 \cdot 10^{-5} 1/^{\circ}\text{C}$.

4.3.2 Розв'язувальні співвідношення для внутрішньоструктурних термонапружень на інтерфейсній поверхні

Наведемо основні співвідношення, що визначають внутрішньоструктурний напружено-деформований стан композиту, армованого стрижнями, в умовах зміни температури системи.

Нехай армуючий стрижень 1 колового перерізу радіусу r_1 знаходиться в середовищі 2 пружного матеріалу (рис. 4.8).



Рисуно 4.8 - Схема армуючого стрижня 1 в середовищі 2 пружного матеріалу

Враховуючи локалізований характер розподілення

внутрішньоструктурних термонапружень в околі поверхні $r = r_1$, для аналізу виділимо циліндричну область $r \leq r_2$, де $r_2 \rightarrow \infty$. Розрахунки виконані в циліндричній системі координат $Or\varphi z$, вісь Oz якої співпадає з осьюовою лінією стрижня.

В роботах [78, 153] на базі методів термопружності [12, 32, 169] поставлена задача про термопружне деформування композитного матеріалу, підсиленого стрижневою арматурою, вкритої додатковим ізолюючим шаром. В окремому випадку, за відсутності ізолюючого покриття, вираз для радіальних переміщень в стрижні 1 ($u_r^{(1)}(r)$) та середовищі 2 при зміні температури на величину T має вигляд:

$$u^{(1)} = \frac{r(1+\nu_1)(1+\nu_2)}{\left[(1+\nu_2)E_1 + (1+\nu_1)(1-2\nu_1)E_2\alpha_2\right]} \left[E_1\alpha_1 + (1-2\nu_1)E_2\alpha_2\right]T; \quad (0 \leq r \leq r_1); \quad (4.48)$$

$$u^{(2)}(r) = r(1+\nu_2) + \frac{r_1^2}{r} \frac{(1+\nu_2)E_1 \left[(1+\nu_1)\alpha_1 - (1+\nu_2)\alpha_2\right]T}{\left[(1+\nu_2)E_1 + (1+\nu_1)(1-2\nu_1)E_2\alpha_2\right]}; \quad (r_1 \leq r).$$

Наведемо також формули для внутрішньоструктурних радіальних ($\sigma_r^{(1)}(r)$) та колових ($\sigma_\varphi^{(1)}(r)$) термонапружень в тілі 1 та відповідних термонапружень ($\sigma_r^{(2)}(r)$, $\sigma_\varphi^{(2)}(r)$) в середовищі 2

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{(1)}(r) &= \sigma_\varphi^{(1)}(r) = -E_1 E_2 T \frac{(1+\nu_1)\alpha_1 - (1+\nu_2)\alpha_2}{(1+\nu_2)E_1 + (1+\nu_1)(1-2\nu_1)E_2}; \quad (0 \leq r \leq r_1); \\
\sigma_r^{(2)}(r) &= -\frac{r_1^2}{r^2} E_1 E_2 T \frac{(1+\nu_1)\alpha_1 - (1+\nu_2)\alpha_2}{(1+\nu_2)E_1 + (1+\nu_1)(1-2\nu_1)E_2}; \quad (r_1 \leq r); \\
\sigma_\varphi^{(2)}(r) &= \frac{r_1^2}{r^2} E_1 E_2 T \frac{(1+\nu_1)\alpha_1 - (1+\nu_2)\alpha_2}{(1+\nu_2)E_1 + (1+\nu_1)(1-2\nu_1)E_2}; \quad (r_1 \leq r).
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Обчислення показали, що для таких систем термонапруження $\sigma_r^{(1)}(r)$ та $\sigma_\varphi^{(1)}(r)$ дорівнюють один одному та залишаються постійними всередині стрижня 1, в той час як $\sigma_r^{(2)}(r)$ і $\sigma_\varphi^{(2)}(r)$ мають різні знаки та рівні за модулем.

Наведемо графіки зміни цих функцій на рис. 4.9.

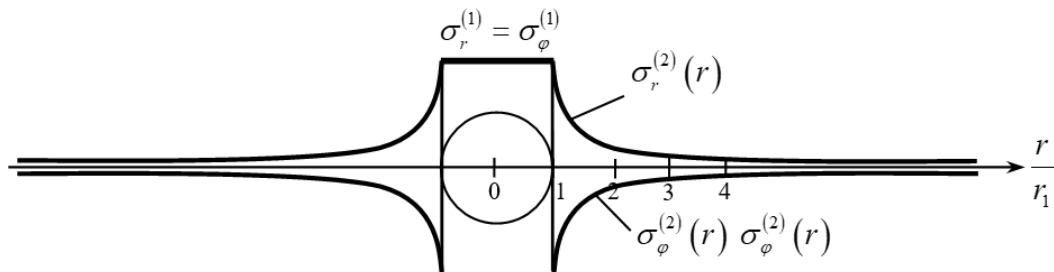


Рисунок 4.9 - Графіки зміни функцій $\sigma_r^{(1)}(r)$, $\sigma_\varphi^{(1)}(r)$, $\sigma_r^{(2)}(r)$, $\sigma_\varphi^{(2)}(r)$

З рівнянь (4.49) та рис. 4.9 випливає, що напруження $\sigma_r^{(2)}(r)$ і $\sigma_\varphi^{(2)}(r)$ мають максимальні значення на контактній поверхні $r = r_1$ і потім спадають пропорційно величині r^{-2} . Ця особливість відповідає принципу Сен-Венана, який реалізується в даному випадку, завдяки тому, що напруження $\sigma_r^{(2)}(r)$ на поверхні $r = r_1$ являють собою зрівноважену систему сил.

Крім того всі внутрішньоструктурні напруження $\sigma_r^{(1)}(r)$, $\sigma_\varphi^{(1)}(r)$,

$\sigma_r^{(2)}(r)$, $\sigma_\varphi^{(2)}(r)$ в системі дорівнюють нулю, якщо виконується рівність

$$(1 + \nu_1)\alpha_1 - (1 + \nu_2)\alpha_2 = 0. \quad (4.50)$$

Вона представляє умову термомеханічної сумісності матеріалів арматури та матриці. Якщо ця умова не виконується, в системі при зміні її температури на величину T виникають термонапруження, тим більше, чим більша різниця (4.50). Оскільки ця різниця в першу чергу залежить від різниці значень α_1 і α_2 , то при створенні композиту з армуючими стрижнями необхідно прагнути, щоб їхній КЛТР (в даному випадку $\alpha_{2,nonep}$ і $\alpha_{1,nonep}$) мали близькі значення. Порівнюючи ці значення в табл. 4.4 зі значеннями $\alpha_1 = 1 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ для цементобетону та $\alpha_2 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ для асфальтобетону, можна відмітити їх близькість та розбіжність в різних випадках. Тому з точки зору мінімізації термонапружень, які викликані термомеханічною несумісністю фракцій композиту для кожного середовища доцільно підбирати підходящий для неї матеріал арматури. Нижче наведені значення термонапружень в системі для різних комбінацій матеріалів фракцій системи.

4.3.3 Внутрішньоструктурні термонапруження в армованому асфальтобетонному середовищі

Наведемо результати обчислень за формулами (4.49) внутрішньоструктурних термонапружень в армованому асфальтобетонному середовищі при зміні температури системи на -20°C . З табл. 4.4 для параметрів арматури вибрані наступні значення:

Фіберглас: $E_1 = 56 \text{ ГПа}$, $\nu_1 = 0,33$, $\alpha_1 = \alpha_{nonep} = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$;

Фіберкарбон: $E_1 = 220 \text{ ГПа}$, $\nu_1 = 0,2$, $\alpha_1 = \alpha_{nonep} = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$;

Фібербазальт: $E_1 = 43$ ГПа, $\nu_1 = 0,25$, $\alpha_1 = \alpha_{nonep} = 5,1 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$;

Фіберарамід: $E_1 = 72$ ГПа, $\nu_1 = 0,3$, $\alpha_1 = \alpha_{nonep} = 1,71 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$.

Для асфальтобетону значення цих параметрів склали: $E_2 = 2,4$ ГПа, $\nu_2 = 0,3$, $\alpha_2 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$.

Термонапруження для цих комбінацій матеріалів наведені в табл. 4.5.

Таблиця 4.5 – Значення термонапружень на поверхні $r = r_1$ асфальтобетонної матриці

Матеріал арматури	$\sigma_r^{(1)}(r_1)$, МПа	$\sigma_\varphi^{(1)}(r_1)$ МПа	$\sigma_r^{(2)}(r_1)$, МПа	$\sigma_\varphi^{(2)}(r_1)$, МПа
Фіберглас	0,26371	0,26371	0,26371	– 0,26371
Фіберкарбон	0,14680	0,14680	0,14680	– 0,14680
Фібербазальт	1,35742	1,35742	1,35742	– 1,35742
Фіберарамід	– 0,13739	– 0,13739	– 0,13739	0,13739

Оцінюючи значення цих напружень, викликаних зміною температури системи на -20°C , можна відмітити, що навіть ці порівняно невеликі величини співставні з граничними напруженнями для асфальтобетонів при низьких значеннях температури, які при стисканні складають $5 \div 20$ МПа, а при розтягуванні вони виявляються в $6 \div 8$ разів менше цих значень.

В найменш сприятливих умовах виявляється система з фібербазальтовою арматурою, що володіє високим значенням КЛТР. Оскільки в цьому випадку $\alpha_1 > \alpha_2$, радіальні напрямки в матриці виявились розтягуючими, а колові – стискаючими. Тому в критичному стані асфальтобетон 2 відривається від стрижня 1 та зв'язок між ними втрачається. Якщо $T > 0$, то радіальні напруження стають стискаючими, а колові –

розтягуючими. При цьому в малому околі інтерфейсної поверхні виникають короткі радіальні тріщини.

4.3.4 Внутрішньоструктурні термонапруження в армованому цементобетонному середовищі

В залежності від марки цементобетону його термомеханічні параметри можуть набувати значення $E = 25 \div 50$ МПа, $\nu = 0,1 \div 0,2$, $\alpha = 1 \cdot 10^{-5}$ $1/^\circ\text{C}$. При цьому в великому діапазоні змінюються також і границі міцності бетонів. Так границі міцності бетонів при стисканні складають 17 – 28 МПа, хоча для деяких високоміцних марок вони можуть доходити до 70 МПа. Зазвичай вважається, що їх границі міцності при розтягуванні складають 10% від границі міцності при стисканні та в технічних розрахунках їх приймають рівними $2 \div 5$ МПа.

Враховуючи наведені обставини, обчислення внутрішньоструктурних термонапружень в цементобетоні, підсиленими розглянутими видами армуючих стрижнів, при зміні температури системи на величину $T = -20^\circ\text{C}$ виконані для двох видів термомеханічних параметрів бетону. В табл. 4.6 наведені результати обчислень для випадку $E_2 = 25$ ГПа, $\nu_2 = 0,1$, $\alpha_2 = 1 \cdot 10^{-5}$ $1/^\circ\text{C}$.

Для випадку $E_2 = 50$ ГПа, $\nu_2 = 0,2$, $\alpha_2 = 1 \cdot 10^{-5}$ $1/^\circ\text{C}$ результати наведені в табл. 4.7.

Так як для обох розглянутих видів цементобетону при $T = -20^\circ\text{C}$ тільки колові термонапруження $\sigma_\varphi^{(1)}(r_1)$ в цементобетоні виявились стискаючими, а всі інші напруження (в тому числі й радіальні напруження $\sigma_\varphi^{(2)}(r_1)$ в

цементобетоні) – розтягуючими і для всіх видів арматури вони помітно перевищують границі міцності цементобетону.

Таблиця 4.6 – Значення внутрішньоструктурних термонапружень в цементобетоні для першого варіанту його термомеханічних властивостей.

Матеріал арматури	$\sigma_r^{(1)}(r_1)$, МПа	$\sigma_\phi^{(1)}(r_1)$, МПа	$\sigma_r^{(2)}(r_1)$, МПа	$\sigma_\phi^{(2)}(r_1)$, МПа
Фіберглас	8,5436	8,5436	8,5436	– 8,5436
Фіберкарбон	8,03846	8,03846	8,03846	– 8,03846
Фібербазальт	18,0234	18,0234	18,0234	– 18,0234
Фіберарамід	4,38482	4,38482	4,38482	– 4,38482

Таблиця 4.7 - Значення внутрішньоструктурних термонапружень в цементобетоні для другого варіанту його термомеханічних властивостей.

Матеріал арматури	$\sigma_r^{(1)}(r_1)$, МПа	$\sigma_\phi^{(1)}(r_1)$, МПа	$\sigma_r^{(2)}(r_1)$, МПа	$\sigma_\phi^{(2)}(r_1)$, МПа
Фіберглас	13,2516	13,2516	13,2516	– 13,2516
Фіберкарбон	13,2021	13,2021	13,2021	– 13,2021
Фібербазальт	26,8582	26,8582	26,8582	– 26,8582
Фіберарамід	6,55362	6,55362	6,55362	– 6,55362

У зв'язку з цим можна зробити висновок, що при розглянутих умовах в малому околі армуючого стрижня завжди будуть виникати локалізовані пошкодження у вигляді колових та радіальних тріщин, що прибирають механічний зв'язок між арматурою та матрицею. Цей зв'язок частково може зберігатись, якщо арматура рифлена та конструктивно скомбінована у вигляді сіток чи решіток.

Відмічені негативні ефекти можна пояснити суттєвим перевищенням

значень термічного розширення всіх видів арматури цієї величини асфальтобетону [132, 133]. Як видно, всі вони мають бути прийнятими до уваги при будівництві цементобетонних споруд в регіонах з великими сезонними перепадами температури.

4.3.5 Особливості утворення термоушкоджень на поверхні стрижневої арматури

Як встановлено виконаними розрахунками, навіть при порівняно помірних значеннях змін температури ($\Delta T = \pm 20^\circ \text{C}$) в асфальтобетонних і цементобетонних матеріалах, що армовані стрижневими арматурами, в залежності від рівнів несумісності термомеханічних параметрів їх компонент значення внутрішньоструктурних термонапружень на інтерфейсній поверхні матриці можуть помітно перевищувати її границю міцності. У зв'язку з цим може виникнути припущення, що на цій поверхні навіть без дії активних механічних навантажень матеріал матриці 2 повністю відірветься від тіла арматури 1, між ними виникне кільцевий зазор 3 (рис. 4.10) і всі термонапруження і в матриці і в арматурі обернуться на нуль.

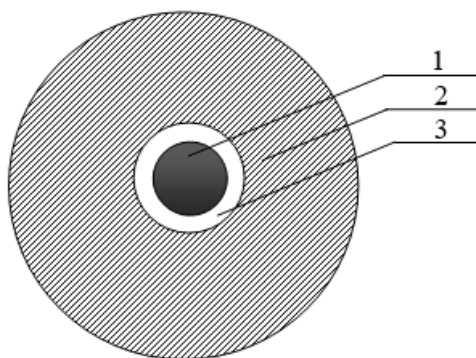


Рисунок 4.10 – Схема утворення кільцевого зазору 3 між матеріалом матриці 2 і тілом арматури 1

При цьому зчеплення між матрицею і арматурою буде повністю втрачено. Однак на практиці цей ефект повною мірою не завжди проявляється. Справа в тому, що виконані розрахунки базуються на припущенні про ідеальну однорідність аналізованої системи і поля температур, а також осьову симетрію явища, що розглядається. Насправді це не так і тому навіть при малих геометричних, структурних і термомеханічних відхиленнях параметрів системи від прийнятих величин фактичні термонапруження в ній не будуть осесиметричними і при збільшенні приросту температури ΔT при деякому її значенні напруження руйнування в матриці будуть досягнутими не на всій інтерфейсній поверхні $r = r_1$, а в першу чергу будуть локалізовані на деякій її ділянці, на якій і відбудеться відрив матриці 2 від арматури 1 з утворенням локального зазору 3 (рис. 4.11). При цьому, на обох берегах зазору радіальні напруження обернуться на нуль, а сам зазор почне грати роль «розвантажувального поперечного шву» в дорожньому покритті, який знімає в ньому повздовжні термонапруження. (Аналогічну роль відіграє розвантажувальний зазор на стикові двох частин залізничної рейки).

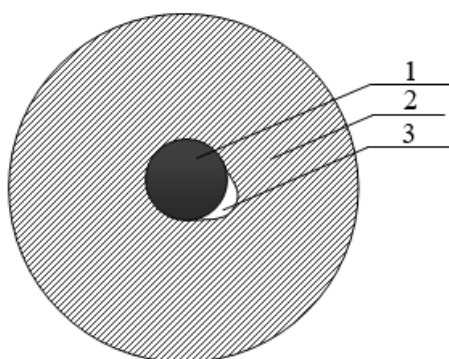


Рисунок 4.11 – Схема утворення локального зазору 3 між матеріалом матриці 2 і тілом арматури 1

В результаті цього на решті контакту матриці зі стрижнем напруження зменшаться та зчеплення між ними збережеться. Тому локальне граничне напруження на інтерфейсній поверхні викличе лише локальні пошкодження в структурі конструкції з частковим збереженням армуючих властивостей стрижня і для наступного зменшення несучої здатності арматури будуть потрібні подальші збільшення різниці температури та її повторні циклічні зниження-підвищення. Крім того, армуючі властивості стрижнів при пошкодженні їх адгезії з матрицею можуть зберігатись за рахунок їх поперечного оребріння та утворення з них решітчастих структур. Тому зазначені локальні термоушкодження на перших етапах їх утворення можуть залишатися непоміченими.

4.4 Внутрішньоструктурні термонапруження в композитах зі стрижневою (волокнуистою) арматурою при різних значеннях температур їх фаз

4.4.1 Особливості зародження термонапружень в неоднорідних композитах

Відмінною особливістю явищ зародження термонапружень в пружних тілах та спорудах зазвичай зумовлена не тим, що при змінах їх температури вони деформуються, а тим, що їх термодформування обмежені і не являються вільними. Так, якщо тіло однорідне і на його переміщення не накладені зовнішні в'язі, то при постійній або лінійно змінній вздовж просторових змінних температури термонапруження в ньому дорівнюють нулю [78, 169]. У зв'язку з цим можна виділити три механізми генерування термонапружень в тілах: зовнішній, внутрішній і градієнтний. Зовнішній

механізм має місце [132, 133], коли на переміщення тіла накладені зовнішні обмеження. Внутрішній механізм зустрічається в системах з неоднорідними термомеханічними властивостями, наприклад, в композитах, а також дорожніх і мостових покриттях [78]. Градієнтний механізм реалізується при швидких змінах полів температури у часі та просторі, що іноді називається тепловими ударами [253].

На практиці, як правило, найбільш наочними є наслідки прояву зовнішнього механізму, оскільки при його реалізації в системі виникають яскраво виражені пошкодження. Тому на практиці таким ефектам приділяється підвищена увага й для їх математичного моделювання були розроблені спеціальні скінченноелементні програми, що дозволяють прогнозувати їх з достатньою точністю.

При цьому, звичайно, не залишилась без уваги очевидна особливість зовнішнього механізму, пов'язана з тим, що виникаючі при його прояві термонапруження в першу чергу залежать від коефіцієнта лінійного термічного розширення (КЛТР) матеріалу та зростають з його збільшенням [284]. Тому при розробці нових композитних матеріалів вважалось, що якщо в матрицю композиту додати включення з дуже низьким значенням КЛТР, то зведений (ефективний) КЛТР всього композиту знизиться й термонапруження в ньому зменшаться. В результаті розроблені навіть композити з нульовим ефективним КЛТР, фази якого мають додатні та від'ємні значення цих коефіцієнтів [116, 118, 175, 248, 267]. Проектувальники таких матеріалів, звичайно, знають про прояв додаткових внутрішньоструктурних термонапружень в композиті, що викликані несумісності термомеханічних властивостей його фаз, але, мабуть, інтуїтивно вважали їх несуттєвими і не приділяли їм достатньої уваги. У всякому разі в науковій літературі ці питання не обговорюються, хоча композити з малими ефективними КЛТР

продовжують розроблятися [116, 118].

В той же час, як показують результати теоретичних моделювань [78, 153, 154], відмічений спосіб нейтралізації дії зовнішнього механізму в композиті за рахунок мінімізації значення його ефективного КЛТР може супроводжуватися активацією внутрішнього механізму, пов'язаного з необхідністю погодження несумісних внутрішньоструктурних термодформацій фракцій композита. При цьому виявляється, що термонапруження, які викликані зовнішнім механізмом, не зникають. Просто їх заганняють в середину та приховано перерозподіляють на інтерфейсних поверхнях між фракціями композиту. Найчастіше ці внутрішньоструктурні термонапруження призводять не тільки до локальних мікропошкоджень та порушення адгезії між фазами, але в подальшому вони переходять в глобальні тріщини та деструкції.

Тут необхідно відмітити принципову відмінність дії силових та термічних навантажень. Справа в тому, що, якщо під дією силових («мертвих») навантажень в механічній системі виникають тріщини, то рівні напружень в цій зоні продовжують залишатися високими або навіть зростають, однак, якщо в системі виникають термотріщини, то термонапруження, що їх викликають, різко падають. Ця обставина, може бути причиною того, що внутрішньоструктурні термотріщини часто залишаються непоміченими, а внутрішній механізм генерування термонапружень виявляється недооціненим. Приймаючи до уваги, що ці напруження важко піддаються експериментальному моделюванню, можна відмітити зростаючу роль їх теоретичного аналізу.

Розглянуті в роботах [78, 153, 154] приклади визначення внутрішньоструктурних термонапружень в композитах з несумісними термомеханічними параметрами відносяться до випадків, коли температура в

системі постійно однакова в усіх точках всіх фракцій. Проте, на практиці, вельми розповсюдженими є випадки, коли внаслідок зміни в часі температури навколишнього середовища температура матриці композиту змінюється, температура арматури не встигає вирівнятися з нею й температура системи в її різних точках виявляється різною. В загальному випадку задача визначення термонапружень в такій системі виявляється доволі складною, оскільки при цьому можуть включатися в дію всі три механізми генерування термонапружень (Зовнішній, Внутрішній та Градієнтний), поля термонапружень набувають складну структуру й вони можуть бути визначені тільки методом скінченних елементів.

Більш простою виявляється ситуація, коли температури кожної з фракцій є постійними, але відмінними один від одного. Для цього випадку, коли температурні градієнти в межах кожної фази дорівнюють нулю, може бути отриманий аналітичний розв'язок задачі про визначення внутрішньоструктурних термонапружень на базі методів термопружності.

4.4.2 Виведення рівнянь термодформування та побудова їх розв'язків

Для виведення рівнянь термодформування пружного стрижня в матриці, скористаємось циліндричною системою координат $O r \varphi z$, вісь Oz якої співпадає з віссю стрижня. Нехай властивості стрижня 1 та середовища 2 визначаються, відповідно, параметрами Ламе λ_1, μ_1 і λ_2, μ_2 та коефіцієнтами лінійного термічного розширення α_1 і α_2 . Температура тіла 1 змінилась на величину ΔT_1 , температура середовища 2 – на величину ΔT_2 . Радіус стрижня 1 дорівнює r_1 . Розглянемо випадок, коли система знаходиться в плоскому

деформованому стані і відносні деформації $\varepsilon_z^{(i)}(r, \varphi, z) = 0$ ($i = 1, 2$).

Рівняння термопружної рівноваги елементів кожної фракції мають вид [51, 218, 219, 277]:

$$\frac{d\sigma_r^{(i)}}{dr} + \frac{\sigma_r^{(i)} - \sigma_\varphi^{(i)}}{r} = 0; \quad (i = 1, 2). \quad (4.51)$$

Термонапруження, що сюди входять, визначаються через відносні деформації $\varepsilon_r^{(i)}$, $\varepsilon_\varphi^{(i)}$, $\varepsilon_z^{(i)}$ та прирости температур ΔT_i ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(i)}(r) &= (\lambda_i + 2\mu_i)\varepsilon_r^{(i)} + \lambda_i(\varepsilon_\varphi^{(i)} + \varepsilon_z^{(i)}) - (3\lambda_i + 2\mu_i)\alpha_i\Delta T; \\ \sigma_\varphi^{(i)}(r) &= (\lambda_i + 2\mu_i)\varepsilon_\varphi^{(i)} + \lambda_i(\varepsilon_r^{(i)} + \varepsilon_z^{(i)}) - (3\lambda_i + 2\mu_i)\alpha_i\Delta T; \\ \sigma_z^{(i)}(r) &= (\lambda_i + 2\mu_i)\varepsilon_z^{(i)} + \lambda_i(\varepsilon_r^{(i)} + \varepsilon_\varphi^{(i)}) - (3\lambda_i + 2\mu_i)\alpha_i\Delta T; \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Покладемо, що $\varepsilon_z^{(i)}(r, \varphi, z) = 0$. Тоді рівності (4.52) зведуться до вигляду:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(i)}(r) &= (\lambda_i + 2\mu_i)\varepsilon_r^{(i)} + \lambda_i\varepsilon_\varphi^{(i)} - (3\lambda_i + 2\mu_i)\alpha_i\Delta T; \\ \sigma_\varphi^{(i)}(r) &= (\lambda_i + 2\mu_i)\varepsilon_\varphi^{(i)} + \lambda_i\varepsilon_r^{(i)} - (3\lambda_i + 2\mu_i)\alpha_i\Delta T; \\ \sigma_z^{(i)}(r) &= \lambda_i(\varepsilon_r^{(i)} + \varepsilon_\varphi^{(i)}) - (3\lambda_i + 2\mu_i)\alpha_i\Delta T; \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (4.53)$$

Виразимо деформації через радіальні переміщення

$$\varepsilon_r^{(i)}(r) = \frac{du^{(i)}}{dr}; \quad \varepsilon_\varphi^{(i)}(r) = \frac{u^{(i)}}{r}; \quad (i = 1, 2). \quad (4.54)$$

За допомогою рівностей (4.53), (4.54) рівняння (1) зводимо до форми:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru^{(i)}) \right] = 0, \quad (i=1,2). \quad (4.55)$$

Система (4.55) має загальний розв'язок

$$\begin{aligned} u^{(1)}(r) &= rC_1 + \frac{1}{r}C_2; \quad (0 \leq r \leq r_1); \\ u^{(2)}(r) &= rC_3 + \frac{1}{r}C_4; \quad (r \geq r_1) / \end{aligned} \quad (4.56)$$

Константи C_k ($k=\overline{1,4}$), що сюди входять, визначаються з початкової умови

$$u^{(0)}(0) = 0, \quad (4.57)$$

умов контакту на інтерфейсній поверхні $r = r_1$

$$u^{(1)}(r_1) = u^{(2)}(r_1); \quad \sigma_r^{(1)}(r_1) = \sigma_r^{(2)}(r_1), \quad (4.58)$$

та умови рівності нулю напруження $\sigma_r^{(2)}$

$$\sigma_r^{(2)}(r) \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (4.59)$$

В наслідок умови (4.57) маємо

$$C_2 = 0. \quad (4.60)$$

За допомогою рівнянь (4.56) виведемо співвідношення

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(1)}(r) &= C_1; & \varepsilon_\varphi^{(1)}(r) &= C_3 + \frac{1}{r^2} C_4; \\ \varepsilon_r^{(2)}(r) &= C_3 - \frac{1}{r^2} C_4; & \varepsilon_\varphi^{(2)}(r) &= C_3 + \frac{1}{r^2} C_4; \\ \sigma_r^{(1)}(r) &= 2(\lambda_1 + \mu_1)C_1 - (3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_1\Delta T_1; \\ \sigma_r^{(2)}(r) &= 2(\lambda_2 + \mu_2)C_3 - \frac{2\mu_2}{r^2}C_4 - (3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2\Delta T_2. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Умова (4.59) і рівняння (4.61) дозволяють визначити

$$C_3 = \frac{3\lambda_2 + 2\mu_2}{2(\lambda_2 + \mu_2)}\alpha_2\Delta T_2. \quad (4.62)$$

Для обчислення констант C_1 і C_4 використовуються рівняння (4.58) і перетворення за допомогою співвідношень (4.60) – (4.62)

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{3\lambda_2 + 2\mu_2}{2(\lambda_2 + \mu_2)_2}\alpha_2\Delta T_2 + \frac{1}{r_1^2}C_4; \\ 2(\lambda_1 + \mu_1)C_1 - (3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_1\Delta T_1 &= -\frac{2\mu_2}{r_1^2}C_4. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Розв'язок цієї системи дає

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{(3\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)\alpha_1\Delta T_1 + (3\lambda_2 + 2\mu_2)\mu_2\alpha_2\Delta T_2}{2(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)(\lambda_2 + \mu_2)}; \\
C_4 &= \frac{r_1^2 \left[(3\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)\alpha_1 T_1 - (3\lambda_2 + 2\mu_2)(\lambda_1 + \mu_1)\alpha_2\Delta T_2 \right]}{2(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)(\lambda_2 + \mu_2)}.
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Маючи константи C_k ($k=\overline{1,4}$), за допомогою рівностей (4.56) знаходимо функції радіальних переміщень

$$\begin{aligned}
u^{(1)}(r) &= \frac{r \left[(3\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)\alpha_1\Delta T_1 + (3\lambda_2 + 2\mu_2)\mu_2\alpha_2\Delta T_2 \right]}{2(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)(\lambda_2 + \mu_2)}, \\
&\quad (0 \leq r \leq r_1); \\
u^{(2)}(r) &= r \frac{(3\lambda_2 + 2\mu_2)}{2(\lambda_2 + \mu_2)} \alpha_2 \Delta T_2 + \\
&\quad + \frac{r_1^2}{r} \frac{\left[(3\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)\alpha_1\Delta T_1 - (3\lambda_2 + 2\mu_2)(\lambda_1 + \mu_1)\alpha_2\Delta T_2 \right]}{2(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)(\lambda_2 + \mu_2)}, \\
&\quad (r \geq r_1).
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Рівняння (4.61) дозволяють знайти термонапруження в стрижні

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{(1)}(r) = \sigma_\varphi^{(1)}(r) &= -\frac{\mu_2 \left[(3\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)\alpha_1\Delta T_1 - (3\lambda_2 + 2\mu_2)(\lambda_1 + \mu_1)\alpha_2\Delta T_2 \right]}{(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)(\lambda_2 + \mu_2)}, \\
\sigma_z^{(1)}(r) &= \frac{\left[-(3\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2)\alpha_1\Delta T_1 + (3\lambda_2 + 2\mu_2)\lambda_1\mu_2\alpha_2\Delta T_2 \right]}{(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)(\lambda_2 + \mu_2)}, \\
&\quad (0 \leq r \leq r_1).
\end{aligned} \tag{4.66}$$

і в середовищі 2

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{(2)}(r) &= -\frac{r_1^2}{r^2} \frac{\mu_2 \left[(3\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)\alpha_1\Delta T_1 - (3\lambda_2 + 2\mu_2)(\lambda_1 + \mu_1)\alpha_2\Delta T_2 \right]}{(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)(\lambda_2 + \mu_2)}, \\
\sigma_\varphi^{(2)}(r) &= \frac{r_1^2}{r^2} \frac{\mu_2 \left[(3\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)\alpha_1\Delta T_1 - (3\lambda_2 + 2\mu_2)(\lambda_1 + \mu_1)\alpha_2\Delta T_2 \right]}{(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)(\lambda_2 + \mu_2)}; \quad (4.67) \\
\sigma_z^{(2)}(r) &= -\frac{\mu_2(3\lambda_2 + 2\mu_2)}{(\lambda_2 + \mu_2)} \alpha_2\Delta T_2; \quad (r \geq r_1).
\end{aligned}$$

Як і у випадку, коли прирости температури ΔT у фракціях 1 і 2 однакові, тут напруження (4.66) в тілі 1 однакові у всіх його точках, причому $\sigma_r^{(1)} = \sigma_\varphi^{(1)}$. Формули (4.66), (4.67) свідчать про те, що радіальні термонапруження $\sigma_r(r)$ неперервні у всій області, що виділена для обчислень, колові термонапруження $\sigma_\varphi(r)$ терплять розрив неперервності і змінюють знак на контактній поверхні $r = r_1$. При цьому термонапруження в середовищі 2 максимальні на інтерфейсній поверхні $r = r_1$, $\sigma_r^{(2)}(r_1) = -\sigma_\varphi^{(2)}(r_1)$ і вони спадають пропорційно величині r^{-2} .

Відмітимо, що вказані властивості відображають прояви в даному випадку принципу Сен Венана для плоскої задачі теорії пружності, у відповідності до якого зрівноважена система сил (система з нульовим головним вектором і головним моментом) впливає на напружений стан пружного середовища в малому околі цих сил і цей вплив швидко спадає пропорційно величині r^{-2} при віддалені від місця локалізації навантаження. Ця обставина дозволяє в обчисленнях не враховувати вплив сусідніх армуючих елементів на виділений для обчислення елемент і досліджувати ізолювано його термонапружений стан.

4.4.3 Числові приклади

Нехай сталевий армуючий стрижень радіусу $r_1 = 0,004$ м з термомеханічними параметрами $\lambda_1 = 115$ ГПа, $\mu_1 = 76,5$ ГПа, ($E_1 = 210$ ГПа, $\nu_1 = 0,3$), $\alpha_1 = 1 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ знаходиться в асфальтобетонному середовищі з параметрами $\lambda_2 = 1,38$ ГПа, $\mu_2 = 0,923$ ГПа, ($E_2 = 2,4$ ГПа, $\nu_2 = 0,3$), $\alpha_2 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$. Прирости температур обох фракцій однакові $\Delta T_1 = \Delta T_2 = -20^\circ \text{C}$. Для цього випадку напруження на інтерфейсній поверхні $r = r_1$ цих фракцій при довільних значеннях r_1 склали $\sigma_r^{(1)}(r_1) = \sigma_\varphi^{(1)}(r_1) = \sigma_r^{(2)}(r_1) = -0,851$ МПа, $\sigma_\varphi^{(2)}(r_1) = 0,851$ МПа. Як видно, ці величини далекі від граничних напружень для обох фракцій, однак, необхідно врахувати, що вони обчислені при порівняно невеликих значеннях приростів $\Delta T_1, \Delta T_2$ і, тим не менш, можуть відігравати роль помітних добавок до напружень, що викликані транспортними навантаженнями.

Змінені значення термонапружень при почергових варіюваннях температур фракцій на $\pm 3^\circ \text{C}$ наведені в інших стовпчиках табл. 4.8. Їхні прирости більш помітні при варіюванні температури матриці і в цих випадках вони можуть перевищувати 20% від їх вихідних значень.

Таблиця 4.8 – Значення внутрішньоструктурних термонапружень у фракціях композиту при різних значеннях їх температур

$\Delta T_1, ^\circ\text{C}$	-20	-20	-20	-23	-17
$\Delta T_2, ^\circ\text{C}$	-20	-23	-17	-20	-20
$\sigma_r^{(1)}(r_1)$ МПа	-0,851	-1,05	-0,652	-0,779	-0,923
$\sigma_\varphi^{(1)}(r_1)$ МПа	-0,851	-1,05	-0,652	-0,779	-0,923
$\sigma_r^{(2)}(r_1)$ МПа	-0,851	-1,05	-0,652	-0,779	-0,923
$\sigma_\varphi^{(2)}(r_2)$ МПа	0,851	1,05	0,652	0,779	0,923

4.5 Математичне моделювання внутрішньоструктурних термонапружень, що викликаються полями змінної температури в композитах зі стрижневою арматурою

4.5.1 Теоретичні передумови виникнення полів термонапружень в композитах зі стрижневою арматурою

Задача про розподілення термонапружень в циліндричних пружних тілах при температурах, які змінюються в радіальному напрямі, описується звичайними диференціальними рівняннями, розв'язок яких, побудовано в монографії [12]. Ця задача отримує ускладнення, якщо пружне циліндричне тіло (стрижень) знаходиться у пружному середовищі (матриці) та за умови несумісності термомеханічних параметрів фракцій системи (композитного матеріалу) вона зазнає дії температурного поля. Така задача описується триточковою системою звичайних диференціальних рівнянь з додатковими крайовими рівняннями та умовою сполучення функцій на контактній поверхні. Її розв'язок застосовний до частинних аспектів термоміцності композитів зі стрижневою (волокнистою) арматурою побудований в замкненій формі в роботах [12, 123, 153]. Деякі загальні питання утворення полів термонапружень в композитах обговорюються в статтях [123, 132]. В них виділені внутрішній та зовнішній механізми виникнення термонапружень в однорідних та неоднорідних пружних тілах. В роботах [12, 123, 248] акцентовано, що внутрішній механізм більшою мірою проявляється в композитних матеріалах з несумісними термомеханічними характеристиками їх фаз, причому поля виникнення термонапружень локалізуються в околах армуючих включень.

В той же час в наукових публікаціях суттєву увагу приділяють питанням визначення наведених (ефективних) характеристик композитів та комбінуванню фаз з від'ємними та додатними значеннями коефіцієнтів

термічного лінійного розширення з метою доведення їх до нуля [267]. При цьому не береться до уваги можливість прояву внутрішнього механізму генерування суттєвих внутрішньоструктурних термонапружень.

Якщо поля температури у пружному середовищі змінюються за просторовими змінними, то виникає можливість прояву ще одного, градієнтного, механізму генерування термонапружень [12, 253]. В композитних матеріалах він реалізується сумісно з внутрішнім механізмом, тому його теоретичне вивчення пов'язано з деякими труднощами. В даній роботі ці ефекти досліджуються методами математичного аналізу з використанням основних положень теорії термопружності [32, 169, 218, 219, 277]. Побудовані системи диференціальних рівнянь, отримані їх аналітичні розв'язки. Розглянуті прикладні задачі для асфальтобетонних композитних матеріалів.

4.5.2 Постановка задачі

Розглянемо термопружне деформування пружного циліндричного стрижня 1 радіусу r_1 в пружному середовищі 2 радіусу r_2 (рис. 4.12) за умови, що r_2 може прямувати до ∞ .

Нехай варіація $\theta(r)$ температури системи змінюється в радіальному напрямі $\theta(r) = T(r) - T_0$, де $T(r)$ – поточна температура, T_0 – деяке її початкове значення, при якому система не напружена.

В поточному стані відносні деформації тіла 1 та середовища 2 в циліндричній системі координат $O r \varphi z$ складають [9, 18]

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r^{(1)}(r) &= \frac{1}{E_1} \left[\sigma_r^{(1)} - \nu_1 (\sigma_\varphi^{(1)} + \sigma_z^{(1)}) \right] + \alpha_1 \theta(r); \\
\varepsilon_\varphi^{(1)}(r) &= \frac{1}{E_1} \left[\sigma_\varphi^{(1)} - \nu_1 (\sigma_r^{(1)} + \sigma_z^{(1)}) \right] + \alpha_1 \theta(r); \\
\varepsilon_r^{(2)}(r) &= \frac{1}{E_2} \left[\sigma_r^{(2)} - \nu_2 (\sigma_\varphi^{(2)} + \sigma_z^{(2)}) \right] + \alpha_2 \theta(r); \\
\varepsilon_\varphi^{(2)}(r) &= \frac{1}{E_2} \left[\sigma_\varphi^{(2)} - \nu_2 (\sigma_r^{(2)} + \sigma_z^{(2)}) \right] + \alpha_2 \theta(r).
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Приймемо, що $\varepsilon_z^{(1)}(r) = \varepsilon_z^{(2)}(r) = 0$ і

$$\sigma_z^{(1)}(r) = \nu_1 (\sigma_r^{(1)} + \sigma_\varphi^{(1)}) - E_1 \alpha_1 \theta; \quad \sigma_z^{(2)}(r) = \nu_2 (\sigma_r^{(2)} + \sigma_\varphi^{(2)}) - E_2 \alpha_2 \theta. \tag{4.69}$$

З системи рівнянь (4.68), (4.69) випливає

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{(i)} &= \frac{E_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} \left[(1-\nu_i) \varepsilon_r^{(i)} + \nu_i \varepsilon_\varphi^{(i)} - (1+\nu_i) \alpha_i \theta \right]; \\
\sigma_\varphi^{(i)} &= \frac{E_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} \left[(1-\nu_i) \varepsilon_\varphi^{(i)} + \nu_i \varepsilon_r^{(i)} - (1+\nu_i) \alpha_i \theta \right]; \quad (i=1,2).
\end{aligned} \tag{4.70}$$

Напишемо також рівняння рівноваги при осьовій симетрії

$$\frac{d\sigma_r^{(i)}}{dr} + \frac{2\sigma_r^{(i)} - \sigma_\varphi^{(i)}}{r} = 0; \quad (i=1,2), \tag{4.71}$$

та додамо до них рівняння для відносних деформацій

$$\varepsilon_r^{(i)} = \frac{du^{(i)}}{dr}; \quad \varepsilon_\varphi^{(i)} = \frac{u^{(i)}}{r}; \quad (i=1,2). \tag{4.72}$$

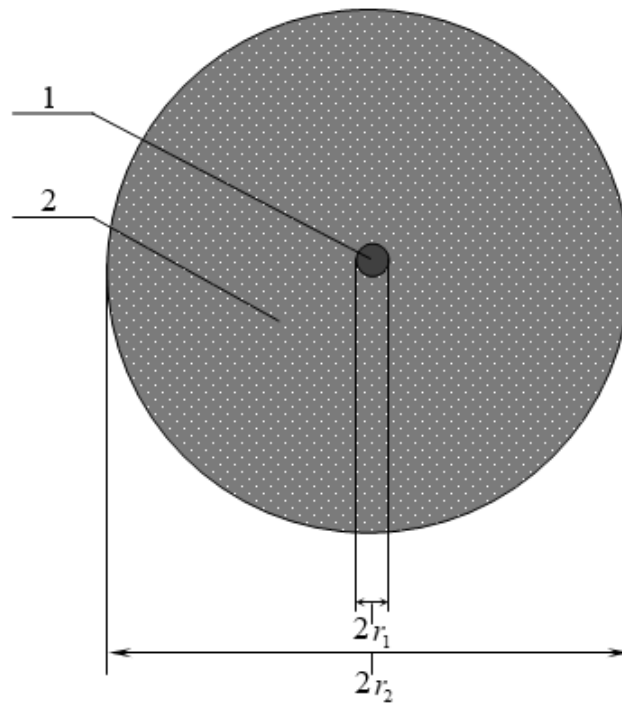


Рисунок 4.12 – Геометрична схема пружного стрижня 1, включеного у пружне середовище 2

Використовуючи наведені співвідношення, можна побудувати систему двох неоднорідних диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d(u^{(i)}r)}{dr} \right] = \frac{1+\nu_i}{1-\nu_i} \alpha_i \frac{d\theta}{dr}; \quad (i=1,2). \quad (4.73)$$

Після її двократного інтегрування отримаємо

$$\begin{aligned} u^{(1)}(r) &= \frac{1+\nu_1}{1-\nu_1} \frac{\alpha_1}{r} \int_0^r \theta \rho d\rho + C_1 r + \frac{C_2}{r}; & (0 \leq r \leq r_1); \\ u^{(2)}(r) &= \frac{1+\nu_2}{1-\nu_2} \frac{\alpha_2}{r} \int_{r_1}^r \theta \rho d\rho + C_3 r + \frac{C_4}{r}; & (r_1 \leq r \leq r_2), \end{aligned} \quad (4.74)$$

де C_i ($i = \overline{1,4}$) – константи інтегрування, які знаходяться з крайових умов

$$u^{(1)}(0) = 0, \quad (4.75)$$

$$u^{(1)}(r_1) = u^{(2)}(r_1), \quad (4.76)$$

$$\sigma_r^{(1)}(r_1) = \sigma_r^{(2)}(r_1), \quad (4.77)$$

$$\sigma_r^{(2)}(r) \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (4.78)$$

З рівнянь (4.74), (4.75) випливає, що для триточної крайової задачі, що розглядається

$$C_2 = 0. \quad (4.79)$$

Щоб скористатися умовами (4.76) – (4.78), перепишемо рівняння (4.72) у вигляді

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(1)}(r) &= -\frac{1+\nu_1}{1-\nu_1} \frac{\alpha_1}{r^2} \int_0^r \theta \rho d\rho + C_1 + \frac{1+\nu_1}{1-\nu_1} \alpha_1 \theta; \\ \varepsilon_\varphi^{(1)}(r) &= \frac{1+\nu_1}{1-\nu_1} \frac{\alpha_1}{r^2} \int_0^r \theta \rho d\rho + C_1; \quad (0 \leq r \leq r_1); \\ \varepsilon_r^{(2)}(r) &= -\frac{1+\nu_2}{1-\nu_2} \frac{\alpha_2}{r^2} \int_{r_1}^r \theta \rho d\rho + C_3 - \frac{1}{r^2} C_4 + \frac{1+\nu_2}{1-\nu_2} \alpha_2 \theta; \\ \varepsilon_\varphi^{(2)}(r) &= \frac{1+\nu_2}{1-\nu_2} \frac{\alpha_2}{r^2} \int_{r_1}^r \theta \rho d\rho + C_3 + \frac{C_4}{r^2}; \quad (r_1 \leq r \leq r_2). \end{aligned} \quad (4.80)$$

За їх допомогою представимо вирази для термонапружень

$$\begin{aligned}
 \sigma_r^{(1)}(r) &= -\frac{E_1}{1-\nu_1} \frac{\alpha_1}{r^2} \int_0^r \theta \rho d\rho + \frac{E_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} C_1; \\
 \sigma_\phi^{(1)}(r) &= \frac{E_1}{1-\nu_1} \frac{\alpha_1}{r^2} \int_0^r \theta \rho d\rho + \frac{E_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} C_1 - \frac{E_1 \alpha_1 \theta}{(1-\nu_1)}; \\
 \sigma_r^{(2)}(r) &= -\frac{E_2}{1-\nu_2} \frac{\alpha_2}{r^2} \int_{r_1}^r \theta \rho d\rho + \frac{E_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} C_3 + \frac{E_2}{(1+\nu_2)} \frac{1}{r^2} C_4; \\
 \sigma_\phi^{(2)}(r) &= \frac{E_2}{1-\nu_2} \frac{\alpha_2}{r^2} \int_{r_1}^r \theta \rho d\rho + \frac{E_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} C_3 + \frac{E_2}{(1+\nu_2)} \frac{1}{r^2} C_4 - \frac{E_2}{(1-\nu_2)} \alpha_2 \theta.
 \end{aligned} \tag{4.81}$$

Використовуючи рівності (4.74), (4.81), представимо умови (4.76) – (4.78) у формі:

$$r_1 C_1 - r_1 C_3 - \frac{1}{r_1} C_4 = -\frac{1+\nu_1}{1-\nu_1} \frac{\alpha_1}{r_1} \int_0^{r_1} \theta \rho d\rho, \tag{4.82}$$

$$\frac{E_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} C_1 - \frac{E_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} C_3 + \frac{E_2}{(1+\nu_2)} \frac{1}{r_1^2} C_4 = \frac{E_1}{1-\nu_1} \frac{\alpha_1}{r_1^2} \int_0^{r_1} \theta \rho d\rho, \tag{4.83}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{E_2}{(1-\nu_2)} \frac{\alpha_2}{r^2} \int_{r_1}^r \theta \rho d\rho C_1 + \frac{E_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)} C_3 - \frac{E_2}{(1+\nu_2)} \frac{1}{r^2} C_4 \rightarrow 0 \\
 \text{при } r \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \tag{4.84}$$

З умови (4.84) випливає

$$C_3 = \frac{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}{(1-\nu_2)} \frac{\alpha_2}{r^2} \int_{r_1}^{+\infty} \theta \rho d\rho \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad (4.85)$$

і системи рівнянь (4.82), (4.83) зводяться до вигляду

$$\begin{aligned} C_1 - \frac{1}{r_1^2} C_4 &= -\frac{1+\nu_1}{1-\nu_1} \frac{\alpha_1}{r_1^2} \int_0^{r_1} \theta \rho d\rho + \frac{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}{(1-\nu_2)} \frac{\alpha_2}{r^2}; \\ \frac{E_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} C_1 + \frac{E_2}{(1+\nu_2)} \frac{1}{r_1^2} C_4 &= \\ &= \frac{E_1}{1-\nu_1} \frac{\alpha_1}{r_1^2} \int_0^{r_1} \theta \rho d\rho + \frac{E_2}{(1-\nu_2)} \frac{\alpha_2}{r^2} \int_{r_1}^{+\infty} \theta \rho d\rho \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Введемо позначення

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1; & a_{12} &= -\frac{1}{r_1^2}; \\ a_{21} &= \frac{E_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}; & a_{22} &= \frac{E_2}{(1+\nu_2)} \frac{1}{r_1^2}; \\ b_1 &= -\frac{(1+\nu_1)}{(1-\nu_1)} \frac{\alpha_1}{r_1^2} \int_0^{r_1} \theta \rho d\rho + \frac{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}{(1-\nu_2)} \frac{\alpha_2}{r^2} \int_{r_1}^{+\infty} \theta \rho d\rho; \\ b_2 &= \frac{E_1}{(1-\nu_1)} \frac{\alpha_1}{r_1^2} \int_0^{r_1} \theta \rho d\rho + \frac{E_2}{(1-\nu_2)} \frac{\alpha_2}{r^2} \int_{r_1}^{+\infty} \theta \rho d\rho. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Використовуючи їх, знаходимо значення констант

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{(b_1 a_{22} - b_2 a_{12})}{(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})}; \\
C_2 &= 0; \\
C_3 &= \frac{(1 + \nu_2)(1 - 2\nu_2)}{(1 - \nu_2)} \frac{\alpha_2}{r^2} \int_{r_1}^r \theta \rho d\rho \quad \text{при } r \rightarrow \infty; \\
C_4 &= \frac{(a_{11} b_2 - a_{21} b_1)}{(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})},
\end{aligned} \tag{4.88}$$

а потім переміщень (4.74) та термонапружень (4.81). При цьому вирази для переміщень (4.74) зводяться до вигляду:

$$\begin{aligned}
u_1(r) &= \frac{1 + \nu_1}{1 - \nu_1} \frac{\alpha_1}{r} \int_0^r \theta \rho d\rho + r \frac{(b_1 a_{22} - b_2 a_{12})}{(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})}; \\
u_2(r) &= \frac{1 + \nu_2}{1 - \nu_2} \frac{\alpha_2}{r} \int_{r_1}^r \theta \rho d\rho + r \frac{(1 + \nu_2)(1 - 2\nu_2)}{(1 - \nu_2)} \frac{\alpha_2}{r^2} \int_{r_1}^r \theta \rho d\rho + \frac{1}{r} \frac{(a_{11} b_2 - a_{21} b_1)}{(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})} \quad (4.89) \\
&\quad \text{при } r \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Запишемо також співвідношення для термонапружень

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{(1)}(r) &= -\frac{E_1}{1 - \nu_1} \frac{\alpha_1}{r^2} \int_0^r \theta \rho d\rho + \frac{E_1 (b_1 a_{22} - b_2 a_{12})}{(1 + \nu_1)(1 - 2\nu_1)(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})}; \\
\sigma_\varphi^{(1)}(r) &= \frac{E_1}{1 - \nu_1} \frac{\alpha_1}{r^2} \int_0^r \theta \rho d\rho + \frac{E_1 (b_1 a_{22} - b_2 a_{12})}{(1 + \nu_1)(1 - 2\nu_1)(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})} - \frac{E_1 \alpha_1 \theta}{(1 - \nu_1)}; \\
\sigma_r^{(2)}(r) &= -\frac{E_2}{1 - \nu_2} \frac{\alpha_2}{r^2} \int_{r_1}^r \theta \rho d\rho + \frac{E_2}{1 - \nu_2} \frac{\alpha_2}{r^2} \int_{r_1}^\infty \theta \rho d\rho + \frac{E_2 (a_{11} b_2 - a_{21} b_1)}{r^2 (1 + \nu_2)(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})}; \\
\sigma_\varphi^{(2)}(r) &= \frac{E_2}{1 - \nu_2} \frac{\alpha_2}{r^2} \int_{r_1}^r \theta \rho d\rho + \frac{E_2}{1 - \nu_2} \frac{\alpha_2}{r^2} \int_{r_1}^\infty \theta \rho d\rho + \frac{E_2 (a_{11} b_2 - a_{21} b_1)}{r^2 (1 + \nu_2)(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})} - \frac{E_2}{(1 - \nu_2)} \alpha_2 \theta.
\end{aligned} \tag{4.90}$$

На відміну від випадку полів постійної температури [6] при

температурі, що змінюється за просторовими змінними напруження $\sigma_r^{(1)}(r)$ та $\sigma_\varphi^{(1)}(r)$ залежать від r , а напруження $\sigma_r^{(2)}(r)$, $\sigma_\varphi^{(2)}(r)$ містять доданок, що спадає пропорційно величині r^{-2} , та доданок, у явній формі, що залежить від θ .

4.5.3 Аналіз числових результатів

В якості прикладу розглянемо випадок, коли сталевий армуючий стрижень 1 додали в асфальтобетонну матрицю 2. Значення термомеханічних параметрів цих фракцій складають: $E_1 = 200$ ГПа, $\lambda_1 = 115$ ГПа, $\mu_1 = 76,5$ ГПа, $\nu_1 = 0,3$, $\alpha_1 = 1 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $r_1 = 0,004$ м, $E_2 = 2,4$ ГПа, $\lambda_2 = 1,38$ ГПа, $\mu_2 = 0,923$ ГПа, $\nu_2 = 0,3$, $\alpha_2 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $r_1 = 0,004$ м.

Нехай приріст температури дорівнює (рис. 4.13)

$$\theta(r) = \theta_0 + ae^{-br}, \quad (4.91)$$

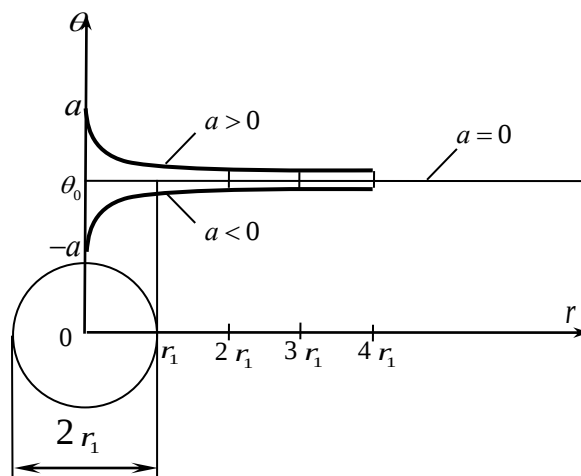


Рисунок 4.13 – Схема розподілення приросту температури $\theta(r)$ у пружній системі

Експоненціальну зміну функції $\theta(r)$ у вигляді (4.91) вибрано у зв'язку з тим, що експонента являє собою один з найбільш зустрічних частинних розв'язків рівняння теплопровідності. На рис. 4.13, побудованому при $b > 0$, максимальне значення $\theta(r)$ має місце на осі включення 1 при $a > 0$ і далі воно спадає за експонентою, наближуючись до горизонталі $\theta(r) = \theta_0$. При $a < 0$ функція $\theta(r)$ має найбільше значення на осі Or .

Відмітимо, що для функції температури вигляду (4.91) її градієнт є змінним вектором, тому в даному випадку до внутрішнього механізму зародження термонапружень додається також Градієнтний механізм.

Для обчислення термонапружень (4.90) необхідно в рівняння (4.87) підставити інтеграли $\int_0^r \theta \rho d\rho$ і $\int_{r_1}^r \theta \rho d\rho$. Перший інтеграл обчислюється за допомогою формули інтегрування частинами:

$$\begin{aligned} \int_0^r \theta(\rho) \rho d\rho &= \int_0^r (\theta_0 + a e^{-b\rho}) \rho d\rho = \frac{\theta_0 r^2}{2} + a \int_0^r e^{-b\rho} \rho d\rho = \\ &= \frac{\theta_0 r^2}{2} - \frac{a}{b} \int_0^r \rho d(e^{-b\rho}) = \frac{\theta_0 r^2}{2} - \frac{a}{b} \rho e^{-b\rho} \Big|_0^r + \frac{a}{b} \int_0^r e^{-b\rho} d\rho = \\ &= \frac{\theta_0 r^2}{2} - \frac{a}{b} e^{-br} r - \frac{a}{b^2} e^{-br} + \frac{a}{b^2} \quad (0 \leq r \leq r_1). \end{aligned} \quad (4.92)$$

Аналогічно обчислюється другий інтеграл:

$$\begin{aligned}
\int_{r_1}^r \theta(\rho) \rho d\rho &= \int_{r_1}^r (\theta_0 + ae^{-br}) \rho d\rho = \\
&= \frac{\theta_0(r^2 - r_1^2)}{2} - \frac{a}{b} re^{-br} + \frac{a}{b} r_1 e^{-br_1} - \frac{a}{b^2} e^{-br} + \frac{a}{b^2} e^{-br_1} \quad (r \geq r_1).
\end{aligned}
\tag{4.93}$$

Підставляючи ці значення в праві частини рівностей для функцій $b_1(r)$, $b_2(r)$ в (4.87), обчислюємо значення констант C_i ($i = \overline{1,4}$) в (4.88), а потім і напруження $\sigma_r(r)$, $\sigma_\varphi(r)$ за формулами (4.90). Зазвичай внутрішньоструктурні термонапруження мають найбільше значення на інтерфейсній поверхні $r = r_1$.

Тоді

$$\begin{aligned}
\int_0^r \theta(\rho) \rho d\rho &= \frac{\theta_0 r_1^2}{2} - \frac{a}{b} \left(r_1 + \frac{1}{b} \right) e^{-br_1} + \frac{a}{b^2}; \\
\int_{r_1}^r \theta(\rho) \rho d\rho - \int_{r_1}^{r_1} \theta(\rho) \rho d\rho &= 0; \\
\frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r \theta(\rho) \rho d\rho &= \frac{\theta_0}{2} \quad \text{при } r \rightarrow \infty.
\end{aligned}
\tag{4.94}$$

При цьому

$$C_3 = \frac{(1 + \nu_2)(1 - 2\nu_2)}{2(1 - \nu_2)} \alpha_2 \theta_0. \tag{4.95}$$

Розглянемо випадок $\theta_0 = -20^\circ \text{ C}$, $a = \pm 5^\circ \text{ C}$ при $b = 100; 200$ і 300 м^{-1} .
Значення температури $\theta(r)$ в вибраних точках на осі Or при $r_1 = 0,004 \text{ м}$

наведені в табл. 4.9.

Таблиця 4.9 – Значення температури в характерних точках системи

$a, ^\circ\text{C}$		$b = 100 \text{ м}^{-1}$	$b = 200 \text{ м}^{-1}$	$b = 300 \text{ м}^{-1}$
$a = 5$	$\theta(r), ^\circ\text{C}$	-15	-15	-15
	$\theta(r_1), ^\circ\text{C}$	-16,65	-17,76	-18,49
	$\theta(2r_1), ^\circ\text{C}$	-17,76	-18,99	-19,54
$a = 0$	$\theta(r), ^\circ\text{C}$	-20	-20	-20
	$\theta(r_1), ^\circ\text{C}$	-20	-20	-20
	$\theta(2r_1), ^\circ\text{C}$	-20	-20	-20
$a = -5$	$\theta(r), ^\circ\text{C}$	-25	-25	-25
	$\theta(r_1), ^\circ\text{C}$	-23,35	-22,24	-21,51
	$\theta(2r_1), ^\circ\text{C}$	-22,24	-21,00	-20,45

З цих даних випливає, що найбільші значення градієнта температури $\theta(r)$ реалізуються у зоні інтерфейсної поверхні $r = r_1$. В цих же зонах мають місце і найбільші значення термонапружень. Значення констант C_i ($i = \overline{1,4}$) за вибраних параметрів системи наведені в табл. 4.10.

Обчислені за таких даних термонапруження на поверхні $r = r_1$ тіла 1 та середовища 2 подані в табл. 4.11. Аналіз цих результатів дозволяє зробити висновок, що при, навіть, порівняно невеликому однаковому прирості температури ($a = 0, \theta = -20^\circ\text{C}$) в арматурі 1 та матриці 2 напруження в асфальтобетонному середовищі складають десятки процентів від значення її границі міцності при розтягуванні, яке може бути в 5 – 6 разів менше його

границі міцності при стисканні.

Таблиця 4.10 – Значення констант інтегрування

$a, ^\circ\text{C}$	$b, \text{м}^{-1}$	C_1	C_2	C_3	C_4
$a = 5$	100	-8,1458	0	-14,857	$-1,006 \cdot 10^{-4}$
	200	-6,4616	0	-14,857	$-1,184 \cdot 10^{-4}$
	300	-6,6972	0	-14,857	$-1,317 \cdot 10^{-4}$
$a = 0$		-7,5528	0	-14,857	$-1,802 \cdot 10^{-4}$
$a = -5$	100	-8,9578	0	-14,857	$-2,549 \cdot 10^{-4}$
	200	-8,6439	0	-14,857	$-2,421 \cdot 10^{-4}$
	300	-8,4084	0	-14,857	$-2,287 \cdot 10^{-4}$

Таблиця 4.11 – Значення термонапружень в тілі 1 та середовищі 2 на поверхні $r = r_1$

$a, ^\circ\text{C}$	$b, \text{м}^{-1}$	$\sigma_r^{(1)}(r_1), \text{МПа}$	$\sigma_\varphi^{(1)}(r_1), \text{МПа}$	$\sigma_r^{(2)}(r_1), \text{МПа}$	$\sigma_\varphi^{(2)}(r_1), \text{МПа}$
$a = 5$	100	-0,5696	0,8518	-0,5696	0,3399
	200	-0,5491	1,5870	-0,5491	0,3955
	300	-0,5339	1,8457	-0,5339	0,4301
$a = 0$		-0,4777	-0,4777	-0,4777	0,4777
$a = -5$	100	-0,3858	-1,8059	-0,3858	-0,29989
	200	-0,4063	-2,5424	-0,4063	-0,2794
	300	-0,4218	-2,8115	-0,4218	-0,2639

Крім того при $a = 5^\circ\text{C}$ напруження $\sigma_r^{(2)}(r)$ та $\sigma_\varphi^{(2)}(r)$ мають різні знаки. Це означає, що напруження розтягування в асфальтобетоні при $a = 5$

реалізуються у будь-якому випадку. Відмітимо, що при спільній дії термічного та транспортного навантаження ці термонапруження можуть виявитися критичними.

При $a = -5^{\circ}\text{C}$ всі напруження є стискаючими, оскільки вони від'ємні. Однак ця обставина також не покращує ситуацію, оскільки при зміні напрямку теплообмінного режиму вона змінюється на обернену

Ефект Градієнтного механізму ініціювання внутрішньоструктурних термонапружень, що здійснюється в даному випадку, може супроводжуватись, також тим, що тут можуть втрачатися умови для прояву принципу Сен-Венана. Це зумовлено тим, що температура системи виявляється змінною у всіх її точках, градієнт температури ніде не дорівнює нулю, та термонапруження, що ним викликаються, можуть також не прямувати до нуля (або прямувати до нуля дуже повільно) при віддаленні від джерела термічного збурення.

4.6 Висновки до розділу 4

У розділі 4 на основі методів теорії термопружності поставлено та досліджено деякі задачі про концентрацію термонапружень на поверхнях стрижневої (волокнуистої) арматури в композитних матеріалах.

1. Розглянуто задачу про утворення додаткових термонапружень у середовищі асфальтобетонного дорожнього покриття при введенні в нього армуючого стрижня.

На основі методів термопружності сформовані диференціальні рівняння плоского осесиметричного деформованого стану нескінченного циліндричного пружного тіла в нескінченному пружному середовищі при

стаціонарній зміні температури системи.

У замкнутій формі побудовано аналітичний розв'язок сформульованих рівнянь, який визначає додаткове термопереміщення, деформацію та напруження в системі. Показано, що додаткові термонапруження мають найбільші значення на поверхні контакту армуючого стрижня і масиву покриття і зменшуються пропорційно квадрату відстані від цієї поверхні. Встановлено, що значення додаткових термонапружень зростають із зростанням термомеханічної несумісності матеріалів системи та радіальної жорсткості стрижня. На прикладі асфальтобетону, продемонстровано, що якщо межа його міцності при стисканні становить $5 \div 20$ МПа, а при розтягуванні він виявляється в $6 \div 8$ раз менше цих значень, то за розглянутих умов, додаткові термонапруження в асфальтобетоні, викликані введенням в нього армуючого стрижня зі склопластику, можуть призводити до виникнення локальних дефектів у його малому okolí, навіть за помірних змін температури.

Запропоновано спосіб зниження додаткових термонапружень шляхом зменшення радіальної жорсткості арматури за рахунок заміни суцільного стрижня порожнистою трубкою. Теоретичне моделювання цього ефекту показало, що зі зменшенням товщини стінки трубки зниження додаткових контактних термонапружень в асфальтобетоні стає суттєвим.

2. Розглянуті питання зниженої корозійної стійкості мостових бетонних конструкцій, армованих сталевими стрижнями з епоксидним покриттями та обумовленої цим ефектом заборони такої арматури в мостобудуванні деяких регіонів американського континенту. Виражено припущення про зв'язок встановленого феномену з додатковими внутрішньоструктурними термоушкодженнями, спричиненими суттєвою несумісністю термомеханічних параметрів сталі, епоксидної смоли та цементобетону.

Із застосуванням методів термопружності розроблено математичну модель і виведено диференціальні рівняння, що описують пружне деформування цементобетонного середовища, що містить сталевий армуючий стрижень з епоксидним покриттям при заданій зміні температури. Побудовано розв'язок цих рівнянь. Встановлено, що навіть при помірних змінах температури на 5° внутрішньоструктурні термонапруження в цементобетоні, що обумовлені високим значенням коефіцієнта лінійного термічного розширення епоксидної смоли, можуть помітно перевищувати його границю міцності і призводити до тріщин та пошкоджень. Ці пошкодження локалізовані в околі інтерфейсної поверхні, вони можуть поширюватися вздовж усієї довжини стрижня і слугувати каналами для підведення води до епоксидного шару та суттєвого погіршення морозостійкості в результаті замерзання води в таких місцях і викликатимуть відшарування цементобетону від арматури.

3. Поставлена задача про математичне визначення внутрішньоструктурних термонапружень в асфальтобетонних та цементобетонних матеріалах, підсилених фібергласовою, фіберкарбоновою, фібербазальтовою та фіберарамідною арматурами. В замкненій формі виписані вирази для радіальних та колових термонапружень, що викликаються зміною температури системи.

Показано, що рівні термонапружень визначаються термомеханічною несумісністю матеріалів матриці та арматури, їх максимальні значення мають місце на інтерфейсній поверхні та спадають обернено пропорційно квадрату радіальної координати. Цей ефект відповідає принципу Сен-Венана, оскільки головний вектор та головний момент всіх напружень, які діють на матрицю на контактній поверхні $r = r_1$, дорівнюють нулю.

4. Виконано теоретичне дослідження механізму зародження внутрішньоструктурних термонапружень в композитних матеріалах зі стрижневою арматурою, зумовлених структурною неоднорідністю системи, наявністю в ній сталих та змінних полів температури та несумісністю термомеханічних параметрів (модулів пружності, коефіцієнтів Пуассона та коефіцієнтів лінійного термічного розширення).

Із застосуванням теорії термопружності методами математичного аналізу сформульовані системи звичайних диференціальних рівнянь для триточкових крайових задач з розривними коефіцієнтами. Виведені додаткові співвідношення для крайових умов і умов спряження шуканих функцій на інтерфейсній поверхні. В замкнених формах побудовані розв'язки поставленої задачі для пружних середовищ в неоднорідних полях температури.

Встановлено, додаткові внутрішньоструктурні термонапруження концентруються на поверхні контакту між фазами композиту. Вони представляють собою систему сил з нульовим головним вектором та головним моментом і тому, у відповідності до принципу Сен Венана, їх вплив на термодетформований та напружений стан матриці спадає пропорційно величині r^{-2} , де r – радіальна координата. Розглянуто конкретні приклади.

5. Поставлена задача про теоретичне моделювання явища зародження внутрішньоструктурних термонапружень в композитному матеріалі, що містить стрижневу арматуру з відмінними термомеханічними параметрами, при дії термічного збурення вздовж радіальної координати.

Сформульована триточкова система звичайних диференціальних рівнянь з додатковими умовами на краях області визначення розв'язку та константними рівняннями сумісності розв'язків на інтерфейсній поверхні. Побудовано розв'язок цієї системи, знайдені функції переміщень,

деформацій і напружень для випадку зміни температури системи вздовж радіальної координати за експоненціальним законом.

Аналіз цих розв'язків свідчить про те, що поля термонапружень в системі в значній мірі визначаються показниками експоненти температури та їх вклад в термопошкодження системи може бути помітним.

6. Результати досліджень даного розділу викладено у наступних публікаціях [10, 13, 18, 19, 44, 56, 72, 79, 153].

РОЗДІЛ 5

КОНЦЕНТРАЦІЯ ТЕРМОНАПРУЖЕНЬ В ЦЕМЕНТОБЕТОНАХ- ТА АСФАЛЬТОБЕТОНАХ В ОКОЛІ ПОР ТА КАПІЛЯРІВ, ЧАСТКОВО АБО ПОВНІСТЮ ЗАПОВНЕНИХ ВОДОЮ, ПРИ ЇЇ ЗАМЕРЗАННІ

5.1 Особливості зародження термонапружень в пружному середовищі конструкційних матеріалів зі сферичною порожниною, заповненою водою

5.1.1 Термомеханічні аспекти морозостійкості цементо- та асфальтобетонних матеріалів

Перетворення води на лід є одним із найбільш розповсюджених явищ в природі. Нерідко воно супроводжується шкідливими, а також аварійними та позаштатними ситуаціями в навколишньому середовищі та техніці. До них відносяться річкові крижані затори з повеннями, промерзання та випинання дорожнього полотна та ґрунту, обмерзання літальних апаратів, суден та споруд. Це явище призводить також до аварій водопровідних трубних систем та розривів ємностей для зберігання води. У всіх цих випадках із замерзанням води пов'язаний особливий ефект збільшення об'єму льоду порівняно з вихідним об'ємом води, що замерзає, який після заповнення нею порожнеч, наприклад, в гірських породах, а також порах та капілярах матеріалів дорожніх покриттів, цементобетонних конструкцій та цегляних кладок будівельних споруд призводить до подальшого розвитку в них тріщин та руйнувань.

В матеріалознавстві аналіз зміни фізичних та механічних властивостей матеріалів під дією циклічних змін їх температур (додатних та від'ємних) проводиться на базі концепції морозостійкості матеріалів. Під нею розуміють здатність матеріалу протидіяти позмінному замерзанню та відтаванню мікро-

та макрооб'ємів води, що знаходиться в його порожнинах. Морозостійкість визначається числом циклів замерзання-відтавання, яке матеріал може витримати до початку руйнації.

До матеріалів, що відчують найбільш інтенсивний вплив морозозмін на їх міцність, можна віднести цементо- та асфальтобетон дорожніх покриттів, оскільки вони експлуатуються у відкритих середовищах та піддаються частим сезонним та добовим змінам температур [176, 180, 202, 231, 261]. Наприклад, масив цементного бетону містить в собі розгалужену систему мікро- та макропор та капілярів з характерними розмірами від $4 \cdot 10^{-6}$ до $1 \cdot 10^{-3}$ мм та більше [244]. Вода насичує пори та капіляри й замерзає в них по-різному, так як при цьому діють складні закони змочування та парціального тиску, за якими відбувається рух води по порах та капілярах.

Практика показала, що для зменшення руйнуючої дії льоду в капілярах необхідно створювати компенсуючі зони, в якості яких слугують бульбашки повітря або газу, що створюються повітровтягуючими або газоутворюючими домішками. Помічено, що руйнування цементобетону під дією морозу зазвичай відбувається тільки при його циклічній дії [266, 287]. Однак, як завгодно тривале перебування матеріалу при від'ємній температурі буде тільки сповільнювати процес твердіння цементного каменю, не призводячи його до руйнування. Це зумовлено тим, що цементобетон являє собою пористий матеріал і якщо б всі пори в ньому були заповнені водою, то при першому ж циклі заморожування він мав би зруйнуватися, оскільки при замерзанні води через меншу густину льоду в пружній системі бетону мають виникати розтягувальні напруження, що значно перевищують його власну міцність. Здатність реального бетону опиратися руйнуванню при багатократному заморожуванні та відтаванні у водонасиченому стані пояснюється присутністю в його структурі резервних пор, не заповнених водою, в які і віджимається частина води в процесі заморожування під дією

тиску зростаючих кристалів льоду.

Механізм поступового руйнування структури бетону, що піддається позмінному заморожуванню та відтаванню, являє собою комплексне поєднання деструктивних факторів, включаючи: тиск льоду під час кристалізації вільної води; гідростатичний тиск рідини, що стиснена в тупикових порах та капілярах; утомні дефекти структури, що поступово збільшуються від знакозмінних деформацій, які багатократно повторюються [133].

З аналогічними механічними та фізичними ефектами пов'язана також і морозостійкість асфальтобетону. При довгостроковому зволоженні вода потрапляє в пори та капіляри, частково насичує бітум та проникає через дефектні місця бітумних шарів до поверхонь бітумних зерен. Це сприяє відшаруванню бітумних плівок, особливо при їх недостатній адгезії до поверхонь мінеральних частинок. Відмічені явища призводять до послаблення структурних зв'язків в асфальтобетоні та до полегшення його локального тріщиноутворення та руйнування.

На даний час вважається, що здатність цементо- і асфальтобетону опиратися циклам почергового заморожування та відтавання визначається, в основному, структурами їх порово-капілярних просторів, особливо відкритих (інтегральних) і умовно-замкнених пор з відповідними капілярами [208, 235, 291]. В даній роботі особлива увага приділена теоретичному вивченню структури термонапруженого стану матеріалу матриці композиту в околі пори та капіляра в залежності від сумісності та несумісності термомеханічних характеристик (модуль пружності, коефіцієнт Пуассона, коефіцієнт температурного об'ємного розширення, крихкість або пластичність твердих фаз) двофазних систем матриця-вода та матриця-лід на етапах попереднього до замерзання, замерзання та закритичного зниження температури. При цьому враховуються особливі термомеханічні властивості

води при її фазовому переході від рідкого стану в твердий, що пов'язані з її нестисливістю, зміною знаку її коефіцієнту температурного об'ємного розширення при температурі 4°C ($3,98^{\circ}\text{C}$) та збільшенням об'єму при замерзанні.

Тут необхідно також прокоментувати одну властивість води, що замерзає в порах і капілярах. Спеціалісти по термодинаміці та фізиці помітили, що вода замерзає за нульової (по Цельсію) температури тільки за умов, не пов'язаних з обмеженням її об'єму. Однак, якщо вода знаходиться в малих порах і капілярах, то температура її замерзання може значно падати [160, 214, 233]. Залежність точки замерзання від радіусу r^* пори визначається рівнянням Гіббса-Томсона, у відповідності з яким суттєві зміни температури замерзання води тільки починаються при значенні $r^* \approx 100 \text{ нм} = 10^{-4} \text{ мм}$. В той же час відмічено, що вклад більш дрібних пор в деформаційний стан в процесах замерзання-відтавання менш помітний і при дослідженні цих станів ними можна знехтувати, так як в першу чергу вода замерзає в крупних порах і найбільші руйнування в системі пов'язані з ними. Крім того термомеханічні властивості переохолоджень води в дрібних порах змінюються і до теперішнього часу вони слабо вивчені. Так, за допомогою підходу, що ґрунтується на гомогенізації пористого пружного середовища, насиченою водою, в ній досліджені тільки наведені макроскопічні напруження [235]. У зв'язку з цим нижче моделюються термомеханічні процеси в більш крупних порах та вплив ефектів переохолодження води не враховуються.

За допомогою методів математичного моделювання на базі теорії термопружності отримані в замкненій формі аналітичні вирази, що пов'язують параметри термдеформованого стану системи з термомеханічними параметрами її фаз на етапах зниження температури води, її замерзання і подальшого зменшення температури.

5.1.2 Моделювання ефекту зниження температури води в порах матеріалів

Задачу про моделювання термопружного деформування матриці композиту в околі замкненої пори, заповненої охолодженою водою, будемо формулювати за допомогою сферичної моделі пори. Такі моделі широко використовуються, наприклад, при дослідженні композитів із зернистими наповнювачами.

Нехай параметри термопружності нескінченного пружного середовища 1 (рис. 5.1) складають E_1 - модуль пружності, ν_1 - коефіцієнт Пуассона, α_1 - коефіцієнт лінійного температурного розширення. В середовищі є сферична порожнина радіусу R , яка заповнена водою 2, що є абсолютно нестисливою з коефіцієнтами лінійного ($\alpha_2(T)$) та об'ємного ($\beta_2(T)$) термічного розширення, що залежать від температури T . Так як термомеханічні характеристики середовища 1 і води 2 різні, при зміні температури T в них виникатимуть контактні термонапруження.

Покладемо, що у вихідному стані температура середовища та води в порі становила 15°C . Потім вона стаціонарно зменшувалась до 0°C . Оскільки коефіцієнт α_2 змінюється з падінням T , будемо дискретно підраховувати додаткові прирости термонапружень $\Delta\sigma^{(1)}$, $\Delta\sigma^{(2)}$ з кроком за температурою $\Delta T = -1^\circ\text{C}$ до $T = 0^\circ\text{C}$ та накопичувати ці термонапруження. Далі обчислимо додаткові прирости напружень, що викликані замерзанням води, та додамо їх з термонапруженнями. Після цього підрахуємо загальний термонапружений стан системи середовище-лід при подальшому падінні температури.

При обчисленнях будемо вважати, що середовище 1 знаходиться всередині сфери, радіус якої $r \rightarrow \infty$. Для розв'язання задачі використовується сферична система координат r, φ, θ з початком O в центрі порожнини.

Термонапружений стан середовища 1 в цій системі визначається напруженнями $\sigma_r^{(1)}(r)$, $\sigma_\varphi^{(1)}(r)$, $\sigma_\theta^{(1)}(r)$, що діють на відповідних елементарних площадках $r = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, $\theta = \text{const}$, причому в силу сферичної симетрії задачі $\sigma_\varphi^{(1)}(r) = \sigma_\theta^{(1)}(r)$.

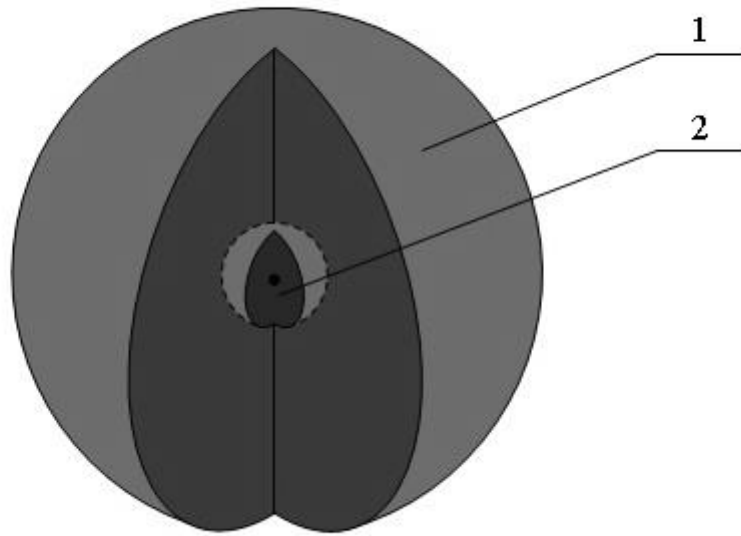


Рисунок 5.1 – Схема середовища з порою, заповненою водою

Завдяки тому, що дослідження термопружного стану проводяться в лінійній постановці, приріст термонапружень $\Delta\sigma_r^{(1)}$, $\Delta\sigma_\varphi^{(1)} = \Delta\sigma_\theta^{(1)}$, що викликані приростом температури ΔT , задовольняють лінійному рівнянню [148, 188]

$$\frac{d\Delta\sigma_r^{(1)}}{dr} + \frac{2(\Delta\sigma_r^{(1)} - \Delta\sigma_\varphi^{(1)})}{r} = 0 \quad (5.1)$$

Виразимо приріст термонапружень $\Delta\sigma_r^{(1)}(r)$, $\Delta\sigma_\varphi^{(1)}(r)$, що сюди входять, через прирости відносних радіальних ($\Delta\varepsilon_r^{(1)}(r)$) і колових ($\Delta\varepsilon_\varphi^{(1)}(r)$) деформацій

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_r^{(1)}(r) &= \frac{E_1(1-\nu_1)}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}\Delta\varepsilon_r^{(1)} + \frac{2E_1\nu_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}\Delta\varepsilon_\varphi^{(1)} - \frac{E_1}{(1-2\nu_1)}\alpha_1\Delta T; \\ \Delta\sigma_\varphi^{(1)}(r) &= \frac{E_1\nu_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}\Delta\varepsilon_r^{(1)} + \frac{E_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}\Delta\varepsilon_\varphi^{(1)} - \frac{E_1}{(1-2\nu_1)}\alpha_1\Delta T.\end{aligned}\quad (5.2)$$

Представимо також прирости деформацій через прирости радіальних переміщень $\Delta u^{(1)}(r)$

$$\Delta\varepsilon_r^{(1)} = \frac{d\Delta u^{(1)}}{dr}; \quad \Delta\varepsilon_\varphi^{(1)} = \frac{d\Delta u^{(1)}}{dr}. \quad (5.3)$$

Після відповідних перетворень систему рівнянь (5.1) – (5.3) можна звести до одного рівняння

$$\frac{d^2\Delta u^{(1)}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Delta u^{(1)}}{dr} - \frac{2}{r^2}\Delta u^{(1)} = 0; \quad (r \geq R). \quad (5.4)$$

Зведемо його до вигляду

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \Delta u^{(1)}) \right] = 0; \quad (r \geq R),$$

більш зручному для інтегрування.

Це рівняння має розв'язок

$$\Delta u^{(1)}(r) = rC_1 + \frac{1}{r^2}C_2; \quad (r \geq R). \quad (5.5)$$

Константи C_1 , C_2 , що сюди входять, визначаються із умови рівності радіальних переміщень пружного середовища 1 та води 2 на граничній поверхні $r = R$

$$\Delta u^{(1)}(r) = \Delta u^{(2)}(R) \quad (5.6)$$

та умови рівності нулю приростів радіальних напружень середовища 1 при $r \rightarrow \infty$

$$\Delta \sigma_r^{(1)}(r) \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (5.7)$$

Оскільки вода є нестисливою рідиною, при температурних змінах об'ємів елементів середовищ 1 і 2 середовище 1 не буде чинити ніякого впливу на температурні переміщення $\Delta u^{(2)}(r)$ ($r \leq R$) води 2, і на поверхні $r = R$ додаткові переміщення, викликані приростом ΔT складуть $R\alpha_2(T)\Delta T$. Тут враховано, що α_2 є функція, що залежить від T .

Тоді умови (5.6), (5.7) можна переписати у вигляді

$$RC_1 + \frac{1}{R^2}C_2 = R\alpha_2(T)\Delta T; \quad (5.8)$$

$$\frac{E_1}{(1-2\nu_1)}C_1 - \frac{2}{r^3}\frac{E_1}{1+\nu_1}C_2 - \frac{E_1}{(1-2\nu_1)}\alpha_1\Delta T \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Ця система має розв'язок

$$\begin{aligned} C_1 &= \alpha_1 \Delta T; \\ C_2 &= R^3 (\alpha_2 - \alpha_1) \Delta T. \end{aligned} \quad (5.9)$$

В результаті на основі рівностей (5.5) та (5.2), (5.3) маємо

$$\begin{aligned} \Delta u^{(1)}(r) &= r \alpha_1 \Delta T + \frac{R^3}{r^2} (\alpha_2 - \alpha_1) \Delta T; \\ \Delta \varepsilon_r^{(1)}(r) &= \varepsilon_1 \Delta T - \frac{2R^3}{r^3} (\alpha_2 - \alpha_1) \Delta T; \\ \Delta \varepsilon_\varphi^{(1)}(r) &= \alpha_1 \Delta T + \frac{R^3}{r^2} (\alpha_2 - \alpha_1) \Delta T; \\ \Delta \sigma_r^{(1)}(r) &= -\frac{2R^3}{r^3} \frac{E_1}{(1+\nu_1)} (\alpha_2 - \alpha_1) \Delta T; \\ \Delta \sigma_\varphi^{(1)}(r) &= \Delta \sigma_\theta^{(1)}(r) = \frac{R^3}{r^3} \frac{E_1}{(1+\nu_1)} (\alpha_2 - \alpha_1) \Delta T. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Відмітимо, що найбільші значення додаткових термонапружень $\Delta \sigma_\varphi^{(1)}$, $\Delta \sigma_\theta^{(1)} = \Delta \sigma_\varphi^{(1)}$ в середовищі 1 мають місце на поверхні $r = R$ і вони спадають обернено пропорційно кубу координати r . Крім того напруження $\Delta \sigma_r^{(1)}(r)$ по модулю в два рази більше напружень $\Delta \sigma_\varphi^{(1)}(r)$ і $\Delta \sigma_\theta^{(1)}(r)$ і вони мають різні знаки. Розглянемо випадок, коли температура T пружного середовища 1 і води 2 падає від $T = 15^\circ \text{C}$ до $T = 0^\circ \text{C}$. При цьому коефіцієнт α_1

залишається незмінним, а коефіцієнти $\alpha_2(T)$ і $\beta_2(T)$ набувають значення, наведені в табл. 5.1. Вони отримані на основі квадратичної інтерполяції їх реперних значень при $T = 0,1, 1, 4, 10$ і 15°C .

Таблиця 5.1 – Значення коефіцієнтів лінійного ($\alpha_2(T)$) і об'ємного ($\beta_2(T)$) температурного розширення води.

i	$T, ^\circ\text{C}$	$\alpha_2, 1/^\circ\text{C}$	$\beta_2, 1/^\circ\text{C}$
0	15	$0,503 \cdot 10^{-4}$	$1,51 \cdot 10^{-4}$
1	14	$0,464 \cdot 10^{-4}$	$1,391 \cdot 10^{-4}$
2	13	$0,423 \cdot 10^{-4}$	$1,269 \cdot 10^{-4}$
3	12	$0,381 \cdot 10^{-4}$	$1,143 \cdot 10^{-4}$
4	11	$0,338 \cdot 10^{-4}$	$1,013 \cdot 10^{-4}$
5	10	$0,293 \cdot 10^{-4}$	$0,88 \cdot 10^{-4}$
6	9	$0,243 \cdot 10^{-4}$	$0,742 \cdot 10^{-4}$
7	8	$0,201 \cdot 10^{-4}$	$0,602 \cdot 10^{-4}$
8	7	$0,153 \cdot 10^{-4}$	$0,458 \cdot 10^{-4}$
9	6	$0,103 \cdot 10^{-4}$	$0,310 \cdot 10^{-4}$
10	5	$0,053 \cdot 10^{-4}$	$0,158 \cdot 10^{-4}$
11	4	$0,001 \cdot 10^{-4}$	$0,003 \cdot 10^{-4}$
12	3	$-0,049 \cdot 10^{-4}$	$-0,148 \cdot 10^{-4}$
13	2	$-0,105 \cdot 10^{-4}$	$-0,316 \cdot 10^{-4}$
14	1	$-0,17 \cdot 10^{-4}$	$-0,50 \cdot 10^{-4}$
15	0,1	$-0,227 \cdot 10^{-4}$	$-0,68 \cdot 10^{-4}$

Додаткові термонапруження на поверхні $r=R$ в середовищі 1 в результаті падіння температури від $T=15^{\circ}\text{C}$ до $T_i=T_0-i\Delta T$ ($1\leq i\leq 15$) можна наближено обчислити шляхом додавання їх приростів (5.10) з кроком $\Delta T=-1^{\circ}\text{C}$.

$$\begin{aligned}\sigma_{r,i}^{(1)}(R) &= \sum_{k=0}^i \left[-\frac{2E_1}{1+\nu_1} (\alpha_{2,k} - \alpha_1) \right] (-1); \\ \sigma_{\varphi,i}^{(1)}(R) &= \sigma_{\theta,i}^{(1)}(R) = \sum_{k=0}^i \left[\frac{E_1}{1+\nu_1} (\alpha_{2,k} - \alpha_1) \right] (-1).\end{aligned}\tag{5.11}$$

Відмітимо, що оскільки в діапазоні зміни температури T , який розглядається, коефіцієнт $\alpha_2(T)$ набуває значень різних за знаком, на початковому етапі падіння T об'єм води буде зменшуватись, а при $4^{\circ} \geq T \geq 0^{\circ}\text{C}$ він буде збільшуватись.

5.1.3 Термопружне деформування пружного середовища при замерзанні води в його порах

При $i=15$, $T_{15}=0^{\circ}\text{C}$ термонапруження $\sigma_{r,15}^{(1)}(R)$, $\sigma_{\varphi,15}^{(1)}(R)=\sigma_{\theta,15}^{(1)}(R)$ в рівностях (5.11) відображають напружений стан системи пружне середовище 1 – вода 2 перед замерзанням води. При подальшому видаленню тепла із системи зі збереженням нульової температури вода буде перетворюватись в лід та розширятися. Однак лід, на відміну від води, є пружним стисливим середовищем, тому збільшення об'єму води, що замерзає, буде також супроводжуватись його додатковою зміною (збільшенням або зменшенням) в

результаті контактної взаємодії з пружним середовищем 1. З цим фактором пов'язана відмінність напружено деформованих станів пружного середовища 1 та льодяного тіла 2. Так для середовища 1 радіальні та колові деформації обчислюються за формулами

$$\varepsilon_r^{(1)}(r) = \frac{du^{(1)}}{dr}; \quad \varepsilon_\varphi^{(1)}(r) = \frac{u^{(1)}}{r}. \quad (5.12)$$

Їм відповідають радіальні та колові напруження

$$\sigma_r^{(1)}(r) = \frac{E_1(1-\nu_1)}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} \varepsilon_r^{(1)} + \frac{2E_1\nu_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} \varepsilon_\varphi^{(1)}; \quad (5.13)$$

$$\sigma_\varphi^{(1)}(r) = \sigma_\theta^{(1)}(r) = \frac{E_1\nu_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} \varepsilon_r^{(1)} + \frac{E_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} \varepsilon_\varphi^{(1)}.$$

При цьому загальні відносні деформації $\varepsilon_{r,tot}^{(2)}(r)$, $\varepsilon_{\varphi,tot}^{(2)}(r)$ складаються з

ДВОХ КОМПОНЕНТ

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r,tot}^{(2)}(r) &= \frac{du^{(2)}}{dr} = \varepsilon_{r,el}^2(r) + \varepsilon_{r,exp}^2; \\ \varepsilon_{\varphi,tot}^{(2)}(r) &= \frac{u^{(2)}}{r} = \varepsilon_{\varphi,el}^2(r) + \varepsilon_{\varphi,exp}^2, \end{aligned} \quad (5.14)$$

де $\varepsilon_{r,el}^{(2)}(r)$, $\varepsilon_{\varphi,el}^{(2)}(r)$ – відповідні пружні складові деформацій, викликані пружною контактною взаємодією тіл 1 і 2, $\varepsilon_{r,exp}^{(2)}(r) = \varepsilon_{\varphi,exp}^{(2)}(r)$ – деформації льоду при розширенні.

Величини $\varepsilon_{r,\text{exp}}^{(2)}(r) = \varepsilon_{\varphi,\text{exp}}^{(2)}(r)$ відомі. Вони дорівнюють коефіцієнту $\alpha_{fr} = 0,03$ лінійного розширення льоду при замерзанні води, який обчислюється за допомогою рівності $\alpha_{fr} = \beta_{fr}/3$ через об'ємний коефіцієнт розширення $\beta_{fr} = 0,09$. Оскільки напруження $\varepsilon_r^{(2)}(r)$ та $\varepsilon_{\varphi}^{(2)}(r)$ в тілі 2 залежать тільки від компонент пружних деформацій, маємо

$$\begin{aligned}\varepsilon_r^{(2)}(r) &= \frac{E_2(1-\nu_2)}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}(\varepsilon_{r,tot}^{(2)} - 0,03) + \frac{2E_2\nu_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}(\varepsilon_{\varphi,tot}^{(2)} - 0,03); \\ \varepsilon_{\varphi}^{(2)}(r) &= \varepsilon_{\theta}^{(2)}(r) = \frac{E_2\nu_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}(\varepsilon_{r,tot}^{(2)} - 0,03) + \frac{E_2}{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}(\varepsilon_{\varphi,tot}^{(2)} - 0,03).\end{aligned}\quad (5.15)$$

У зв'язку з відміченими відмінностями, задача про пружні деформації води, що замерзає в сферичній порі радіусу R за постійної температури $T = 0^\circ\text{C}$ описується двома рівняннями теорії пружної рівноваги в сферичній системі координат

$$\frac{d\sigma_r^{(j)}}{dr} + \frac{2(\sigma_r^{(j)} - \sigma_{\varphi}^{(j)})}{r} = 0; \quad (j=1,2), \quad (5.16)$$

де значення $j=1$ відповідають пружному середовищу 1, $j=2$ – пружному льодяному тілу 2 в сферичній порі.

За допомогою рівностей (5.13) – (5.15) рівняння (5.16) зводяться до вигляду

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r^2u^{(1)})\right] &= 0; \quad (r \geq R); \\ \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2u^{(2)})\right] &= 0; \quad (r \leq R).\end{aligned}\tag{5.17}$$

Ця система має загальний розв'язок

$$\begin{aligned}u^{(1)}(r) &= rC_1 + \frac{1}{r^2}C_2; \\ u^{(2)}(r) &= rC_3 + \frac{1}{r^2}C_4.\end{aligned}\tag{5.18}$$

Константи C_1, C_2, C_3, C_4 , що в ньому використовуються, визначаються з умов нерухомості льоду, що розширюється в точці $r = 0$:

$$u^{(2)}(0) = 0,\tag{5.19}$$

а також рівності переміщень $u^{(1)}(R), u^{(2)}(R)$ та напружень $\sigma_r^{(1)}(R), \sigma_r^{(2)}(R)$ на поверхні контакту $r = R$:

$$\begin{aligned}u^{(1)}(R) &= u^{(2)}(R); \\ \sigma_r^{(1)}(R) &= \sigma_r^{(2)}(R)\end{aligned}\tag{5.20}$$

і рівності нулю напружень $\sigma_r^{(1)}$ при $r \rightarrow \infty$:

$$\sigma_r^{(1)}(r) \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty.\tag{5.21}$$

Після врахування рівностей (5.13) - (5.15) та (5.18) з рівностей (5.19) – (5.21) отримуємо

$$\begin{aligned} C_1 &= 0; \\ \frac{1}{R^2} C_2 &= RC_3; \\ -\frac{2E_1}{R^3(1+\nu_1)} C_2 &= \frac{E_2}{(1-2\nu_2)} C_3 - \frac{E_2}{(1-2\nu_2)} 0,03. \end{aligned} \quad (5.22)$$

З цієї системи випливає

$$C_2 = \frac{0,03R^3(1+\nu_1)E_2}{2(1-2\nu_2)E_1 + (1+\nu_1)E_2}; \quad C_3 = \frac{0,03(1+\nu_1)E_2}{2(1-2\nu_2)E_1 + (1+\nu_1)E_2}. \quad (5.23)$$

В результаті отримуємо вираз для переміщень

$$\begin{aligned} u^{(1)}(r) &= \frac{R^3}{r^2} \frac{0,03(1+\nu_1)E_2}{[2(1-2\nu_2)E_1 + (1+\nu_1)E_2]}; \\ u^{(2)}(r) &= \frac{r \cdot 0,03(1+\nu_1)E_2}{2(1-2\nu_2)E_1 + (1+\nu_1)E_2}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

та напружень

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{(1)}(r) &= -\frac{R^3}{r^3} \frac{0,06E_1E_2}{[2(1-2\nu_2)E_1 + (1+\nu_1)E_2]}; \quad (r \geq R); \\
\sigma_\varphi^{(1)}(r) = \sigma_\theta^{(1)}(r) &= \frac{R^3}{r^3} \frac{0,03E_1E_2}{[2(1-2\nu_2)E_1 + (1+\nu_1)E_2]}; \quad (r \geq R); \\
\sigma_r^{(2)}(r) = \sigma_\varphi^{(2)}(r) = \sigma_\theta^{(2)}(r) &= -\frac{0,06E_1E_2}{2(1-2\nu_2)E_1 + (1+\nu_1)E_2}; \quad (0 \leq r \leq R).
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Характер зміни цих функцій вздовж радіальної координати r не залежить від значень механічних параметрів системи. Їх загальний вигляд показаний на рис. 5.2

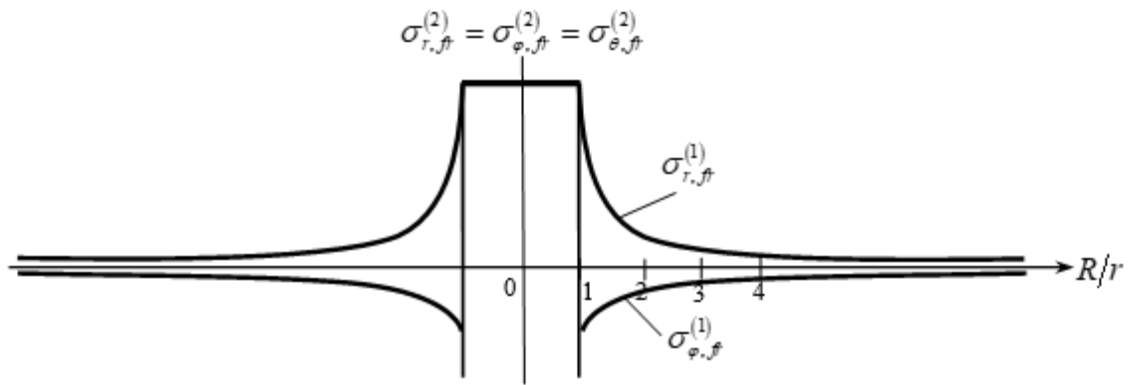


Рисунок 5.2 – Графіки розподілу термонапружень в пружному середовищі з порою, заповненою водою

Як із нього випливає напруження $\sigma_{r,fr}^{(1)}(r)$ та $\sigma_{\varphi,fr}^{(1)}(r)$ мають різні знаки, мають локалізований характер та спадають обернено пропорційно кубу координати r . Напруження в льодяному тілі 2 однакові, вони від'ємні та не залежать від r , оскільки являються гідростатичними.

5.1.4 Пружне деформування льоду в порі при від'ємних температурах

Після замерзання води в порі, при подальшому падінні температури T , лід, що утворився, поводить себе як пружне тіло, а напружено-деформований стан системи визначається термомеханічною несумісністю її фаз. Тоді термопружна рівновага системи матриця-лід описується рівняннями (5.16), в яких індекс $j=1$ відповідає матеріалу 1, індекс $j=2$ – льодяному тілу 2.

Напруження, що в них присутні, визначаються рівностями

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(j)}(r) &= \frac{E_j(1-\nu_j)}{(1+\nu_j)(1-2\nu_j)}\varepsilon_r^{(j)} + \frac{2E_j\nu_j}{(1+\nu_j)(1-2\nu_j)}\varepsilon_\phi^{(j)} - \frac{E_j\alpha_j}{1-2\nu_j}T; \\ \sigma_\phi^{(j)}(r) &= \frac{E_j\nu_j}{(1+\nu_j)(1-2\nu_j)}\varepsilon_r^{(j)} + \frac{E_j}{(1+\nu_j)(1-2\nu_j)}\varepsilon_\phi^{(j)} - \frac{E_j\alpha_j}{1-2\nu_j}T; \quad (j=1,2).\end{aligned}\tag{5.26}$$

Вони дорівнюють додатковим напруженням, які викликані падінням температури T від 0°C до поточного від'ємного значення. При цьому термомеханічні параметри E_j , ν_j , α_j матеріалу матриці та льоду залишаються незмінними.

Після вираження деформацій $\varepsilon_r^{(j)}$ та $\varepsilon_\phi^{(j)}$ через переміщення

$$\varepsilon_r^{(j)}(r) = \frac{du^{(j)}}{dr}; \quad \varepsilon_\phi^{(j)}(r) = \frac{u^{(j)}}{r},\tag{5.27}$$

підстановки їх в рівності (5.26) і потім в рівняння (5.16) маємо розв'язувальну систему

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u^{(j)}) \right] = 0; \quad (j=1, 2) \quad (5.28)$$

Вона має загальний розв'язок

$$\begin{aligned} u^{(1)}(r) &= rC_1 + \frac{1}{r^2} C_2; \quad (R \leq r \leq \infty); \\ u^{(2)}(r) &= rC_3 + \frac{1}{r^2} C_4 \quad (0 \leq r \leq R), \end{aligned} \quad (5.29)$$

в якому константи C_1, C_2, C_3, C_4 знаходяться із умов (5.19) – (5.21):

$$\begin{aligned} C_1 &= \alpha_1 T; \\ C_2 &= R^3 \frac{E_2(1+\nu_1)(\alpha_2 - \alpha_1)}{2E_1(1-2\nu_2) + E_2(1+\nu_1)}; \\ C_3 &= \frac{2E_1(1-2\nu_2)\alpha_1 + E_2(1+\nu_1)\alpha_2}{2(1-2\nu_2)E_1 + (1+\nu_1)E_2}; \quad C_4 = 0. \end{aligned} \quad (5.30)$$

За допомогою співвідношень (5.27) і (5.29), (5.30) при $j=1$ знаходяться напруження (5.26) в середовищі 1:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)}(r) &= -\frac{2R^3}{r^3} \frac{E_1 E_2 (\alpha_2 - \alpha_1) T}{E_2(1+\nu_1) + 2E_1(1-2\nu_2)}; \quad (r \geq R); \\ \sigma_\varphi^{(1)}(r) = \sigma_\theta^{(1)}(r) &= -\frac{R^3}{r^3} \frac{E_1 E_2 (\alpha_2 - \alpha_1) T}{E_2(1+\nu_1) + 2E_1(1-2\nu_2)}; \quad (r \geq R). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Відмітимо, що як і на попередніх етапах охолодження води і її

перетворення на лід (див. формули (5.10) і (5.25)), ці напруження мають різні знаки, спадають обернено пропорційно кубу координати r і напруження $\sigma_r^{(1)}(r)$ по модулю у двічі більше напружень $\sigma_\varphi^{(1)}(r) = \sigma_\theta^{(1)}(r)$.

Напруження в льодяному тілі 1 знаходяться при $j = 2$:

$$\sigma_r^{(2)}(r) = \sigma_\varphi^{(2)}(r) = \sigma_\theta^{(2)}(r) = \frac{2E_1E_2(\alpha_1 - \alpha_2)T}{E_2(1 + \nu_1) + 2E_1(1 - 2\nu_2)}; \quad (r \leq R). \quad (5.32)$$

Вони однакові та не залежать від r . Відмітимо, що обриси функцій (5.31), (5.32) також відповідають рис. 5.2.

5.1.5 Чисельні результати

5.1.5.1 Сферична пора в цементобетонному середовищі

Розглянемо випадок, коли сферична пора 2, заповнена водою, знаходиться в цементобетонному середовищі 1. Температура T системи поступово спадає від $+15^\circ\text{C}$ до 0°C . Обчислимо додаткові напруження в системі, вважаючи, що у вихідному стані система була термічно переднапруженою і при додатковій зміні температури і об'єму води вона завжди знаходиться в контактi з навколишнім асфальтобетоном.

У вибраному діапазоні зміни температури термомеханічні властивості цементу не змінюються. Вони складають $E_1 = 15\text{ ГПа}$, $\nu_1 = 0,2$, $\alpha_1 = 0,1 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, міцність при розтягуванні $[\sigma_{1,tens}] = 2 \div 5 \text{ МПа}$, міцність при стисканні $[\sigma_{1,comp}] = 20 \div 40 \text{ МПа}$.

Для льоду вони дорівнюють: $E_2 = 8$ ГПа, $\nu_2 = 0,35$, $\alpha_2 = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ \text{C}^{-1}$, $[\sigma_{2,tens}] = 1,11$ МПа. Вода вважається нестисливим середовищем, значення α якої при різних температурах дані в табл. 5.1 [226].

На рис. 5.3 представлені графіки приростів (5.10) термонапружень $\Delta\sigma_r^{(1)}(R)$, $\Delta\sigma_\varphi^{(1)}(R)$ на контактній поверхні $r = R$ при падінні температури на $\Delta T = -1^\circ \text{C}$ в межах її зміни $15^\circ \leq T \leq 0^\circ \text{C}$.

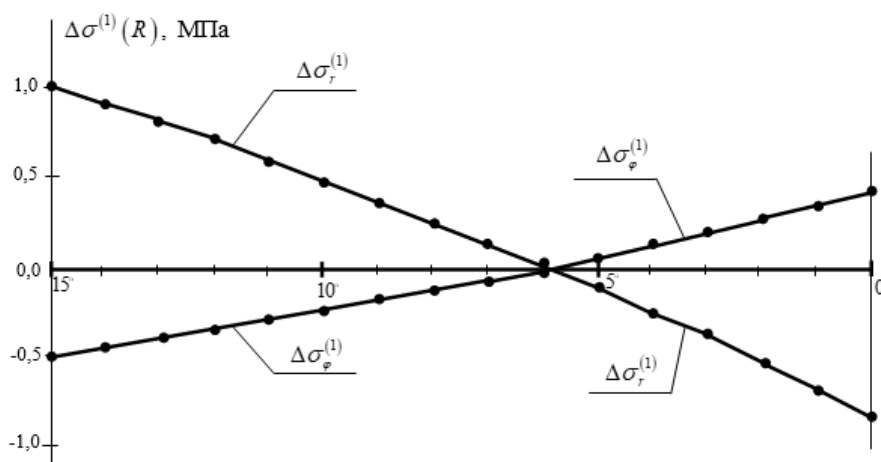


Рисунок 5.3 – Графіки залежностей приростів термонапружень $\Delta\sigma_r^{(1)}$, $\Delta\sigma_\varphi^{(1)}$ від температури

Максимальні за модулем прирости $\Delta\sigma_r^{(1)}(R) = 0,0075$ МПа та $\Delta\sigma_\varphi^{(1)}(R) = -0,00375$ МПа мають місце при $T = 15^\circ \text{C}$ та зростають до $\sigma_r^{(1)}(R) = -0,8175$ МПа, $\sigma_\varphi^{(1)}(R) = 0,40875$ МПа при $T = 0^\circ \text{C}$. Ці функції отримали сумарні зміни на інтервалі $15^\circ \geq T \geq 0^\circ \text{C}$ $\sigma_r^{(1)}(R) = \sum \Delta\sigma_r^{(1)}(R) = 1,505$ МПа, $\sigma_\varphi^{(1)}(R) = \sum \Delta\sigma_\varphi^{(1)}(R) = -0,7525$ МПа, які виявились меншими вказаних вище меж міцності цементобетонів.

При перетворенні води на лід в порах до знайдених вище сумарних термонапружень додаються напруження $\sigma_{r,fr}^{(j)}(R)$, $\sigma_{\varphi,fr}^{(j)}(R)$, $\sigma_{\theta,fr}^{(j)}(R)$,

викликані збільшенням об'єму води, що замерзає. Їх значення обчислюються за формулами (5.25) при $r = R$.

Вони виявились рівними $\sigma_{r,fr}^{(1)}(R) = -378,947$ МПа, $\sigma_{\varphi,fr}^{(1)}(R) = \sigma_{\theta,fr}^{(1)}(R) = 189,474$ МПа, $\sigma_{r,fr}^{(2)}(R) = \sigma_{\varphi,fr}^{(2)}(R) = \sigma_{\theta,fr}^{(2)}(R) = -378,947$ МПа. Можна бачити, що ці напруження в цементобетоні набагато перевищують їх межі міцності. Відмітимо також, що напруження та викликані ними ушкодження спадають обернено пропорційно кубу радіальної координати і тому мають локальну структуру та прихований характер. Однак при повторних актах заморожування-відтанення вони суттєво знижують морозостійкість системи.

Може виявитись, що пора, яка розглядається, не є замкненою і пов'язана капілярами з іншими порожнинами, не заповненими водою. Тоді по цим капілярам при замерзанні вода, що розширюється, буде витіснятися в сусідні порожнини та граничні руйнуючі напруження (5.25) не будуть досягнутими. В цьому випадку при подальшому падінні температури в результаті відмінності коефіцієнтів α_1 та α_2 середовищ, що контактують, в матеріалі цементобетону 1 виникнуть додаткові термонапруження, що визначаються рівностями (5.31). При температурі $T = -10^\circ\text{C}$ їх значення складають $\sigma_r^{(1)}(R) = 5,16129$ МПа, $\sigma_{\varphi}^{(1)}(R) = \sigma_{\theta}^{(1)}(R) = -2,58064$ МПа, $\sigma_r^{(2)}(R) = \sigma_{\varphi}^{(2)}(R) = \sigma_{\theta}^{(2)}(R) = 5,16129$ МПа. Ці напруження призведуть до відриву льоду від цементобетону та утворенню між ними зазору.

5.1.5.2 Сферична пора в асфальтобетонному середовищі

Основу асфальтобетонних покривів доріг складає бітум, який при

звичайних умовах є в'язкопружним матеріалом. Однак при понижених температурах його механічне деформування та міцність можна оцінювати за допомогою моделей теорії пружності, використовуючи його наведені термомеханічні характеристики. Можна вважати, що для асфальтобетону $E_1 = 32$ ГПа, $\nu_1 = 0,25$, $\alpha_1 = 1,8 \div 2,3 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$. Границя міцності асфальтобетону при $T = 0^\circ\text{C}$ доходить до 12 МПа.

Підраховані при цих значеннях за формулами (5.25) локальні напруження, викликані замерзанням води в сферичній порі, складають $\sigma_{r,fr}^{(1)}(R) = -526,027$ МПа, $\sigma_{\varphi,fr}^{(1)}(R) = \sigma_{\theta,fr}^{(1)}(R) = 263,014$ МПа, $\sigma_{r,fr}^{(2)}(R) = \sigma_{\varphi,fr}^{(2)}(R) = \sigma_{\theta,fr}^{(2)}(R) = -526,027$ МПа, що значно перевищує межі міцності обох середовищ. При цьому, однак, підкреслимо, що концентрація напружень в асфальтобетоні (а тому і викликані ними руйнування) спадають обернено пропорційно кубу відстані та в зв'язку з цим мають локальний характер (дивись рис. 5.2).

Якщо пора була неповністю заповнена водою і при її замерзанні бітум в околі пори не пошкодився, то при подальшому падінні температури на 10°C напруження в зоні поверхні $r = R$ отримають прирости (5.31). При вибраних значеннях термомеханічних параметрів вони склали $\sigma_r^{(1)}(R) = 5,08493$ МПа, $\sigma_\varphi^{(1)}(R) = \sigma_\theta^{(1)}(R) = -2,54247$ МПа. Ці напруження будуть сприяти відриву льоду від асфальтобетону та утворенню зазору між ними.

В завершенні цього дослідження підкреслимо, що всі наведені дослідження виконані на моделях сферичних пор, в той час як реальні пори можуть мати неправильні багатогранні форми з ребрами, вершинами та тріщинами. На цих нерегулярностях термопружні напруження значно зростають.

5.2 Концентрація термонапружень в цементобетоні в околі капіляра, частково або повністю заповненого водою, при її замерзанні

5.2.1 Особливості утворення пошкоджень в околі капілярної пори

В теорії термопружності [32] відомо, що, якщо однорідне пружне тіло вільне від зовнішніх і внутрішніх обмежень, то зміна в ньому температури на постійну величину призводить до його вільного деформування без змін його напруженого стану. У той самий час додаткові напруження у ньому можливі лише у випадках, коли його вільні температурні переміщення обмежені зовнішніми чи внутрішніми зв'язками. Тому існує дві концепції термічного пошкодження та руйнування тіл та конструкцій: механізм зовнішніх обмежень (“External Restraint”) та механізм внутрішніх обмежень (“Internal Restraint”) [132, 133]. Другий механізм, в основному, обумовлений неоднорідністю матеріалів, компоненти яких мають несумісні термопружні параметри. Їх несумісність призводить до несумісних деформацій у матеріалі та додаткових внутрішніх термонапружень. Оскільки, як правило, вони мають прихований характер і призводять до локальних тріщин та пошкоджень, а при повторних проявах і до повної деградації матеріалів, для їх передбачення та виявлення можуть бути зручними методи теоретичного аналізу [12, 160, 202, 244].

Прояв другого механізму є однією з основних причин деградації цементобетону в районах з великими добовими та сезонними змінами температури під час багаторазових актів заморожування-відтавання води в капілярах і порах. При цьому пошкодження матеріалу матриці реалізується у формі тріщин, що виникають під дією контактних стискаючих сил і колових розтягуючих сил, що діють на бетон в результаті збільшення обсягу замерзлого льоду.

За ознаками морозостійкості капілярні пори можна поділити на три групи: малі, середні та великі. Малі капіляри (з характерним розміром менше $5 \cdot 10^{-3} \text{ мк}$) відіграють меншу роль у процесі проникнення в них води та її подальшого перетворення на лід. Ця властивість знаходиться відповідно до формули Гіббса-Томсона (1871), яка характеризує зміщення температури кристалізації води, що заморожується в залежності від розмірів ємкості, в якій вона міститься, і визначає в даному випадку це значення в -78°C [214, 233, 235, 244].

Другу групу складають капілярні пори з низьким вмістом води та з розмірами $10 \cdot 10^{-3} - 50 \cdot 10^{-3} \text{ мк}$ та пори з високим вмістом води при розмірах $3 - 5 \text{ мк}$.

До третьої групи відносяться порожнини, заповнені повітрям, та які мають розміри від $0,01 \text{ мм}$ до 1 мм , але зазвичай порядку $0,1 \text{ мм}$.

Існує декілька теорій утворення пошкоджень в околі капілярної пори. Однією з них є сформульована Powers теорія критичного насичення капіляра, яка стверджує, що пошкодження цементобетону при заморожуванні в капілярі води настає лише, якщо водяне насичення у ньому перевищує 91,7% його загального обсягу. Вона заснована з урахуванням ефекту розширення льоду при заморожуванні на 9% [214, 233], надлишки якого тиснуть на стінки капіляра, викликаючи в цементобетоні радіальні напруження стиснення, що руйнують його. (Тут принагідно зазначимо, що, як показали наші розрахунки [12, 154], руйнування цементобетону викликаються не радіальними напруженнями стиснення, а коловими напруженнями розтягу, які в цих випадках також породжуються і яким цементобетон слабо опирається).

Powers також запропонував теорію гідравлічного тиску, відповідно до якої ушкодження при заморожуванні викликаються гідравлічним тиском незамороженої води від опору її перетіканню в капілярах.

У зв'язку з цими теоріями обговорюються питання впливу температури на морозостійкість порожнин, заповнених повітрям [239]. При заморожуванні води в капілярах вона витискається в ці аеровані пазухи і утворення пошкоджень не відбувається. Тому вважається за доцільне для забезпечення морозостійкості цементобетону створювати в ньому резервні буферні макро-порожнини, куди могли б видавлюватися надлишки води, яка розширюється при заморожуванні. Ці обставини та практичні експерименти першочергової деградації цементобетонних [208, 211, 239] та асфальтобетонних [180, 231, 238, 261, 287] конструкцій при звичайних сезонних та добових рецидивах процесів заморожування-танення [266, 291] дозволяють припустити, що в першу чергу і найбільші пошкодження цементобетону викликаються заморожуванням води у великих капілярах і порах, в яких рух точки кристалізації льоду, що передбачається теорією Гіббса-Томсона, є несуттєвою. Завдяки цьому, при моделюванні термомеханічних процесів деформування та пошкодження цементобетону в околі капілярів виходитимемо з основних положень теорії термопружності з урахуванням зміни термомеханічних параметрів цементобетону, води та льоду в температурному діапазоні $15^{\circ}\text{C} \geq T \geq -10^{\circ}\text{C}$. У цьому випадку виділимо в аналізованому діапазоні три етапи:

1. Етап зміни об'єму води в капілярах при падінні температури від $T = 15^{\circ}\text{C}$ до нуля. В цих умовах термомеханічні параметри цементобетону залишаються незмінними, а вода вважається нестискуваною при механічному деформуванні рідиною зі змінним коефіцієнтом лінійного термічного розширення, приймає нульове значення навколо величини $T = 4^{\circ}\text{C}$.

2. Етап замерзання води та перетворення її на лід при $T = 0^{\circ}\text{C}$. При цьому лід збільшує свій обсяг на 9% порівняно з вихідним об'ємом води і стає звичайним пружним тілом із заданими значеннями модуля пружності E , коефіцієнту Пуассона ν та коефіцієнту лінійного термічного розширення α .

3. Етап подальшого зниження температури від $T = 0^{\circ}\text{C}$ до $T = -10^{\circ}\text{C}$. У цьому випадку цементобетон і лід є пружними тілами з постійними значеннями E , ν , α

Розрахунки цих процесів здійснюються на основі кругової циліндричної моделі капіляра нескінченної довжини в необмеженому середовищі цементобетону. З використанням основних положень теорії термопружності побудовано систему розв'язувальних рівнянь. Знайдено розв'язки цих рівнянь у замкнутій формі, що дозволяють встановити поля розподілу термонапружень у цементобетоні, а також місця локалізації та характер його пошкоджень.

5.2.2 Охолодження води в капілярах до нульової температури

Завдання про моделювання термопружного напруженого стану цементобетону 1 з циліндричним капіляром 2 (рис. 5.4) будемо формулювати в припущенні, що капіляр повністю заповнений водою і у вихідному стані цементобетон настільки переднапружений в околі капіляра стискаючими силами, що при можливому термічному зменшенні об'єму охолоджуваної води відбувається зняття вихідних деформацій та напружень у системі, і капіляр продовжує залишатися повністю заповненим водою.

Термомеханічні характеристики цементобетону визначаються його модулем пружності E_1 , коефіцієнтом Пуассона ν_1 та коефіцієнтом лінійного термічного розширення α_1 . Вода вважається об'ємно нестиснутим середовищем з коефіцієнтом лінійного температурного розширення $\alpha_2(T)$, що залежить від її температури T .

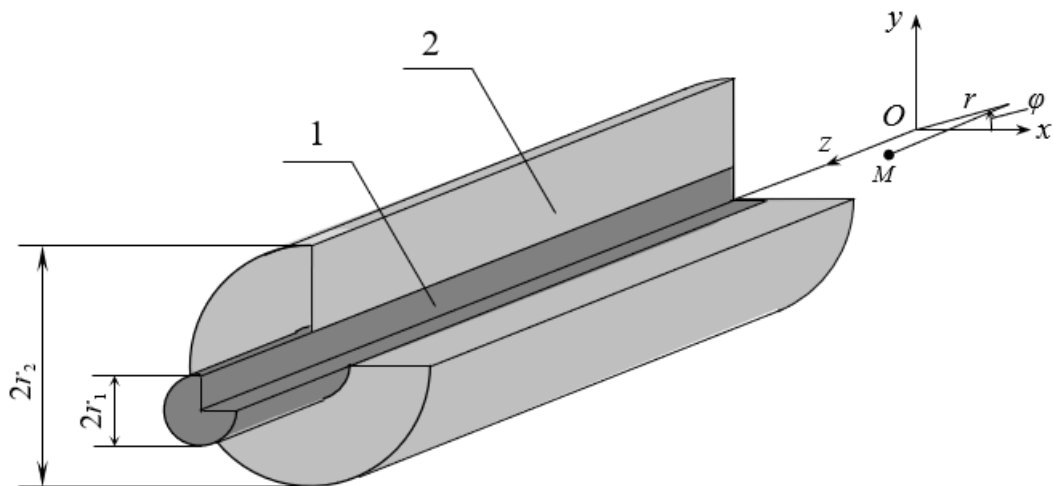


Рисунок 5.4 - Геометрична схема циліндричного капіляру 2
в пружному середовищі 1

Розглянемо випадок, коли температура системи стаціонарно змінюється на величину ΔT . Для розрахунку термодетформованого стану системи використовується циліндрична система координат $O r \varphi z$ (Рис. 5.17). Прийmemo, що радіус циліндричного капіляру 2 дорівнює r_1 , розміри середовища 1 необмежені у всіх напрямках, однак при формулюванні розв'язувальних рівнянь вважаємо, що в радіальному напрямку середовище обмежена циліндричною поверхнею $r = r_2$, радіус r_2 якої прямує до нескінченності.

При зміні температури на величину ΔT радіальні $(\sigma_r^{(1)}(r))$, колові $(\sigma_\varphi^{(1)}(r))$ і поздовжні $(\sigma_z^{(1)}(r))$ напруження отримують збільшення [32].

$$\begin{aligned}\Delta \sigma_r^{(1)}(r) &= (\lambda_1 + 2\mu_1)\Delta \varepsilon_r^{(1)} + \lambda_1(\Delta \varepsilon_\varphi^{(1)} + \Delta \varepsilon_z^{(1)}) - (3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_1 \Delta T; \\ \Delta \sigma_\varphi^{(1)}(r) &= (\lambda_1 + 2\mu_1)\Delta \varepsilon_\varphi^{(1)} + \lambda_1(\Delta \varepsilon_r^{(1)} + \Delta \varepsilon_z^{(1)}) - (3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_1 \Delta T; \\ \Delta \sigma_z^{(1)}(r) &= (\lambda_1 + 2\mu_1)\Delta \varepsilon_z^{(1)} + \lambda_1(\Delta \varepsilon_r^{(1)} + \Delta \varepsilon_\varphi^{(1)}) - (3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_1 \Delta T,\end{aligned}\tag{5.33}$$

де $\Delta\varepsilon_r^{(1)}, \Delta\varepsilon_\varphi^{(1)}, \Delta\varepsilon_z^{(1)}$ – відносні радіальна, колова та поздовжня деформації, відповідно.

У поздовжньому напрямку середовище 1 може вільно деформуватися, тому

$$\Delta\varepsilon_z^{(1)}(z) = \Delta\varepsilon_z^{(1)} = \alpha_1 \Delta T \quad (5.34)$$

та рівності (5.33) приводяться до вигляду

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_r^{(1)}(r) &= (\lambda_1 + 2\mu_1)\Delta\varepsilon_r^{(1)} + \lambda_1\Delta\varepsilon_\varphi^{(1)} - 2(\lambda_1 + \mu_1)\alpha_1\Delta T; \\ \Delta\sigma_\varphi^{(1)}(r) &= (\lambda_1 + 2\mu_1)\Delta\varepsilon_\varphi^{(1)} + \lambda_1\Delta\varepsilon_r^{(1)} - 2(\lambda_1 + \mu_1)\alpha_1\Delta T; \\ \Delta\sigma_z^{(1)}(r) &= \lambda_1(\Delta\varepsilon_r^{(1)} + \Delta\varepsilon_\varphi^{(1)}) - 2\lambda_1\alpha_1\Delta T. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Тут

$$\Delta\varepsilon_r^{(1)}(r) = \frac{d\Delta u^{(1)}}{dr}; \quad \Delta\varepsilon_\varphi^{(1)}(r) = \frac{\Delta u^{(1)}}{r}, \quad (5.36)$$

де $\Delta u^{(1)}(r)$ – радіальне переміщення елемента середовища 1.

Випишемо рівняння осесиметричної рівноваги елемента середовища 1 у радіальному напрямку

$$\frac{d\Delta\sigma_r^{(1)}}{dr} + \frac{\Delta\sigma_r^{(1)} - \Delta\sigma_\varphi^{(1)}}{r} = 0. \quad (5.37)$$

З урахуванням рівностей (5.35), (5.36) це рівняння перетворюється до

виду

$$\frac{d^2 \Delta u^{(1)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \Delta u^{(1)}}{dr} - \frac{1}{r^2} \Delta u^{(1)} = 0. \quad (5.38)$$

Зведемо його до форми, зручнішої для інтегрування

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \Delta u^{(1)}) \right] = 0. \quad (5.39)$$

В результаті його подвійного інтегрування отримуємо

$$\Delta u^{(1)}(r) = r C_1 + \frac{1}{r} C_2. \quad (5.40)$$

Константи C_1, C_2 , що входять сюди, визначаються з граничних умов

$$\begin{aligned} \Delta u^{(1)}(r_1) &= \Delta u^{(2)}(r_1); \\ \Delta \sigma_r^{(1)}(r_2) &\rightarrow 0 \text{ при } r_2 \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5.41)$$

З урахуванням рівностей (5.35) та (5.36) отримуємо

$$C_1 = \alpha_1 \Delta T; \quad C_2 = r_1^2 (\alpha_2 - \alpha_1) \Delta T. \quad (5.42)$$

Підставляючи ці значення у вираз (5.40) і потім (5.36) і (5.35), знаходимо функції напружено-деформованого стану середовища 1 при $r = r_1$.

$$\begin{aligned}
\Delta u^{(1)}(r) &= r\alpha_1\Delta T + \frac{r_1^2}{r}(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T; \\
\Delta \varepsilon_r^{(1)}(r) &= \alpha_1\Delta T - \frac{r_1^2}{r^2}(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T; \\
\Delta \varepsilon_\varphi^{(1)}(r) &= \alpha_1\Delta T + \frac{r_1^2}{r^2}(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T; \\
\Delta \varepsilon_z^{(1)}(r) &= \alpha_1\Delta T; \\
\Delta \sigma_r^{(1)}(r) &= -\frac{2r_1^2}{r^2}\mu_1(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T; \\
\Delta \sigma_\varphi^{(1)}(r) &= \frac{2r_1^2}{r^2}\mu_1(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T; \\
\Delta \sigma_z^{(1)}(r) &= 0.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Ці рівності дозволяють зробити висновки, що якщо $\alpha_1 = \alpha_2$, то пружне середовище 1 та вода 2 є термомеханічно сумісними, прирости термодформацій середовища 1 однакові у всіх напрямках і рівні $\alpha_1\Delta T$, при цьому всі термонапруження рівні нулю. Проте, якщо $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то додаткові збільшення термодформацій $\Delta \varepsilon_r^{(1)}(r)$ і $\Delta \varepsilon_\varphi^{(1)}(r)$ однакові за модулем, але мають протилежні знаки. Цією властивістю володіють і прирости напружень $\Delta \sigma_r^{(1)}(r)$ і $\Delta \sigma_\varphi^{(1)}(r)$. Це означає, що при будь-яких знаках різниці $(\alpha_2 - \alpha_1)$ та приросту ΔT один з цих приростів є стискаючим, інший – розтягуючим. Тому для крихких матеріалів (у тому числі і для цементобетону), які слабо опираються напруженням розтягування, при будь-яких знаках величин $(\alpha_2 - \alpha_1)$ і ΔT ці напруження обов'язково реалізуються. Причому вони зменшуються обернено пропорційно квадрату радіальної координати, тому викликані ними пошкодження мають локальний характер.

Знайдені прирости механічних параметрів (5.43) відображають їх зміни

за один крок ΔT зміни температури, протягом якого коефіцієнти $\alpha_1(T)$ і $\alpha_2(T)$ можна вважати постійними. Для середовища 1 величину $\alpha_1(T)$ можна вважати незмінною на всьому аналізованому діапазоні температури, для води коефіцієнт $\alpha_2(T)$ – змінний і при $T > 4^\circ C$ $\alpha_2(T) > 0$, при $T \approx 4^\circ C$ $\alpha_2 = 0$, при $0 < T < 4^\circ C$ $\alpha_2(T) < 0$ [26]. Тому моделювання температурного деформування цементобетону при охолодженні води в капілярах до нульової температури слід проводити покроково, підсумовуючи потім результати дискретних обчислень.

Проаналізуємо додаткову зміну термонапруженого стану цементобетонного середовища 1 з капіляром 2 при наближенні температури T системи до точки замерзання води $T = 0^\circ C$, починаючи з температури $T = +15^\circ C$. У цьому діапазоні змін температури термомеханічні параметри цементобетону не змінюються. Вони становлять $E_1 = 15 ГПа$, $\nu_1 = 0,2$ (або $\lambda_1 = 4,67 ГПа$, $\mu_1 = 6,25 ГПа$), $\alpha_1 = 0,1 \cdot 10^{-4} C^{-1}$, межа міцності при розтягуванні $[\sigma_{tens}^{(1)}] = 2 \div 5 МПа$, межа міцності при стисканні $[\sigma_{comp}^{(1)}] = 20 \div 40 МПа$. Значення коефіцієнтів лінійного розширення води α_2 наведено в табл. 5.14. Вони отримані на основі квадратичної інтерполяції їх реперних значень при $T = 0, 1, 4, 10$ та $15^\circ C$.

Додаткові термонапруження $(\sigma_{r,j}^{(1)}(r_1), \sigma_{\phi,j}^{(1)}(r_1))$ на поверхні $r = r_1$ в середовищі 1 в результаті падіння температури від $T_0 = 15^\circ C$ до $T_j = T_0 - j\Delta T$ ($0 \leq j \leq 15$) можна наближено обчислити за допомогою додавання їх приростів (11) з кроком $\Delta T = -1^\circ C$

$$\begin{aligned}\sigma_{r,j}^{(1)}(r_1) &= \sum_{k=0}^j \left[-2\mu_1(\alpha_2(T_k) - \alpha_1)(-1) \right]; \\ \sigma_{\phi,j}^{(1)}(r_1) &= \sum_{k=0}^j \left[2\mu_1(\alpha_2(T_k) - \alpha_1)(-1) \right].\end{aligned}\quad (5.44)$$

В табл. 5.2 також наведено значення приростів термонапружень $\Delta\sigma_{r,i}^{(1)}$, $\Delta\sigma_{\phi,i}^{(1)}$ та їх накопичених величин $\sigma_{r,i}^{(1)}$, $\sigma_{\phi,i}^{(1)}$ на кожному кроці зміни температури T

Таблиця 5.2 – Вихідні дані $\alpha_2(T)$ та результати розрахунку приростів ($\Delta\sigma_{r,j}^{(1)}$, $\Delta\sigma_{\phi,j}^{(1)}$) та накопичених ($\sigma_{r,j}^{(1)}$, $\sigma_{\phi,j}^{(1)}$) термонапружень

i	$T_i, ^\circ C$	$10^4\alpha_2, ^\circ C^{-1}$	$\Delta\sigma_{r,j}^{(1)}, МПа$	$\Delta\sigma_{\phi,j}^{(1)}, МПа$	$\sigma_{r,j}^{(1)}, МПа$	$\sigma_{\phi,j}^{(1)}, МПа$
0	15	0,503	0,5037	-0,5037	0,5037	-0,5037
1	14	0,464	0,4550	-0,4550	0,9587	-0,9587
2	13	0,423	0,4037	-0,4037	1,362	-1,362
3	12	0,381	0,3512	-0,3512	1,714	-1,714
4	11	0,338	0,2975	-0,2975	2,011	-2,011
5	10	0,293	0,2412	-0,2415	2,252	-2,252
6	9	0,243	0,1787	-0,1787	2,431	-2,431
7	8	0,201	0,1262	-0,1262	2,557	-2,557
8	7	0,153	0,0662	-0,0662	2,623	-2,623
9	6	0,103	0,0375	-0,0375	2,661	-2,661
10	5	0,053	-0,1184	0,1184	2,542	-2,542
11	4	0,001	-0,1249	0,1249	2,418	-2,418
12	3	-0,049	-0,1311	0,1311	2,286	-2,286
13	2	-0,105	-1,381	1,381	0,9050	-0,9050
14	1	-0,170	-1,462	1,462	-0,5570	0,5570
15	0,1	-0,227	-1,533	1,533	-2,090	2,090

Можна бачити, що вони співрозмірні зі значеннями межі міцності цементобетону при розтягуванні. Крім того, цікава перебудова полів напружень, викликана зміною знаку функції $\alpha_2(T)$ при $T \approx 4^\circ C$.

5.2.3 Деформування пружного середовища при заморожуванні води в його капілярі

При $T = 0^\circ C$ видалення тепла із системи із збереженням нульової температури супроводжуватиметься перетворенням води на лід та його розширенням. Проте лід, на відміну від води, є пружним середовищем, що стискається, тому збільшення обсягу замерзаючої води в капілярі буде також супроводжуватися його попутним зменшенням внаслідок контактної взаємодії з пружним середовищем 1. Тому в деформованому стані рівновага системи описується двома рівняннями виду (5.37)

$$\frac{d\Delta\sigma_r^{(i)}}{dr} + \frac{\Delta\sigma_r^{(i)} - \Delta\sigma_\varphi^{(i)}}{r} = 0; \quad (i=1,2), \quad (5.45)$$

де значення $i=1$ відповідає пружному середовищу 1, значення $i=2$ – пружному льодяному тілу.

Оскільки процес кристалізації льоду відбувається за постійної температури, то $\Delta T = 0$ й замість рівностей (5.35) маємо

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_r^{(i)}(r) &= (\lambda_i + 2\mu_i)\Delta\varepsilon_{r,el}^{(i)} + \lambda_i\Delta\varepsilon_{\varphi,el}^{(i)}; \\ \Delta\sigma_\varphi^{(i)}(r) &= (\lambda_i + 2\mu_i)\Delta\varepsilon_{\varphi,el}^{(i)} + \lambda_i\Delta\varepsilon_{r,el}^{(i)}; \\ \Delta\sigma_z^{(i)}(r) &= 0; \end{aligned} \quad (i=1,2). \quad (5.46)$$

Тут $\Delta\varepsilon_{r,el}^{(i)}(r)$, $\Delta\varepsilon_{\varphi,el}^{(i)}(r)$ – радіальні та колові пружні деформації середовища 1 та тіла 2. Для середовища 1 деформації $\Delta\varepsilon_{r,el}^{(1)}(r)$, $\Delta\varepsilon_{\varphi,el}^{(1)}(r)$ дорівнюють її повним деформаціям $\Delta\varepsilon_{r,tot}^{(1)}(r)$, $\Delta\varepsilon_{\varphi,tot}^{(1)}(r)$ і вони підраховуються за формулами

$$\Delta\varepsilon_{r,el}^{(1)} = \Delta\varepsilon_{r,tot}^{(1)} = \frac{d\Delta u^{(1)}}{dr}; \quad \varepsilon_{\varphi,el}^{(1)} = \Delta\varepsilon_{\varphi,tot}^{(1)} = \frac{\Delta u^{(1)}}{r}. \quad (5.47)$$

Для льоду повні деформації $\Delta\varepsilon_{r,tot}^{(2)}(r)$, $\Delta\varepsilon_{\varphi,tot}^{(2)}(r)$ складаються з деформацій $\Delta\varepsilon_{r,exp}^{(2)}(r)$, $\Delta\varepsilon_{\varphi,exp}^{(2)}(r)$, викликаних розширенням льоду при його кристалізації та пружних деформацій $\Delta\varepsilon_{r,el}^{(2)}(r)$, $\Delta\varepsilon_{\varphi,el}^{(2)}(r)$, обумовлених пружною взаємодією тіла 1 та середовища 2.

Величини $\Delta\varepsilon_{r,exp}^{(2)}(r) = \Delta\varepsilon_{\varphi,exp}^{(2)}(r)$ дорівнюють коефіцієнту $\alpha_{fr} \approx 0,03$ лінійного розширення замерзаючого льоду, який визначається за допомогою рівності $\alpha_{fr} \approx \beta_{fr}/3$ через об'ємний коефіцієнт розширення $\beta_{fr} \approx 0,09$. Тоді маємо співвідношення

$$\Delta\varepsilon_{r,tot}^{(2)} = \Delta\varepsilon_{r,el}^{(2)} + 0,03 = \frac{d\Delta u^{(2)}}{dr}; \quad \Delta\varepsilon_{\varphi,tot}^{(2)} = \Delta\varepsilon_{\varphi,el}^{(2)} + 0,03 = \frac{\Delta u^{(2)}}{r}, \quad (5.48)$$

з яких знаходимо відносні пружні деформації

$$\Delta\varepsilon_{r,el}^{(2)} = \frac{d\Delta u^{(2)}}{dr} - 0,03; \quad \Delta\varepsilon_{\varphi,el}^{(2)} = \frac{\Delta u^{(2)}}{r} - 0,03. \quad (5.49)$$

Маючи рівності (5.47), (5.49), на підставі формул (5.46) маємо

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma_r^{(1)}(r) &= (\lambda_1 + 2\mu_1) \frac{d\Delta u^{(1)}}{dr} + \lambda_1 \frac{\Delta u^{(1)}}{r}; \\
\Delta\sigma_\varphi^{(1)}(r) &= (\lambda_1 + 2\mu_1) \frac{\Delta u^{(1)}}{r} + \lambda_1 \frac{d\Delta u^{(1)}}{dr}; \\
\Delta\sigma_r^{(2)}(r) &= (\lambda_2 + 2\mu_2) \frac{d\Delta u^{(2)}}{dr} + \lambda_2 \frac{\Delta u^{(2)}}{r} - 0,06(\lambda_2 + \mu_2); \\
\Delta\sigma_\varphi^{(2)}(r) &= (\lambda_2 + 2\mu_2) \frac{\Delta u^{(2)}}{r} + \lambda_2 \frac{d\Delta u^{(2)}}{dr} - 0,06(\lambda_2 + \mu_2).
\end{aligned} \tag{5.50}$$

Підставляючи праві частини рівностей (5.50) у рівняння (5.45), після деяких перетворень отримаємо розв'язувальну систему двох однорідних рівнянь

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \Delta u^{(i)}) \right] = 0; \quad (i=1,2). \tag{5.51}$$

Вона має загальний розв'язок

$$\Delta u^{(1)}(r) = rC_1 + \frac{1}{r}C_2; \quad \Delta u^{(2)}(r) = rC_3 + \frac{1}{r}C_4, \tag{5.52}$$

у якому константи C_1, C_2, C_3, C_4 знаходяться із граничних умов

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma_r^{(1)}(r_2) &= 0 \quad \text{при} \quad r_2 \rightarrow \infty; \\
\Delta u^{(2)}(0) &= 0,
\end{aligned} \tag{5.53}$$

та умов сполучення переміщень та напружень на контактній поверхні $r = r_1$

$$\begin{aligned}
\Delta u^{(1)}(r_1) &= \Delta u^{(2)}(r_1); \\
\Delta\sigma_r^{(1)}(r_1) &= \Delta\sigma_r^{(2)}(r_1).
\end{aligned} \tag{5.54}$$

З умов (5.53) випливає

$$C_1 = 0; \quad C_4 = 0. \quad (5.55)$$

За допомогою цих рівностей та системи (5.54) отримуємо

$$C_2 = r_1^2 \cdot \frac{0,03(\lambda_2 + \mu_2)}{\mu_1 + \lambda_2 + \mu_2}; \quad C_3 = \frac{0,03(\lambda_2 + \mu_2)}{\mu_1 + \lambda_2 + \mu_2}. \quad (5.56)$$

Знайдені значення констант C_1, C_2, C_3, C_4 дозволяють побудувати функції переміщень

$$\Delta u^{(1)}(r) = \frac{r_1^2}{r} \cdot \frac{0,03(\lambda_2 + \mu_2)}{\mu_1 + \lambda_2 + \mu_2}; \quad \Delta u^{(2)}(r) = r \cdot \frac{0,03(\lambda_2 + \mu_2)}{\mu_1 + \lambda_2 + \mu_2} \quad (5.57)$$

та напружень

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_r^{(1)}(r) &= -\frac{r_1^2}{r^2} \cdot \frac{0,06 \cdot \mu_1(\lambda_2 + \mu_2)}{\mu_1 + \lambda_2 + \mu_2}; \quad (r \geq r_1); \\ \Delta \sigma_\varphi^{(1)}(r) &= \frac{r_1^2}{r^2} \cdot \frac{0,06 \cdot \mu_1(\lambda_2 + \mu_2)}{\mu_1 + \lambda_2 + \mu_2}; \quad (r \geq r_1); \\ \Delta \sigma_r^{(2)}(r) &= -\frac{0,06 \cdot \mu_1(\lambda_2 + \mu_2)}{\mu_1 + \lambda_2 + \mu_2}; \quad (0 \leq r \leq r_1); \\ \Delta \sigma_\varphi^{(2)}(r) &= -\frac{0,06 \cdot \mu_1(\lambda_2 + \mu_2)}{\mu_1 + \lambda_2 + \mu_2}; \quad (0 \leq r \leq r_1). \end{aligned} \quad (5.58)$$

Виразимо формули (5.57), (5.58) також через модулі пружності E_i та коефіцієнти Пуассона ν_i середовищ $i=1,2$ за допомогою рівностей

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (5.59)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \Delta u^{(1)}(r) &= \frac{r_1^2}{r} \cdot \frac{0,03E_2(1+\nu_1)}{[E_1(1+\nu_2)(1-2\nu_2) + E_2(1+\nu_1)]}; \quad (r \geq r_1); \\ \Delta u^{(2)}(r) &= r \cdot \frac{0,03E_2(1+\nu_1)}{[E_1(1+\nu_2)(1-2\nu_2) + E_2(1+\nu_1)]}; \quad (0 \leq r \leq r_1); \\ \Delta \sigma_r^{(1)}(r) &= -\frac{r_1^2}{r^2} \cdot \frac{0,03E_1E_2}{[E_1(1+\nu_2)(1-2\nu_2) + E_2(1+\nu_1)]}; \quad (r \geq r_1); \\ \Delta \sigma_\varphi^{(1)}(r) &= \frac{r_1^2}{r^2} \cdot \frac{0,03E_1E_2}{[E_1(1+\nu_2)(1-2\nu_2) + E_2(1+\nu_1)]}; \quad (r \geq r_1); \\ \Delta \sigma_r^{(2)}(r) &= -\frac{0,03E_1E_2}{[E_1(1+\nu_2)(1-2\nu_2) + E_2(1+\nu_1)]}; \quad (0 \leq r \leq r_1); \\ \Delta \sigma_\varphi^{(2)}(r) &= -\frac{0,03E_1E_2}{[E_1(1+\nu_2)(1-2\nu_2) + E_2(1+\nu_1)]}; \quad (0 \leq r \leq r_1). \end{aligned} \quad (5.60)$$

Можна помітити, що напруження $\Delta \sigma_r^{(1)}(r), \Delta \sigma_\varphi^{(1)}(r)$, викликані розширенням льоду при заморожуванні, відрізняються лише знаками, вони мають найбільші значення на контактній поверхні $r = r_1$ і зменшуються обернено пропорційно квадрату радіальної координати r . При цьому колове напруження $\Delta \sigma_\varphi^{(1)}(r)$ є розтягуючими. Це означає, що вони є причиною руйнування середовища 1 навколо поверхні контакту і призводять до появи радіальних тріщин. При цьому напруження $\Delta \sigma_r^{(2)}(r), \Delta \sigma_\varphi^{(2)}(r)$ від'ємні, однакові і не залежить від r .

Проведене моделювання заморожування води в капілярі виконано у припущенні, що вона його повністю заповнює. Однак, якщо це заповнення неповне, потрібно мати на увазі, що силова взаємодія середовища 1 і льоду 2

можлива тільки, якщо об'єм води в капілярі V_{wat} перевищує 91% об'єму V_{cap} самого капіляру. У цьому випадку значення величини α_{fr} необхідно підраховувати за формулою

$$\alpha_{fr} \approx \frac{V_{wat}(1 + 0,09) - V_{cap}}{3 \cdot V_{cap}}. \quad (5.61)$$

При цьому $\alpha_{fr} < 0,03$ і ефект заморожування води виявиться менш руйнівним.

Значення приростів напружень $\Delta\sigma_r^{(1)}(r_1), \Delta\sigma_\phi^{(1)}(r_1)$ в цементобетоні на поверхні $r = r_1$ в результаті заморожування води при різних рівнях V_{wat}/V_{cap} наповнення нею капіляра обчислені при термомеханічних параметрах системи: $E_1 = 15 ГПа$, $\nu_1 = 0,2$, $\alpha_1 = 0,1 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $[\sigma_{tens}^{(1)}] = 2 \div 5 МПа$, $[\sigma_{comp}^{(1)}] = 20 \div 40 МПа$; $E_2 = 8 ГПа$, $\nu_2 = 0,35$, $\alpha_2 = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $[\sigma_{tens}^{(2)}] = 1,11 МПа$. Їхні величини наведені в табл. 5.3.

Таблиця 5.3 – Значення приростів контактних напружень в середовищі цементобетону внаслідок замерзання води в його капілярі

	V_{wat}/V_{cap}	α_{fr}	$\Delta\sigma_r^{(1)}(r_1), МПа$	$\Delta\sigma_\phi^{(1)}(r_1), МПа$
1	1	0,03	-229,7	229,7
2	0,99	0,0264	-202,1	202,1
3	0,98	0,0227	-173,8	173,8
4	0,97	0,0191	-146,2	146,2
5	0,96	0,0155	-118,7	118,7
6	0,95	0,0118	-90,34	90,34
7	0,94	0,0082	-67,78	67,78
8	0,93	0,00456	-34,91	34,91
9	0,92	0,00093	-7,12	7,12

Аналіз цих даних дозволяє зробити висновок, що при будь-якому

заповненні капіляра водою, що перевищує 91%, колові напруження $\sigma_{\varphi}^{(1)}(r_1)$ є розтягуючими і перевищують межу міцності цементобетону. Якщо $V_{wat}/V_{cap} \leq 0,91$, то це напруження дорівнює нулю.

5.2.4 Термосилова взаємодія пружного середовища з льодом у капілярі при подальшому зниженні температури

При подальшому зниженні температури на величину ΔT після замерзання води в капілярі, і при цьому якщо вода не повністю заповнювала його і пошкодження середовища 1 не відбулося, то матеріали 1 і 2 поведуться як цілком пружні тіла. У цьому випадку термопружне деформування системи залежить від співвідношення між параметрами термопружності $\lambda_i, \mu_i, \alpha_i$ ($i=1,2$) її компонент.

Як і раніше, зміна деформованого стану системи визначається приростами переміщень $\Delta u^{(1)}(r)$, $\Delta u^{(2)}(r)$, за допомогою яких обчислюються прирости відносних деформацій [188]

$$\Delta \varepsilon_r^{(i)}(r) = \frac{d\Delta u^{(i)}}{dr}; \quad \Delta \varepsilon_{\varphi}^{(i)}(r) = \frac{\Delta u^{(i)}}{r}; \quad (i=1,2), \quad (5.62)$$

а потім і прирости термонапружень

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_r^{(i)}(r) &= (\lambda_i + 2\mu_i) \frac{d\Delta u^{(i)}}{dr} + \lambda_i \frac{\Delta u^{(i)}}{r} - (3\lambda_i + 2\mu_i) \lambda_i \Delta T; \\ \Delta \sigma_{\varphi}^{(i)}(r) &= (\lambda_i + 2\mu_i) \frac{\Delta u^{(i)}}{r} + \lambda_i \frac{d\Delta u^{(i)}}{dr} - (3\lambda_i + 2\mu_i) \lambda_i \Delta T; \quad (i=1,2). \end{aligned} \quad (5.63)$$

З їх допомогою рівняння рівноваги (5.45) знову приводяться до

системи

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \Delta u^{(i)}) \right] = 0; \quad (i=1,2), \quad (5.64)$$

яка має розв'язок

$$\Delta u^{(1)}(r) = rC_1 + \frac{1}{r}C_2, \quad \Delta u^{(2)}(r) = rC_3 + \frac{1}{r}C_4. \quad (5.164)$$

Невідомі константи C_1, C_2, C_3, C_4 знову знаходяться із умов (5.53), (5.54), але цього разу вони мають значення

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{(3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_1 \Delta T}{2(\lambda_1 + \mu_1)}; \\ C_2 &= \frac{r_1^2 \left[-(3\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)\alpha_1 + (3\lambda_2 + 2\mu_2)(\lambda_1 + \mu_1)\alpha_2 \right] \Delta T}{2(\lambda_1 + \mu_1)(\mu_1 + \lambda_2 + \mu_2)}; \\ C_3 &= \frac{\left[\mu_1(3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_1 + (\lambda_1 + \mu_1)(3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2 \right] \Delta T}{2(\lambda_1 + \mu_1)(\mu_1 + \lambda_2 + \mu_2)}; \\ C_4 &= 0. \end{aligned} \quad (5.66)$$

За допомогою цих значень та формул (5.65) знаходимо функцію переміщень у середовищі 1

$$\begin{aligned} \Delta u^{(1)}(r) &= \frac{r(3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_1 \Delta T}{2(\lambda_1 + \mu_1)} + \\ &+ \frac{r_1^2 \left[-(3\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)\alpha_1 + (3\lambda_2 + 2\mu_2)(\lambda_1 + \mu_1)\alpha_2 \right] \Delta T}{2(\lambda_1 + \mu_1)(\mu_1 + \lambda_2 + \mu_2)}; \quad (r \geq r_1). \end{aligned} \quad (5.67)$$

У правій частині цієї рівності перший доданок зумовлений вільним термічним розширенням середовища 1, другий доданок викликаний контактним температурним впливом тіла 2 на середовище 1.

Функція радіального термічного переміщення тіла 2 має вигляд

$$\Delta u^{(2)}(r) = \frac{r \left[\mu_1 (3\lambda_1 + 2\mu_1) \alpha_1 + (\lambda_1 + \mu_1) (3\lambda_2 + 2\mu_2) \alpha_2 \right] \Delta T}{2(\lambda_1 + \mu_1)(\mu_1 + \lambda_2 + \mu_2)}; \quad (0 \leq r \leq r_1). \quad (5.68)$$

Наведемо вирази для напруження в середовищі 1

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_r^{(1)}(r) &= \frac{r_1^2}{r^2} \cdot \frac{\mu_1 \left[(3\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + \mu_2) \alpha_1 - (3\lambda_2 + 2\mu_2)(\lambda_1 + \mu_1) \alpha_2 \right] \Delta T}{(\lambda_1 + \mu_1)(\mu_1 + \lambda_2 + \mu_2)}; \\ \Delta \sigma_\varphi^{(1)}(r) &= -\frac{r_1^2}{r^2} \cdot \frac{\mu_1 \left[(3\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + \mu_2) \alpha_1 - (3\lambda_2 + 2\mu_2)(\lambda_1 + \mu_1) \alpha_2 \right] \Delta T}{(\lambda_1 + \mu_1)(\mu_1 + \lambda_2 + \mu_2)}; \end{aligned} \quad (5.69)$$

$(r \geq r_1),$

та в тілі 2

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_r^{(2)}(r) &= \Delta \sigma_\varphi^{(2)}(r) = \\ &= \frac{\mu_1 \left[(3\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + \mu_2) \alpha_1 - (3\lambda_2 + 2\mu_2)(\lambda_1 + \mu_1) \alpha_2 \right] \Delta T}{(\lambda_1 + \mu_1)(\mu_1 + \lambda_2 + \mu_2)}; \end{aligned} \quad (5.70)$$

$(0 \leq r \leq r_1).$

Як і в попередніх випадках, напруження $\Delta \sigma_r^{(1)}(r)$, $\Delta \sigma_\varphi^{(1)}(r)$ рівні за модулем і мають різні знаки. Це означає, що при будь-яких знаках приросту ΔT і співвідношеннях між α_1 і α_2 одне із цих напружень є стискаючим, інше

– розтягуючим. Причому вони локалізуються на поверхні $r = r_1$ і спадають обернено пропорційно квадрату радіальної координати r . Ці властивості важливо брати до уваги у випадках, коли середовище 1 погано опирається напруженням, що розтягують, наприклад, для крихких матеріалів типу цементобетону.

Нехай температура системи знизилася з $T_0 = 0^\circ \text{C}$ до $\Delta T = -10^\circ \text{C}$. Можна вважати, що в цьому діапазоні значення термомеханічних параметрів середовища 1 і тіла 2 залишаються незмінними і рівні значенням, наведеним в попередньому розділі. У цьому випадку прирости напружень (5.69), (5.70) складають:

$$\Delta \sigma_r^{(1)}(r_1) = 4,214 \text{ МПа}, \quad \Delta \sigma_\phi^{(1)}(r_1) = -4,214 \text{ МПа},$$

$$\Delta \sigma_r^{(2)}(r_1) = \Delta \sigma_\phi^{(2)}(r_1) = 4,214 \text{ МПа}.$$

Як видно, вони мають протилежні знаки в порівнянні з напруженнями, наведеними в табл. 5.3, і набагато менше їх за абсолютною величиною. Тому якщо пошкодження, викликані заморожуванням води в капілярі, не є критичними, то подальше зниження температури призводить до розвантаження полів напружень.

Відзначимо також, що отримані результати ґрунтуються на використанні ідеальної циліндричної моделі геометрії капіляра. Насправді капіляри мають менш регулярну структуру, де контактні термонапруження зростають ще більше.

5.3 Висновки до розділу 5

У розділі 5 поставлені задачі про теоретичне дослідження еволюції полів термонапружень в пружному середовищі конструкційних матеріалів з порожнинами, частково або повністю заповнених водою, на етапах зниження загальної температури до нуля градусів за Цельсієм, перетворення води на

лід при нулі градусів і подальшого зниження температури системи.

1. Сформульовані розв'язувальні рівняння деформування пружного середовища конструкційних матеріалів зі сферичною порожниною заповненою водою. Враховані ефекти нестисливості води, збільшення об'єму льоду при її замерзанні та вплив несумісності термомеханічних параметрів фаз системи на виникнення в ній термонапружень.

В замкненій формі побудовані розв'язки поставленої задачі. Встановлено, що термонапруження, які виникають в результаті еволюції температури в пружному середовищі, концентруються в малому околі поверхні пори та спадають обернено пропорційно кубу радіальної координати. При цьому радіальні напруження в два рази більші колових термонапружень і вони мають різні знаки, що може особливо негативно впливати на морозостійкість крихких матеріалів, що слабо опираються напруженням розтягування, які обов'язково мають місце.

Досліджені приклади появи термонапружень розтягування та стиснення, що викликані ефектом збільшення об'єму льоду при замерзанні води в порах в цементо- та асфальтобетонних будівельних матеріалах. Показано, що при міцності цементобетону при стисканні за температури від $+15^{\circ}\text{C}$ до 0°C $[\sigma_{1,comp}] = 20 \div 40$ МПа, обчислені локальні напруження, викликані замерзанням води в сферичній порі, складають $\sigma_{r,fr}^{(1)}(R) = -378,947$ МПа, $\sigma_{\varphi,fr}^{(1)}(R) = \sigma_{\theta,fr}^{(1)}(R) = 189,474$ МПа, $\sigma_{r,fr}^{(2)}(R) = \sigma_{\varphi,fr}^{(2)}(R) = \sigma_{\theta,fr}^{(2)}(R) = -378,947$ МПа, що набагато перевищують їх межі міцності. Ситуація повторюється і у випадку асфальтобетону, границя міцності якого при $T = 0^{\circ}\text{C}$ доходить до 12 МПа в той час, коли знайдені локальні напруження, викликані замерзанням води, складають $\sigma_{r,fr}^{(1)}(R) = -526,027$ МПа, $\sigma_{\varphi,fr}^{(1)}(R) = \sigma_{\theta,fr}^{(1)}(R) = 263,014$ МПа, $\sigma_{r,fr}^{(2)}(R) = \sigma_{\varphi,fr}^{(2)}(R) = \sigma_{\theta,fr}^{(2)}(R) = -526,027$ МПа. При цьому, концентрація напружень як в цементобетоні так і в асфальтобетоні (а тому і викликані

ними руйнування) спадають обернено пропорційно кубу радіальної координати та в зв'язку з цим мають локальний (прихований) характер в зоні граничної поверхні пори, однак при повторних актах заморожування-відтавання вони можуть суттєво знижувати морозостійкість системи.

2. Досліджена проблема зародження термонапружень в цементобетонному середовищі в околі капіляра, частково або повністю заповненого водою. На основі теорії термопружності, для циліндричної моделі капіляра, сформульовані системи звичайних диференціальних рівнянь термодформування двофазних середовищ на трьох розглянутих етапах зміни температури. Враховано термомеханічні властивості води, які полягають в залежності її коефіцієнта лінійного термічного розширення від температури, її нестисливості та суттєвого збільшення об'єму при перетворенні на лід. Для цих рівнянь побудовано розв'язки у замкнутій формі, які визначають поля термопереміщень, деформацій та напружень.

Аналіз побудованих розв'язків свідчить про те, що на всіх етапах зміни температури термонапруження, що виникають в цементобетонному середовищі, концентруються в малому околі поверхні контакту і зменшуються обернено пропорційно квадрату радіальної координати. Функції радіальних та колових термонапружень рівні за модулем, але мають протилежні знаки. У зв'язку з цим на будь-яких етапах зміни температури одне з цих напружень є розтягуючим, що є основною причиною можливого локального тріщиноутворення та виникнення пошкоджень.

Встановлено, що практично за будь-яких обсягів заповнення капіляра водою, що перевищують 91%, локальні контактні напруження в цементобетоні, викликані утворенням льоду, набагато перевершують його межу міцності і призводять до його локального руйнування.

3. Результати досліджень даного розділу викладено у наступних публікаціях [13, 68, 70, 77, 150].

РОЗДІЛ 6

КОНЦЕНТРАЦІЯ ТЕРМОНАПРУЖЕНЬ В ПОЛІМЕРНИХ МАТЕРІАЛАХ, ЩО АРМОВАНІ КАРБОНОВИМИ НАНОТРУБКАМИ ТА ФУЛЕРЕНАМИ

6.1 Спиральне випинання нанотрубок, попередньо напружених крутним моментом і осьовою силою

6.1.1 Аналіз проблеми

Вуглецеві нанотрубки викликають значний інтерес у фізиці, хімії та механіці матеріалів завдяки надзвичайно високій твердості та міцності, лінійно-пружній деформованості до 12%, унікальним властивостям тепло- та електропровідності, стійкості до хімічних впливів. Завдяки цим якостям їх починають все ширше використовувати в електроніці, техніці, композитних матеріалах, медицині. Крім того, вони можуть використовуватися як армуючі волокна в еластичних середовищах, так і окремо. Тому продовжують залишатися актуальними не тільки питання встановлення їх загальних фізичних властивостей, а й особливостей їх механічної поведінки у складі різноманітних структур. Останніми роками значний інтерес приділяється вивченню прогину та коливань одностінних і багатостінних наностержнів і нанобалок під дією осьових сил, а також згинних моментів. У цих випадках використовувалися моделі, засновані на методах молекулярної динаміки і механіки пружних стрижневих і оболонкових структур. За допомогою першого вдавалося встановити загальні геометричні, структурні та механічні характеристики нанотрубок, за допомогою яких потім вивчали особливості їх механічної поведінки. Серед монографій, присвячених технології та механіці

нанотрубок, можна відзначити публікації [86, 99, 102, 121, 122, 127, 129, 139, 144, 158, 159, 164, 195, 242, 272]. Певного кола проблем вібрацій, вигину та перехідних динамічних процесів висвітлено в монографії [129]. Вільні коливання одно-, дво- та тристінних нанотрубок досліджувалися також у публікаціях [96, 100, 126, 216, 228, 256, 262, 263]. Результати експериментальних досліджень вільних коливань також представлені в [96]. У роботах [177, 178, 229, 263] теорія оболонок використовується для аналізу коливань саме щодо застосовності або відсутності теорії оболонок Доннелла. У [274, 275] розглядається стійкість шаруватих оболонок. Прогинання нанотрубок вивчається в роботах [130, 131, 171, 224, 249]. Коливання та стабільність обертових нанотрубок проаналізовано в статті [273]. У публікаціях [90, 119, 136] досліджено коливання композитних структур, що містять нанотрубки. Як правило, при аналізі динаміки нанотрубок вибиралися їх прямолінійні моделі, хоча часто під час виробництва вони виявлялися вигнутими, і для додання їм прямолінійної форми їх потрібно було попередньо напружити поздовжньою розтягуючою силою.

Як показує аналіз публікацій, на сьогодні питання дослідження випинання нанотрубок при одночасній дії осьової сили (розтягнення або стискання) і крутного моменту до кінця не вивчені.

У цьому напрямку можна відзначити роботу Грінхілла [147], що стосується стійкості пружних закручених стрижнів. Стійкість закручених стрижнів із зацмеленим одним кінцем і вільним іншим вивчена у статті [93]. У [155] виконано комп'ютерне моделювання довгих трубчастих стрижнів, напружених розтягуючими і стискаючими осьовими силами і крутними моментами щодо колон глибокого буріння, які обертаються. Установлено, що при втраті стійкості їх осьові лінії набувають форм спіральних кривих.

Аналіз стійкості нанотрубок під дією крутних моментів у науковій

літературі пов'язаний переважно з їх моделюванням на базі оболонкових моделей, у яких вісь трубки залишається прямолінійною, а втрата стійкості відбувається у результаті локального випинання стінки трубки й утворення на її поверхні спіральних гофрів. Очевидно, такі форми випинання властиві трубкам чималого діаметра, які додатково піддані дії осьових розтягуючих сил. У загальному випадку перевірку стійкості нанотрубки необхідно проводити в глобальній постановці з урахуванням можливості випинання її осьової лінії. Особливість такого підходу полягає у виявленні критичних станів системи, коли однорідна система диференціальних рівнянь поряд із тривіальними розв'язками має і нетривіальні. При цьому власні значення рівняння визначають критичні навантаження, а власні форми характеризують форму випинання.

6.1.2 Виведення рівнянь термодформування згинних коливань нанотрубок.

Розглянемо прямолінійну одношарову нанотрубку довжиною l кругового перерізу з внутрішнім R_1 і зовнішнім R_2 радіусами її стінки. На кінцях трубка має шарнірні опори. Введемо систему координат таким чином, щоб початок координат $Oxyz$ збігався з лівим кінцем трубки, а вісь Oz направимо вздовж її осі. На кінцях трубки прикладено поздовжня сила T і крутний момент M_z . Силу T вважаємо додатною, якщо вона є розтягуючою, момент M_z вважаємо додатним, якщо він діє проти ходу годинникової стрілки, дивлячись з кінця осі Oz .

Приймемо, що кут кіральності атомної решітки стінки нанотрубки рівний нулю або $\pi/2$ й її жорсткості при вигинанні та крученні не залежать

від напрямів їх дії. Припускаючи, що момент інерції трубки

$$I = \pi(R_2^4 - R_1^4)/4, \quad (6.1)$$

її довжина l , модуль пружності E матеріалу і сила T задані, обчислимо критичні значення моменту M_z^{kp} та біфуркаційну форму.

Позначимо $u(z)$, $v(z)$ – пружні переміщення осьової лінії трубки в деформованому стані та прийmemo, що вони паралельні осям Ox і Oy відповідно. Тоді згинні моменти в площині Oxz , збурені силою T і моментом M_z будуть рівними Tu і $M_z \frac{dv}{dz}$, в площині Oyz – Tv і $-M_z \frac{du}{dz}$. У цьому випадку рівняння осьової лінії в деформованому стані визначається двома рівняннями [142]

$$\begin{aligned} EIu'' - Tu - M_z v' &= 0; \\ EIV'' - Tv + M_z u' &= 0, \end{aligned} \quad (6.2)$$

де штрихом позначено диференціювання по z .

На кінцях $z = 0$, $z = l$ функції $u(z)$, $v(z)$ повинні приймати значення:

$$u(0) = u(l) = 0, \quad v(0) = v(l) = 0. \quad (6.3)$$

Безпосередньою подальшою підстановкою можемо впевнитись, що система (6.2), (6.1) має наступний розв'язок:

$$\begin{aligned} u(z) &= A \cos \alpha_1 z + B \sin \alpha_1 z + C \cos \alpha_2 z + D \sin \alpha_2 z; \\ v(z) &= A \sin \alpha_1 z - B \cos \alpha_1 z + C \sin \alpha_2 z - D \cos \alpha_2 z. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Заміна $u(z)$ і $v(z)$ в (6.2) їх виразами (6.4) призводить до співвідношень

$$\begin{aligned} &-A \cos \alpha_1 (EI \alpha_1^2 + M_z \alpha_1 + T) - B \sin \alpha_1 (EI \alpha_1^2 + M_z \alpha_1 + T) - \\ &C \cos \alpha_2 (EI \alpha_2^2 + M_z \alpha_2 + T) - D \sin \alpha_2 (EI \alpha_2^2 + M_z \alpha_2 + T) = 0; \\ &-A \sin \alpha_1 (EI \alpha_1^2 + M_z \alpha_1 + T) + B \cos \alpha_1 (EI \alpha_1^2 + M_z \alpha_1 + T) - \\ &C \sin \alpha_2 (EI \alpha_2^2 + M_z \alpha_2 + T) + D \cos \alpha_2 (EI \alpha_2^2 + M_z \alpha_2 + T) = 0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Ці рівності справедливі, якщо числа α_1 і α_2 є коренями характеристичного рівняння [142]

$$EI \alpha^2 + M_z \alpha + T = 0. \quad (6.6)$$

У результаті отримаємо

$$\alpha_{1,2} = -\frac{M_z}{2EI} \pm \sqrt{\left(\frac{M_z}{2EI}\right)^2 - \frac{T}{EI}}. \quad (6.7)$$

Підстановка значень $u(z)$ і $v(z)$, визначених рівностями (6.4), в граничні умови (6.3) утворює систему для визначення констант A, B, C, D :

$$\begin{aligned}
A + C &= 0; & B + D &= 0; \\
A \cos \alpha_1 l + B \sin \alpha_1 l + C \cos \alpha_2 l + D \sin \alpha_2 l &= 0; \\
A \sin \alpha_1 l - B \cos \alpha_1 l + C \sin \alpha_2 l - D \cos \alpha_2 l &= 0.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Окрім нульових значень A, B, C, D система (6.8) має ненульові розв'язки, якщо визначник матриці її коефіцієнтів дорівнює нулю. Ця умова призводить до рівняння

$$\cos[(\alpha_2 - \alpha_1)l] = 1 \tag{6.9}$$

з розв'язками

$$(\alpha_2 - \alpha_1)l = 0, 2\pi, 4\pi, \dots \tag{6.10}$$

Нульовий розв'язок у (6.10) не має сенсу, оскільки виникає при $M_z = 0$, $T = 0$. Враховуючи рівності (6.7), другий розв'язок запишемо у вигляді

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \pm 2 \sqrt{\left(\frac{M_z}{2EI}\right)^2 - \frac{T}{EI}} = \frac{2\pi}{l}, \tag{6.11}$$

звідки можемо визначити критичне значення моменту

$$M_z^{kp} = 2\sqrt{EI} \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{l^2} + T}. \tag{6.12}$$

Цьому виразу можна надати іншу форму, якщо врахувати, що величина

$\pi^2 EI / l^2$ дорівнює ейлеровій силі стиснення T_{Euler} для розглянутої трубки. Тоді

$$M_z^{kp} = 2\sqrt{EI} \sqrt{T_{Euler} + T}. \quad (6.13)$$

Якщо рівність (6.11) розв'язати щодо T , отримаємо критичне значення стискаючої сили при заданому M_z [142]

$$T^{kp} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} - \frac{M_z^2}{4EI}. \quad (6.14)$$

Перший доданок у правій частині рівності (6.14) є ейлеровою критичною силою. Отже, якщо шарнірно опертому стрижню надати напруження крутним моментом M_z , що не перевищує його критичне значення, то критичне значення його стискаючої сили впаде на величину, рівну по модулю другому доданку в правій частині цієї рівності.

Щоб побудувати форму втрати стійкості трубки, використаємо систему (6.8). Із перших двох рівнянь випливає

$$C = -A; \quad D = -B. \quad (6.15)$$

Тоді два інші рівняння системи (6.8) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} A(\cos \alpha_1 l - \cos \alpha_2 l) + B(\sin \alpha_1 l - \sin \alpha_2 l) &= 0; \\ A(\sin \alpha_1 l - \sin \alpha_2 l) - B(\cos \alpha_1 l - \cos \alpha_2 l) &= 0. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Враховуючи другу рівність в (6.10), отримаємо

$$\begin{aligned}\cos \alpha_1 l - \cos \alpha_2 l &= \cos \alpha_1 l - \cos(\alpha_1 l + 2\pi) = 0; \\ \sin \alpha_1 l - \sin \alpha_2 l &= \sin \alpha_1 l - \sin(\alpha_1 l + 2\pi) = 0,\end{aligned}\tag{6.17}$$

і рівняння (6.16) справедливі при будь-яких співвідношеннях між A та B .

Найпростіші форми втрати стійкості трубки проявляються при

$$1) \quad A \neq 0, \quad B = 0 \tag{6.18}$$

і

$$2) \quad A = 0, \quad B \neq 0, \tag{6.19}$$

хоча насправді випадки (6.18) і (6.19) визначають одну і ту ж форму, повернуту відносно одна одної на 90° . Форми випинання нанотрубок у цих випадках можуть бути приведені у вигляді

$$\begin{aligned}1) \quad u(z) &= A(\cos \alpha_1 z - \cos \alpha_2 z), \quad v(z) = A(\sin \alpha_1 z - \sin \alpha_2 z); \\ 2) \quad u(z) &= B(\sin \alpha_1 z - \sin \alpha_2 z), \quad v(z) = -B(\cos \alpha_1 z - \cos \alpha_2 z).\end{aligned}\tag{6.20}$$

Суперпозицією цих кривих із різними A і B можна комбінувати безліч інших біфуркаційних форм.

6.1.3 Результати обчислень.

Особливість розглянутої задачі у випадку осьового стиснення прямолінійної трубки полягає в тому, що тут біфуркаційні стани можуть бути досягнуті не тільки при силах стиснення T , й при розтягуванні трубки та за відсутності T . До того ж, у всіх випадках критичний стан системи визначається формулою (6.12), хоча при цьому форми втрати стійкості не залишаються подібними при зміні параметрів EI , T та l , і в кожному випадку їх слід будувати наново.

Задача спрощується, якщо $T = 0$. Тоді

$$M_z^{kp} = \pm \frac{2\pi \cdot EI}{l}, \quad (6.21)$$

хвильові числа α_1 і α_2 набувають значень

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -\frac{M_z^{kp}}{EI} = \mp \frac{2\pi}{l}, \quad (6.22)$$

і форма втрати стійкості

$$u(z) = A \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi}{l} z \right) \right], \quad v(z) = A \sin \frac{2\pi}{l} z \quad (6.23)$$

залишається незмінною для всіх випадків.

При $T \neq 0$ вона має бути визначена для кожного конкретного випадку.

Нехай $E = 10^3 \text{ ГПа}$, $R_1 = 0,53 \text{ нм}$, $R_2 = 0,87 \text{ нм}$ [3]. Тоді $I = 0,387981 \text{ нм}^4$. Для

порівняння спочатку розглянемо випадок $T=0$, $l=10\text{ нм}$. При цьому $M_z^{kp} = 2,437757 \cdot 10^{-16} \text{ Нм}$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -6,283185 \cdot 10^8 \text{ нм}^{-1}$. Форму втрати стійкості такої трубки показано на Рис. 6.8, а.

Це є один повний виток спіралі радіуса A . Її проєкцією на площину Ox є коло радіуса A , зміщене вздовж осі Ox на величину A (Рис. 6.1, б).

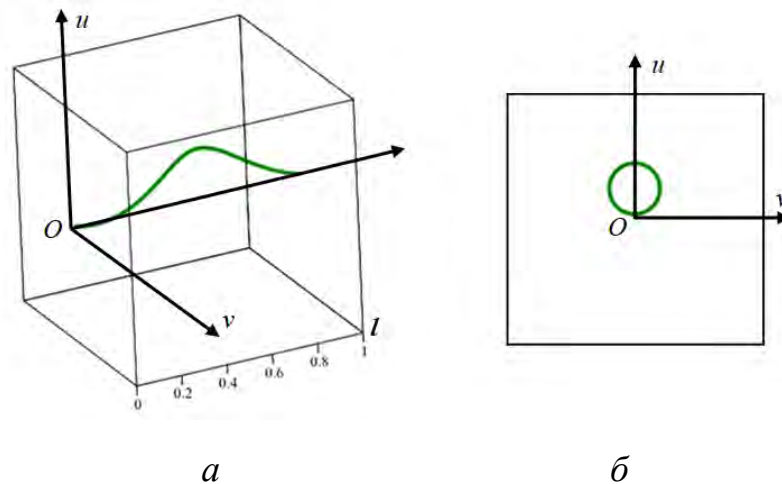


Рисунок 6.1 – Тривимірне представлення одновиткової спіральної форми випинання (а) і її проєкція на поперечну площину (б).

Результати розрахунків критичних значень M_z^{kp} та відповідних їм чисел $\alpha_1 l$, $\alpha_2 l$, що характеризують кількість витків спіралі випинаючої трубки при різних силах розтягу і стиснення T та довжинах l , наведено в Табл. 6.1 Там же наведено значення ейлерової критичної сили стиснення T_{Euler} для трубки вибраної довжини l . У всіх випадках маємо $|T| < T_{Euler}$. Оскільки в цих випадках значення $|T|$ досить малі, форми випинання розглянутих трубок мало відрізняються від одновиткової спіралі, а її проєкції на поперечну площину є майже кола.

Таблиця 6.1 – Критичні значення крутних моментів $M_z^{кр}$ та хвильових чисел $\alpha_1 l$ та $\alpha_2 l$.

№ п/п	l , мм	T_{Euler} , нН	T , нН	$M_z^{кр}$, нН · мм	$\alpha_1 l$	$\alpha_2 l$
1	10	38,292	0,1	2,4409	-0,0041	-6,2873
			-0,1	2,4346	0,0041	-6,2791
2	20	9,5730	0,2	1,2315	-0,0327	-6,3158
			-0,2	1,2061	0,0330	-6,2502
3	40	2,3932	0,2	0,6344	-0,1286	-6,4118
			-0,2	0,5834	0,1341	-6,1491
4	40	2,3932	0,4	0,6584	-0,2524	-6,5356
			-0,4	0,5562	0,2745	-6,0087
5	80	0,5983	0,4	0,3936	-0,9165	-7,1997
			-0,4	0,1754	1,3329	-4,950
6	80	0,598315	0,8	0,46584	-1,661128	-7,944319
			-	-	-	-

Можна бачити, що попереднє напруження трубки додатною силою T призводить до зростання по модулю обох хвильових чисел α_1 і α_2 , при цьому різниця $\alpha_2 l - \alpha_1 l$ залишилась рівною -2π . Якщо сила T стискає трубку, але абсолютне значення залишається меншим за критичне, то хвильове число α_1 набуває додатного значення, а величина $\alpha_2 l$ збільшується зі зростанням T і l .

На Рис. 6.2 наведено форму випинання трубки у випадку 6 (Табл. 6.1). Ця форма мало відрізняється від приведеної на Рис. 6.1, хоча перестає бути повністю одновитковою.

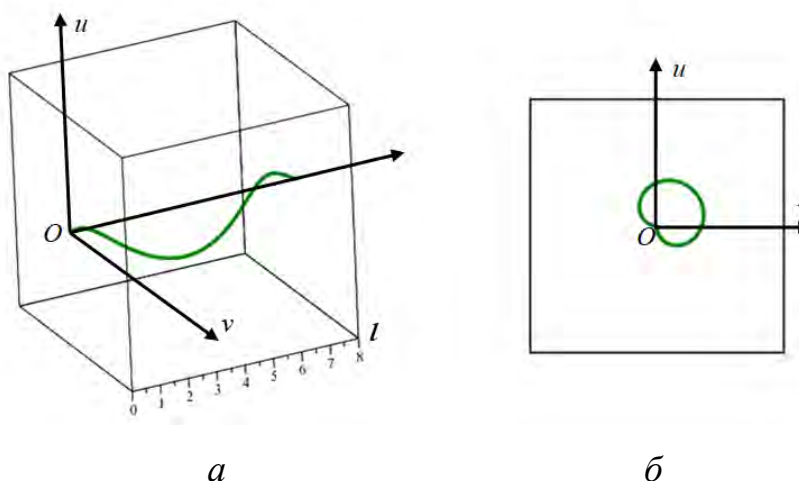


Рисунок 6.2 – Форма випинання трубки у випадку $l = 80 \text{ нм}$,

$$T = 0,8 \text{ нН}, M_z^{kp} = 0,46584 \text{ нН} \cdot \text{нм}.$$

Зі збільшенням довжини нанотрубки ейлерова критична сила T_{Euler} швидко падає, і можливість її попереднього напруження стискаючою силою практично втрачається. Тому для трубок великої довжини l розрахунки виконано тільки при додатних T . Результати обчислень для таких випадків наведено в Табл. 6.2

Таблиця 6.2 – Критичні значення крутних моментів M_z^{kp} та хвильових чисел для нанотрубок великої довжини

№ з/п	l , нм	T , нН	M_z^{kp} , нН · нм	$\alpha_1 l$	$\alpha_2 l$
1	80	0,8	0,465841	-1,6611	-7,9443
2	100	0,8	0,4284	-2,3801	-8,6633
3	200	0,8	0,3728	-6,4682	-12,7514
4	300	0,8	0,3616	-10,8386	-17,1218
5	500	0,8	0,3557	-19,7791	-26,0623
6	500	1,6	0,5007	-29,1206	-35,4038
7	1000	1,6	0,4989	-67,4361	-61,1529

Із даних Табл. 6.3 та з формул (6.12), (6.13) випливає, що зі зростанням T збільшується і M_z^{kp} , однак значення α_1 , α_2 та кількість витків

зменшуються.

Форма втрати стійкості нанотрубки у випадку 6 (Табл.6.2), показана на Рис. 6.3, відповідає варіанту 1) у рівностях (6.20). Аналогічно можуть бути побудовані форми для варіанта 2) та суперпозицій цих варіантів.

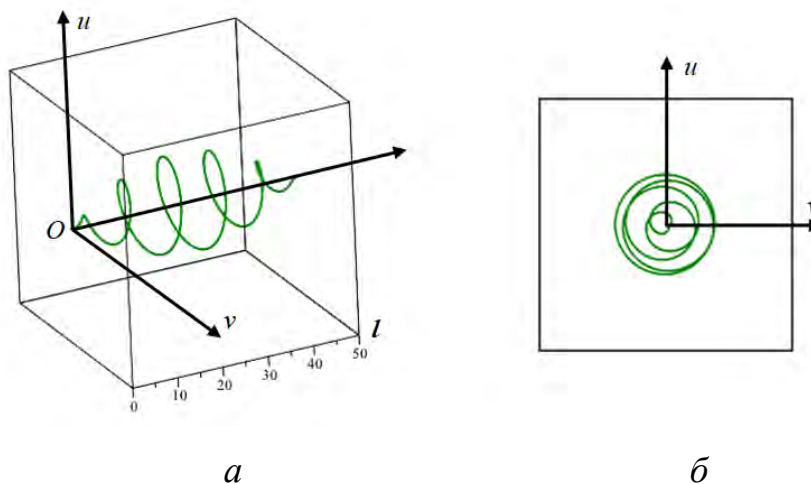


Рисунок 6.3 – Форма біфуркаційного випинання трубки у випадку

$$l = 500 \text{ нм}, T = 1,6 \text{ нН}, M_z^{kp} = 50,07 \text{ нН} \cdot \text{нм}.$$

Випадок 7 (Табл. 6.1) графічно відображено на Рис. 6.4. Тут критичне значення M_z^{kp} несуттєво зменшується, але кількість витків спіралі значно збільшується.

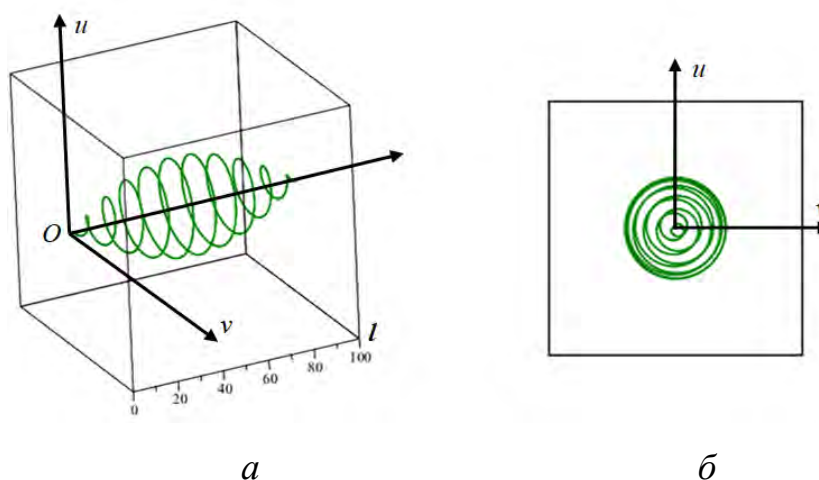


Рисунок 6.4 – Форма біфуркаційного випинання трубки у випадку

$$l = 1000 \text{ нм}, T = 1,6 \text{ нН}, M_z^{kp} = 49,89 \text{ нН} \cdot \text{нм}.$$

У роботах [152, 155] аналогічні розрахунки рівноваги подовжених закручених бурильних колон, що обертаються, виконано за допомогою високоточних методів чисельного інтегрування. Їх велика довжина зумовлена великою глибиною нафтогазових свердловин. Отже, за умовами геометричної подібності ці колони схожі на людську волосину, і задачі математичного моделювання їхньої механічної поведінки часто є сингулярно збуреними (або погано визначені) при використанні чисельних методів [156]. Подібні труднощі можуть виникнути при вивченні властивостей нанотрубок. Тому тут зростає роль точних розв'язків, представлених у замкненій формі.

6.2 Термомеханічні деформування карбонових нанотрубок в полімерних матрицях

6.2.1 Механічні та термомеханічні особливості нанотрубок

Як об'єкт теорії пружності одношарова вуглецева нанотрубка (ВНТ) може бути представлена у вигляді тонкої циліндричної оболонки або трубчастого стержня. Тому, як правило, повна механічна подібність в поведінці нанотрубок та макроскопічних оболонок на практиці не спостерігається. По-перше, це пов'язано з тим, що ВНТ не має суцільної стінки, а по-друге, вона характеризується товщиною порядку одного атома. У зв'язку з цим представляє значний інтерес вивчити в якій мірі класичні уявлення про механіку та пружні властивості циліндричних оболонок та стержнів можуть застосовуватись до такого фізичного та хімічного об'єкту, як ВНТ. Відповіді на ці питання в теперішній час формуються на основі порівняльного аналізу експериментальних даних, які отримані з урахуванням результатів модельних розрахунків, виконаних на атомно-молекулярному рівні, та класичних уявленнях теорії пружності [157, 213].

З особливою внутрішньою структурою нанотрубок пов'язаний також ефект їх надвисокої повздовжньої теплопровідності [294, 295]. Так, для одношарової карбонова нанотрубка (КНТ) її значення при $T = 20^{\circ} \text{C}$ складає $\beta = 2800 \div 6000 \text{ В/мК}$. Вона співставна з цією величиною для алмазу $\beta = 2200 \text{ В/мК}$, але значно перевищує коефіцієнти теплопровідності для сталі $\beta = 235 \text{ В/мК}$ та міді $\beta = 398 \text{ В/мК}$ [161, 190, 282].

В той же час відмічається вельми слабка поверхнева теплопередача в композитах від трубки до оточуючої її полімерної матриці через високий інтрефейсний термоопір на молекулярному рівні між ними. Це може призводити до розривності функції температури на контактній поверхні та до її високих градієнтів, що викликають додаткові концентратори термонапруження в системі. Однак цей фактор може грати і позитивну роль, завдяки можливості використання нанотрубки не тільки в якості армуючого елемента, але й у вигляді транспортного каналу для переносу тепла від високотемпературних зон композиту до низькотемпературних без втрати її на шляху прямування.

У зв'язку з відміченим вище, представляють значний науковий та прикладний інтерес питання моделювання додаткових внутрішньоструктурних термонапружень в системі нанотрубка-матриця, що викликані можливою несумісністю їх термомеханічних параметрів та високими градієнтами температури [13, 28, 37, 78, 132, 133, 154, 237]. Нижче при проведенні дослідження нанотрубка буде розглядатись як пружна циліндрична оболонка, матриця буде моделюватись пружним середовищем.

6.2.2 Постановка задачі

Нехай нескінченна нанотрубка 1 знаходиться в нескінченному середовищі 2 (рис. 6.5).

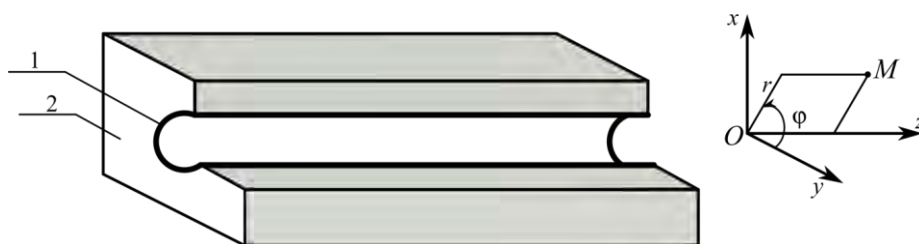


Рисунок 6.5 – Геометрична схема системи

Дослідимо термонапружений стан системи у двох випадках, коли температура всієї системи змінювалась на величину T і коли температура трубки змінилась на T_1 , а матриці – на T_2 . Для розрахунку використовуємо циліндричну систему координат $Or\theta z$, вісь Oz якої співпадає з віссю трубки. Прийmemo, що радіус серединної поверхні трубки дорівнює r_1 , зведена товщина – h . Для неї зведені значення термомеханічних параметрів складають: модуль пружності E_1 , коефіцієнт Пуассона ν_1 , коефіцієнт лінійного термічного розширення α_1 . Для матеріалу матриці ці параметри позначимо E_2, ν_2, α_2 .

Вважаєм, що у вихідному положенні нанотрубка знаходиться у безперервному контакті по зовнішній поверхні з матеріалом матриці та напруження в системі рівні нулю. Потім температури фракцій змінились на величини T_1 і T_2 , відповідно. Потрібно досліджувати осесиметричний термонапружений стан системи, який виникає.

Сформулюємо спочатку на базі теорії циліндричних оболонок рівняння термопружного стану нанотрубки [32]. Для цього умовно виділимо її кільцевий елемент довжиною dz (рис. 6.6), прикладемо до нього зовнішні і внутрішні сили та розглянемо їх рівновагу.

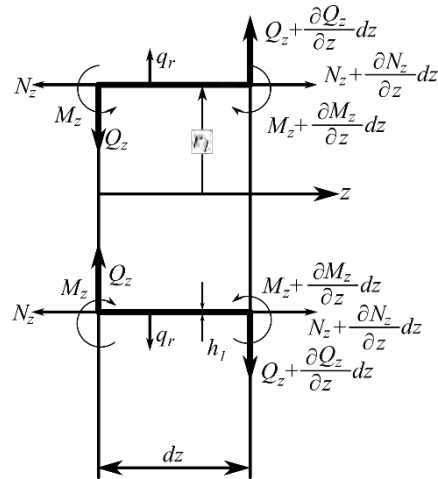


Рисунок 6.6 – Схема сил та параметрів, що діють на елемент оболонки

Рівняння рівноваги елемента оболонки при відсутності дотичних сил на її поверхні мають вигляд:

$$\frac{dN_z}{dz} = 0; \quad \frac{dM_z}{dz} - Q_z = 0; \quad \frac{dQ_z}{dz} - \frac{N_\varphi}{r_1} + q_r = 0. \quad (6.24)$$

Тут N_z, N_φ – мембранні зусилля відповідної орієнтації; M_z – згинний момент; Q_z – перерізуюча сила; q – інтенсивність зовнішнього розподіленого навантаження.

Виключаючи Q_z з другого та третього рівнянь (6.24), отримаємо

$$\frac{d^2 M_z}{dz^2} - \frac{N_\varphi}{r_1} + q_r = 0. \quad (6.25)$$

Випишемо співвідношення для мембранних деформацій [32]

$$\varepsilon_z^{(1)} = \frac{N_z - \nu_1 N_\varphi}{E_1 h} + \alpha_1 T; \quad \varepsilon_\varphi = \frac{N_\varphi - \nu_1 N_z}{E_1 h} + \alpha_1 T, \quad (6.26)$$

зміна кривин

$$\chi_z = \frac{12(M_z - \nu_1 M_\varphi)}{E_1 h^3}; \quad \chi_\varphi = \frac{12(M_\varphi - \nu_1 M_z)}{E_1 h^3}, \quad (6.27)$$

мембранних зусиль

$$N_z = \frac{E_1 h}{1 - \nu_1^2} [\varepsilon_z + \nu_1 \varepsilon_\varphi - (1 + \nu_1) \alpha_1 T];$$

$$N_\varphi = \frac{E_1 h}{1 - \nu_1^2} [\varepsilon_\varphi + \nu_1 \varepsilon_z - (1 + \nu_1) \alpha_1 T], \quad (6.28)$$

та моментів

$$M_z = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1^2)} [\chi_z + \nu_1 \chi_\varphi],$$

$$M_\varphi = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1^2)} [\chi_\varphi + \nu_1 \chi_z]. \quad (6.29)$$

В цих виразах $\varepsilon_z^{(1)}$, $\varepsilon_\varphi^{(1)}$ і χ_z , χ_φ – мембранні відносні деформації та зміни кривин серединної поверхні. Для циліндричної оболонки вони визначаються залежностями

$$\begin{aligned}
\varepsilon_z^{(1)} &= \frac{dv_1}{dz}; & \varepsilon_\varphi &= \frac{u_1}{r_1}; \\
\chi_z &= -\frac{d^2 u_1}{dz^2}; & \chi_\kappa &= 0,
\end{aligned}
\tag{6.30}$$

де u_1 і v_1 – переміщення елементів серединної поверхні в повздовжньому та радіальному напрямках.

Підставляючи (6.30) в (6.28) та (6.29), отримуємо

$$\begin{aligned}
N_z &= \frac{E_1 h}{1 - \nu_1^2} \left[\frac{dv_1}{dz} + \nu_1 \frac{u_1}{r_1} - (1 + \nu_1) \alpha_1 T \right]; \\
N_\varphi &= \frac{E_1 h}{1 - \nu_1^2} \left[\frac{u_1}{r_1} + \nu_1 \frac{dv_1}{dz} - (1 + \nu_1) \alpha_1 T \right]; \\
M_z &= -\frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1^2)} \frac{d^2 u_1}{dz^2}; & M_\varphi &= -\frac{\nu_1 E_1 h^3}{12(1 - \nu_1^2)} \frac{d^2 u_1}{dz^2}.
\end{aligned}
\tag{6.31}$$

Ціль даного дослідження полягає в аналізі внутрішньоструктурних термонапружень, які викликані несумісністю термдеформацій нанотрубки та матриці. Тому будемо вважати, що трубка нескінченної довжини знаходиться в необмеженому середовищі матриці. При цьому виділимо два випадки, коли в системі рівні нулю напруження в осьовому напрямі $\sigma_z^{(1)}$, $\sigma_z^{(2)}$ (плоский напружений стан) або коли в ній дорівнюють нулю осьові переміщення v_1 , v_2 (плоска деформація). У цих випадках рівняння (6.24) зводяться до вигляду

$$\begin{aligned}
N_z &= \text{const}; \\
-\frac{E_1 h}{r_1(1 - \nu_1^2)} \left[\frac{u_1}{r_1} + \nu_1 \frac{dv_1}{dz} - (1 + \nu_1) \alpha_1 T \right] + q_r &= 0.
\end{aligned}
\tag{6.32}$$

Величина q_r контактного тиску, що сюди входить, визначається з умови сумісності радіальних переміщень.

При дослідженні термонапруженого стану середовища матриці зручно поряд з параметрами пружності E_2 , ν_2 застосовувати також параметри Ляме λ_2 і μ_2 , за необхідності переходячи від однієї системи до іншої. В циліндричній системі координат $Or\theta z$ плоска осесиметрична термонапружена рівновага пружного середовища 2 описується рівнянням [32]

$$\frac{d\sigma_r^{(2)}}{dr} + \frac{\sigma_r^{(2)} - \sigma_\varphi^{(2)}}{r} = 0. \quad (6.33)$$

Тут $\sigma_r^{(2)}(r)$, $\sigma_\varphi^{(2)}(r)$ – функції радіальних та колових напружень вздовж відповідних координатних осей. Виразимо їх разом з $\sigma_z^{(2)}(r)$ через компоненти відносних деформацій $\varepsilon_r^{(2)}(r)$, $\varepsilon_\varphi^{(2)}(r)$, $\varepsilon_z^{(2)}(r)$

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(2)}(r) &= (\lambda_2 + 2\mu_2)\varepsilon_r^{(2)} + \lambda_2(\varepsilon_\varphi^{(2)} + \varepsilon_z^{(2)}) - (3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2 T; \\ \sigma_\varphi^{(2)}(r) &= (\lambda_2 + 2\mu_2)\varepsilon_\varphi^{(2)} + \lambda_2(\varepsilon_r^{(2)} + \varepsilon_z^{(2)}) - (3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2 T; \\ \sigma_z^{(2)}(r) &= (\lambda_2 + 2\mu_2)\varepsilon_z^{(2)} + \lambda_2(\varepsilon_r^{(2)} + \varepsilon_\varphi^{(2)}) - (3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2 T. \end{aligned} \quad (6.34)$$

де деформації обчислюються через радіальні переміщення $u_2(r)$:

$$\varepsilon_r^{(2)}(r) = \frac{du^{(2)}}{dr}; \quad \varepsilon_\varphi^{(2)}(r) = \frac{u^{(2)}}{r}. \quad (6.35)$$

Розглянемо спочатку плоский деформований стан. Тоді

$$\varepsilon_z^{(2)}(r) = 0 \quad (6.36)$$

і рівняння (6.34) зводяться до форми:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(2)}(r) &= (\lambda_2 + 2\mu_2)\varepsilon_r^{(2)} + \lambda_2\varepsilon_\varphi^{(2)} - (3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2 T; \\ \sigma_\varphi^{(2)}(r) &= (\lambda_2 + 2\mu_2)\varepsilon_\varphi^{(2)} + \lambda_2\varepsilon_r^{(2)} - (3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2 T; \\ \sigma_z^{(2)}(r) &= \lambda_2(\varepsilon_r^{(2)} + \varepsilon_\varphi^{(2)}) - (3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2 T. \end{aligned} \quad (6.37)$$

За допомогою (6.37) та (6.35) перетворимо рівняння (6.33) до остаточного вигляду:

$$\frac{d^2 u^{(2)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du^{(2)}}{dr} - \frac{1}{r^2} u^{(2)} = 0. \quad (6.38)$$

Воно має розв'язок

$$u^{(2)}(r) = rC_1 + \frac{1}{r}C_2, \quad (6.39)$$

де C_1 , C_2 – константи інтегрування. Вони знаходяться з умов контактної взаємодії середовища 2 з оболонкою 1 і прямування напруження $\sigma_r^{(2)}(r)$ до

нуля при $r \rightarrow \infty$.

Як правило, в теорії оболонок, вважаємо, що взаємодія фрагментів 1 і 2 системи відбувається на серединній поверхні $r = r_1$. В цьому випадку маємо

$$q_r = \sigma_r^{(2)}(r_1), \quad (6.40)$$

$$u_1 = u^{(2)}(r_1), \quad (6.41)$$

$$\sigma_r^{(2)}(r) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty. \quad (6.42)$$

Враховуючи (6.39) випишемо співвідношення

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(2)}(r) &= C_1 - \frac{1}{r^2} C_2, & \varepsilon_\varphi^{(2)}(r) &= C_1 + \frac{1}{r^2} C_2; \\ \sigma_r^{(2)}(r) &= 2(\lambda_2 + \mu_2) C_1 - 2\mu_2 \frac{1}{r^2} C_2 - (3\lambda_2 + 2\mu_2) \alpha_2 T; \\ \sigma_\varphi^{(2)}(r) &= 2(\lambda_2 + \mu_2) C_1 + 2\mu_2 \frac{1}{r^2} C_2 - (3\lambda_2 + 2\mu_2) \alpha_2 T; \\ \sigma_z^{(2)}(r) &= \lambda_2 C_1 - (3\lambda_2 + 2\mu_2) \alpha_2 T. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Тоді з умов (6.42) випливає

$$C_1 = \frac{(3\lambda_2 + 2\mu_2)}{2(\lambda_2 + \mu_2)} \alpha_2 T. \quad (6.44)$$

В цьому випадку рівняння (6.40), (6.41) набувають форму

$$\frac{E_1 h}{r_1(1-\nu_1^2)} \left[\frac{u_1}{r_1} - (1+\nu_1)\alpha_1 T \right] = -\frac{2\mu_2}{r_1^2} C_2, \quad (6.45)$$

$$u_1 = \frac{r_1(3\lambda_2 + 2\mu_2)}{2(\lambda_2 + \mu_2)} \alpha_2 T + \frac{1}{r_1} C_2. \quad (6.46)$$

Ця система має розв'язок

$$u_1 = \left[\frac{E_1 h}{r_1(1-\nu_1)} \alpha_1 T + \frac{\mu_2(3\lambda_2 + 2\mu_2)}{(\lambda_2 + \mu_2)} \alpha_2 T \right] / \left[\frac{E_1 h}{r_1^2(1-\nu_1^2)} + \frac{2\mu_2}{r_1} \right], \quad (6.47)$$

$$C_2 = - \left[\frac{E_1 h}{(1-\nu_1^2)} \cdot \frac{(3\lambda_2 + 2\mu_2)}{2(\lambda_2 + \mu_2)} \alpha_2 T - \frac{E_1 h}{(1-\nu_1)} \alpha_1 T \right] / \left[\frac{E_1 h}{r_1^2(1-\nu_1^2)} + \frac{2\mu_2}{r_1} \right]. \quad (6.48)$$

Враховуючи (6.44) зведемо напруження (6.43) до вигляду

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(2)}(r) &= -\frac{2\mu_2}{r^2} C_2; \\ \sigma_\varphi^{(2)}(r) &= \frac{2\mu_2}{r^2} C_2; \\ \sigma_z^{(2)}(r) &= \lambda_2 C_1 - (3\lambda_2 + 2\mu_2) \alpha_2 T. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Тоді

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{(2)}(r) &= \frac{2E_1 h \mu_2}{r^2(1-\nu_1)} \left[\frac{(3\lambda_2 + 2\mu_2)}{2(1+\nu_1)(\lambda_2 + \mu_2)} \alpha_2 T - \alpha_1 T \right]; \\
\sigma_\phi^{(2)}(r) &= -\frac{2E_1 h \mu_2}{r^2(1-\nu_1)} \left[\frac{(3\lambda_2 + 2\mu_2)}{2(1+\nu_1)(\lambda_2 + \mu_2)} \alpha_2 T - \alpha_1 T \right]; \\
\sigma_z^{(2)}(r) &= \frac{\lambda_2(3\lambda_2 + 2\mu_2)}{2(\lambda_2 + \mu_2)} \alpha_2 T - (3\lambda_2 + 2\mu_2) \alpha_2 T.
\end{aligned} \tag{6.50}$$

Підкреслимо, що наведені співвідношення отримані з припущенням, що прирости температури T однакові у всій системі.

6.2.3 Аналіз результатів обчислень для випадку однорідного температурного поля

При виборі значень термомеханічних параметрів E_1 , ν_1 , h і α_1 для оболонкової моделі решітчастої стінки нанотрубки необхідно врахувати, що на практиці їх експериментальне визначення методами молекулярної механіки проводяться шляхом співставлення частот та форм повздовжніх, радіальних, згинних та крутильних коливань реального нанотрубчастого зразка і його теоретичної моделі у вигляді циліндричної оболонки або порожнього циліндра такої ж довжини. Одним з таких параметрів є товщина h оболонки, яка характеризується тим, що товщина стінки реальної нанотрубки дорівнює розміру одного атома вуглецю. У зв'язку з цим, в експериментах та обчисленнях часто використовують узагальнені оболонкові

характеристики: згинна оболонкова жорсткість $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ і мембранна жорсткість $K = Eh$. Зазвичай вважається [157], що при $E = 1$ ТПа, $K = Eh = 360$ Н/м, $\nu = 0,2$. У зв'язку з цим, покладемо, що в нашому випадку $E_1h = 360$ Н/м, $\nu_1 = 0,2$, $\alpha_1 = 1,0 \cdot 10^{-5}$ C⁻¹. Радіус нанотрубки може набувати значення від 0,5 до декількох десятків нанометрів.

Оскільки при створенні композитів з додаванням вуглецевих нанотрубок найбільш активно обговорюються структури з полімерними матрицями, нижче для аналізу термомеханічної сумісності нанотрубки і середовища 2 вибрані полімерні матеріали, наведені в Табл.6.3. Відмітимо, що їх термомеханічні властивості можуть залежати від їхнього складу, технології виготовлення та температури, тому в Табл.6.3 подані найбільш характерні значення термомеханічних параметрів цих матеріалів

Таблиця 6.3 – Термомеханічні параметри вибраних полімерних матеріалів

№ п.п	Полімерний матеріал	λ , ГПа	μ , ГПа	$[\sigma]_{міц}$, МПа	$10^5 \alpha$ C ⁻¹
1	Епоксидна смола	2,8	1,3	40-80	5
2	Поліамід	3,76	1,06	50-90	7
3	Фенелформальдегід	1,18	1,56	48	3
4	Поліефір	4,73	1,84	10-129	7,9
5	Полікарбонат	2,25	0,87	66	6,5
6	Полістирол	2,58	1,21	46	7
7	Поліпропілен	2,40	0,46	31-41	14

Використовуючи ці величини, за допомогою формул (6.39), (6.41),

(6.31), (6.50) обчислені значення u_1 , N_φ , N_z , $\sigma_r^{(2)}(r_1)$, $\sigma_\varphi^{(2)}(r_1)$, $\sigma_z^{(2)}(r_1)$ для комбінації нанотрубки з матеріалами наведеними в Табл.6.4. При цьому вважалось, що $r_1 = 5$ нм, зміна температури $T = 50^\circ \text{C}$. Результати обчислень показані в Табл. 6.4.

Таблиця 6.4 – Значення параметрів термонапруженого стану системи при однорідному полі температур

№ п.п.	Полімерний матеріал матриці	r_1 нм	$10^4 u_1$ нм	$10^2 N_\varphi$ Н/м	N_z Н/м	$\sigma_r^{(2)}(r_1)$ МПа	$\sigma_\varphi^{(2)}(r_1)$, МПа	$\sigma_z^{(2)}(r_1)$ МПа
1	Епоксидна смола	1	6,190	0,7125	-0,1785	7,113	-7,113	-18,11
		5	40,32	8,372	-0,1633	6,912	-6,912	-18,11
2	Поліамід	1	6,241	0,8989	-0,1782	8,994	-8,994	-28,61
		5	35,86	4,397	-0,1712	8,291	-8,291	-28,61
3	Фенолформальдегід	1	6,101	0,3784	-0,1792	3,784	-3,784	-7,839
		5	32,44	1,832	-0,1763	3,663	-3,663	-7,839
4	Полієфір	1	6,463	1,736	-0,1765	17,67	-17,67	-45,75
		5	41,16	8,933	-0,1638	16,74	-16,74	-45,75
5	Полікарбонат	1	6,176	0,6619	-0,1792	6,619	-6,619	-17,64
		5	34,33	3,249	-0,1654	6,499	-6,499	-17,64
6	Полістирол	1	5,734	0,9836	-0,1780	9,837	-9,837	-23,56
		5	36,39	4,795	-0,1704	9,591	-9,591	-23,56
7	Поліпропілен	1	6,228	0,8551	-0,2156	8,611	-8,611	-32,99
		5	35,66	4,243	-0,1715	8,486	-8,486	-32,99

Аналіз значень радіальних термомеханічних переміщень $u_1(r_1)$ стінки

нанотрубки дозволяє зробити висновок, що у зв'язку з великою радіальною жорсткістю нанотрубки основна доля значення u_1 викликана простим термічним розширенням $u_T = (1 + \nu_1)\alpha_1 T$, яке складає $u_T = 0,0006$ нм при $r_1 = 1$ нм та $u_T = 0,003$ нм при $r_1 = 5$ нм. Малі перевищення цих величин, що можна спостерігати в Табл.6.5, навіть при великих значеннях коефіцієнтів α_2 полімерів порівняно з коефіцієнтом α_1 нанотрубки пояснюється високими значеннями E_1 карбонової стінки.

Як свідчать формули (6.50), термонапруження $\sigma_r^{(2)}(r)$, $\sigma_\phi^{(2)}(r)$ в матриці дорівнюють одне одному за модулем, мають різні знаки та спадають обернено пропорційно r^2 . Остання властивість погоджується з принципом Сен-Венана про характер спадання в пружних тілах напружень, викликаних самозрівноваженою системою сил. Важливо відзначити також, що при порівняно помірній зміні температури на $T = 50^\circ \text{C}$ максимальні додаткові внутрішньоструктурні термонапруження $\sigma_r^{(2)}(r_1)$, $\sigma_\phi^{(2)}(r_1)$ в матриці далекі від граничних значень $[\sigma]_{\text{міц}}$, наведених у Табл. 6.3. Однак їхній вклад в загальний напружений стан системи може бути відчутним при спільній дії з загальними експлуатаційними навантаженнями. Тому в загальному випадку прояв цих термонапружень бажано враховувати.

6.2.4 Термонапружений стан системи при неоднорідному температурному полі

Як зазначено вище, карбонові нанотрубки поряд з особливими механічними властивостями, володіють також специфічною фізичною властивістю вкрай високої теплопровідності в осьовому напрямі та занадто низькою тепловіддачею з її бічної поверхні. У зв'язку з цією особливістю

можливі ситуації, коли на деяких ділянках нанотрубки при інтенсивних теплових потоках вздовж осі температура трубки і матриці не встигає вирівнятися і виявляється розривною. В термопружності такий випадок є менш сприятливим і має бути розглянутим додатково.

Нехай T_1 – температура нанотрубки, T_2 – температура матриці. Тоді при моделюванні термопружного деформування системи у всіх співвідношеннях, що включають доданки з множниками $\alpha_1 T$ та $\alpha_2 T$, їх можна замінити множниками $\alpha_1 T_1$ і $\alpha_2 T_2$, відповідно. В результаті після аналогічних послідовних перетворень замість (6.44), (6.48) отримаємо рівності

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{(3\lambda_2 + 2\mu_2)}{2(\lambda_2 + \mu_2)} \alpha_2 T_2; \\ C_2 &= -\frac{\frac{E_1 h}{(1-\nu_1^2)} C_1 - \frac{E_1 h}{(1-\nu_1)} \alpha_1 T_1}{\frac{E_1 h}{r_1^2(1-\nu_1^2)} + \frac{2\mu_2}{r_1}}. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Аналогічні зміни отримають вирази (6.31) для обчислення зусиль в оболонці нанотрубки

$$\begin{aligned} N_\varphi &= \frac{E_1 h}{1-\nu_1^2} \left[\frac{u_1}{r_1} - (1+\nu_1) \alpha_1 T_1 \right]; \\ N_z &= \frac{E_1 h}{1-\nu_1^2} \left[\nu_1 \frac{u_1}{r_1} - (1+\nu_1) \alpha_1 T_1 \right], \end{aligned} \quad (6.52)$$

і вирази (6.34) для обчислення напружень в матричному середовищі 2

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{(2)}(r) &= \frac{2E_1 h \mu_2}{r^2(1-\nu_1)} \left[\frac{C_1}{(1+\nu_1)} - \alpha_1 T_1 \right] \bigg/ \left[\frac{E_1 h}{r_1^2(1-\nu_1^2)} + \frac{2\mu_2}{r_1} \right]; \\
\sigma_\phi^{(2)}(r) &= -\frac{2E_1 h \mu_2}{r^2(1-\nu_1)} \left[\frac{C_1}{(1+\nu_1)} - \alpha_1 T_1 \right] \bigg/ \left[\frac{E_1 h}{r_1^2(1-\nu_1^2)} + \frac{2\mu_2}{r_1} \right]; \\
\sigma_z^{(2)}(r) &= \lambda_2 C_1 - (3\lambda_2 + 2\mu_2) \alpha_2 T_2.
\end{aligned} \tag{6.53}$$

В якості прикладу розглянемо випадок, коли приріст температури середовища 2 склав $T = 50^\circ \text{C}$, а температура нанотрубки в наслідок слабкої теплопередачі через її бічну поверхню змінилась тільки на $T_1 = 25^\circ \text{C}$. При цьому зупинимось на випадках поліамідної, поліефірної і поліпропіленової матриць, для яких прирости напружень в Табл.6.5 виявились найбільшими. Результати обчислень наведені в Табл. 6.5.

Таблиця 6.5 – Значення параметрів термонапруженого стану системи при неоднорідному полі температур

№ п.п.	Полімерний матеріал матриці	r_1 нм	$10^4 u_1$ нм	$10^2 N_\phi$ Н/м	N_z Н/м	$\sigma_r^{(2)}(r_1)$ МПа	$\sigma_\phi^{(2)}(r_1)$ МПа	$\sigma_z^{(2)}(r_1)$ МПа
1	Поліамід	1	3,256	0,9624	-0,088	9,604	-9,604	-14,92
		5	21,28	4,706	-0,0805	9,412	-9,412	-14,92
2	Поліефір	1	3,493	1,848	-0,1073	18,48	-18,48	-45,17
		5	26,85	8,896	-0,086	17,79	-17,79	-45,17
3	Поліпропілен	1	3,236	0,8844	-0,088	8,844	-8,844	-32,99
		5	20,84	4,350	-0,081	8,759	-8,759	-32,99

Зауважимо, що як і варто було очікувати, двократне зменшення температури нанотрубки призвело до майже двократного зменшення її

радіальних переміщень u_1 . При цьому колові зусилля N_ϕ змінилися несуттєво, а термонапруження $\sigma_r^{(2)}(r_1)$, $\sigma_\phi^{(2)}(r_1)$ в середовищі матриці зросли від 4% до 14%.

6.3 Аналіз термомеханічної несумісності фулеренів з полімерними матрицями композитів

6.3.1 Стан проблеми

Фулерени є алотропною формою вуглецю, в яких молекули його атомів поєднані одиничними та подвійними в'язями. Встановлено, що молекули фулеренів можуть мати різні форми та розміри. Найбільш поширені форми фулеренових молекул являють собою порожні сфери, еліпсоїди та циліндричні трубки. Емпірична форма для молекул фулерену позначається C_n , де n означає число атомів вуглецю в молекулі. Перші згадування про сферичну молекулу C_{60} було опубліковано Kroto et al в 1985 р. Пізніше група фулеренів була розширена за рахунок карбонових нанотрубок. Постійно зростаючі вимоги щодо створення легких матеріалів з високою питомою міцністю, жорсткістю та спеціальними фізико-механічними властивостями в автомобільній, аерокосмічній та інших технічних галузях прискорили розвиток та використання нанокompозитів на основі полімерних та металевих матриць [141, 163, 185]. Їх стали ширше застосовувати також в мікроелектроніці, оптиці та медицині.

Композитні матеріали на основі полімерних матриць, армовані фулеренами, являють собою конструкційні структури, що призначені для функціонування в умовах впливу на них механічних (силових) та температурних факторів. На практиці їх здатність зберігати механічну міцність в умовах експлуатації встановлюється методами механіки суцільних

середовищ. Однак для композитів, армованих фулеренами, ці задачі суттєво ускладнюються, так як сітчаста будова наномолекул не є суцільною й їх механічна взаємодія з пружним суцільним середовищем матриці має свої особливості. Для подолання цих особливостей сферичні та циліндричні сітчасті конструкції фулеренів та нанотрубок, які практично не мають товщини (їхня товщина дорівнює розміру одного атома), моделюються суцільними пружними сферичними та циліндричними оболонками [88, 140, 200] зі зведеними (ефективними, еквівалентними) значеннями товщини, модуля пружності, коефіцієнта Пуассона і коефіцієнта лінійного термічного розширення [142]. Із застосуванням такої моделі досліджено пружне деформування, коливання і частотні спектри фулеренів [142, 174, 181, 185].

Однією з особливостей застосування полімерних композитів, армованих фулеренами, є можливість їх використання в діапазонах зміни температури від -55°C до $+200^{\circ}\text{C}$, хоча в деяких матеріалах (наприклад, що застосовуються в аерокосмічній техніці) вони можуть експлуатуватися і при більш низьких та більш високих їх значеннях. У цих випадках додатково до силових навантажень вони можуть піддаватися і до термічних впливів, серед яких можна виділити три механізми термодформування та ініціювання термонапружень: зовнішній, внутрішній і термоградієнтний [254]. Відповідно до цієї доктрини, якщо в однорідному пружному середовищі, яке обмежене поверхнями довільної геометрії й вільне від зовнішніх в'язей, що заважають його вільному деформуванню, температура розподіляється за лінійним законом в якому-небудь напрямку, то термонапруження в ньому дорівнюють нулю. Якщо хоча б одну із цих умов порушено, то в середовищі генеруються термонапруження. При цьому, якщо на граничні поверхні накладені зовнішні в'язі, що заважають її термодформуванню, то механізм зародження термонапружень називається зовнішнім. У випадку, коли середовище є неоднорідним, навіть за відсутності

в'язей і постійному полі температур, зароджуються внутрішньоструктурні термонапруження та механізм, що їх викликає називається внутрішнім. Дія градієнтного механізму проявляється при полях температур, що відмінні від лінійних за просторовими координатами.

Серед цих механізмів найменш вивченим являється внутрішній, оскільки, зазвичай внутрішньоструктурні термонапруження та пошкодження, що ним викликаються, є прихованими, на них звертають увагу, коли руйнування охопили значні зони і природа їх виникнення перестала бути прихованою. Найчастіше такі ситуації виникають в композитних матеріалах з термомеханічними несумісними фазами [13]. У зв'язку з тим, що в армованих полімерних композитах фулерени володіють порівняно низьким коефіцієнтом лінійного термічного розширення ($\alpha \approx 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$), а у полімерів вони бувають на порядок більше, і в той же час механічна жорсткість фулеренів набагато перевищує цей показник матриці, можна очікувати, що така несумісність вказаних компонент при суттєвих перепадах температури може призвести до помітних додаткових термонапружень. Мета досліджень полягає у перевірці можливості прояву внутрішнього механізму ініціювання термонапружень в полімерних композитах, армованих фулеренами.

6.3.2 Оболонкова модель термдеформованого фулерену.

Для формування розрахункової моделі термопружного деформування решітчастої конструкції молекули фулерену в полімерній матриці використовуються співвідношення тонких пружних оболонок і теорії термопружності [32]. В природному стані фулерен являє собою багатогранну решітчасту сферичну структуру (рис.6.7 а) з п'ятикутними чи шестикутними гранями, у вершинах якої знаходяться атоми вуглецю.

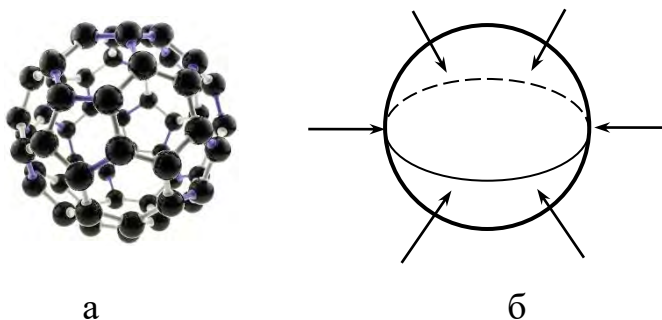
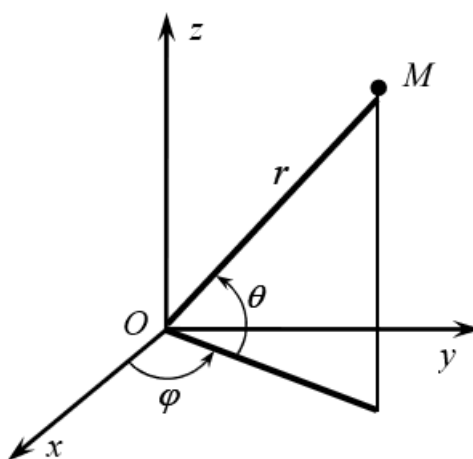


Рисунок 6.7 – Геометричні схеми молекули фулерену (а) та її оболонкової моделі (б)

Кодування таких структур здійснюється за числом атомів, починаючи з C_{20} і продовжуючи до C_{60} , C_{70} , ..., C_{2160} , ..., C_{4860} . Найбільш стійкими та дослідженими є C_{60} і C_{70} . Діаметр C_{60} , що вимірюється між атомами його поверхні, складає 0,71 нм. Зі збільшенням номеру фулерену його діаметр збільшується і може становити декілька нанометрів.

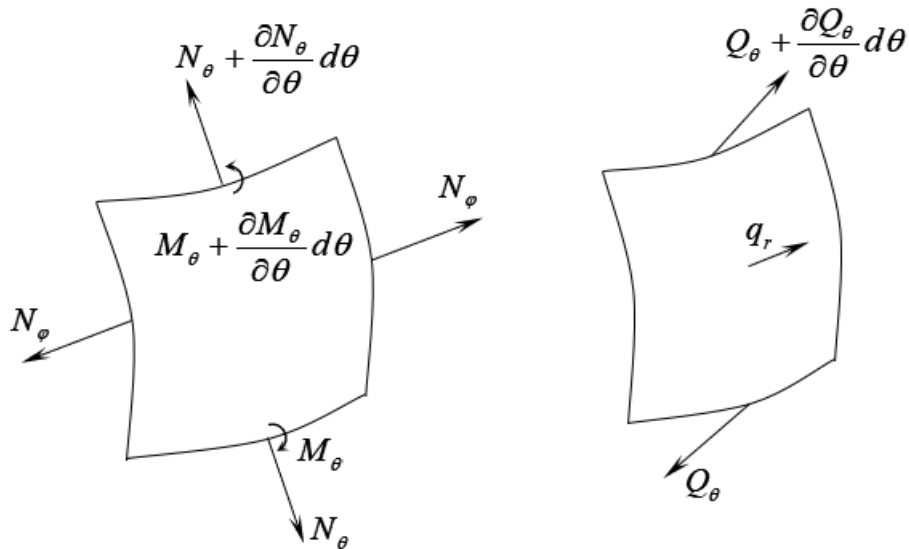
Сферичну оболонкову модель будемо будувати у сферичній системі координат $Or\varphi\theta$ (рис.6.8) з початком у центрі сфери.



Рисинук 6.8 – Схема сферичної системи координат

Розглянемо випадок, коли навантаження та напружений стан оболонки

симетричні відносно осі Oz . Перерізами $\varphi = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ виділимо елемент поверхні оболонки товщиною h , прикладемо до нього зовнішнє нормальне навантаження інтенсивністю q_r , внутрішні зусилля N_φ , N_θ , згинні моменти M_φ , M_θ та перерізуючу силу Q_θ ($Q_\varphi = 0$) (рис.6.9).



Рисинук 6.9 – Схема силових факторів, що діють на оболонковий елемент

Позначимо r_1 радіус серединної поверхні оболонки і s координатну лінію, напрямлену вздовж меридіана сфери, на якій координата s дорівнює довжині дуги меридіана, що вимірюється від деякої нульової точки. Тоді, розглядаючи рівновагу сил та моментів, прикладених до виділеної ділянки поверхні можна написати рівняння [32]

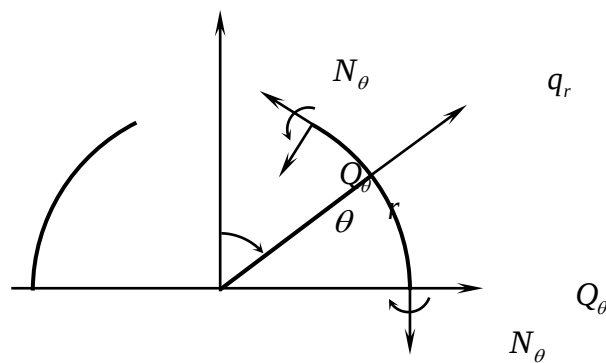
$$\begin{aligned} \frac{dN_\theta}{d\theta} - N_\varphi \cos \theta + Q_\theta &= 0; \\ \frac{dM_\theta}{d\theta} - M_\varphi \cos \theta - Q_\theta r &= 0; \\ \frac{dN_\theta}{d\theta} - N_\varphi \sin \theta - N_\theta + q_r r &= 0. \end{aligned} \quad (6.54)$$

Зусилля та моменти, що тут використовуються, визначаються формулами

$$\begin{aligned}
 N_{\theta} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} [\varepsilon_{\theta} + \nu\varepsilon_{\varphi} - (1+\nu)\alpha T]; \\
 N_{\varphi} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} [\varepsilon_{\varphi} + \nu\varepsilon_{\theta} - (1+\nu)\alpha T]; \\
 M_{\theta} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_{\theta} + \nu\kappa_{\varphi}); \\
 M_{\varphi} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_{\varphi} + \nu\kappa_{\theta}),
 \end{aligned} \tag{6.55}$$

де E – модуль пружності, ГПа; ν – коефіцієнт Пуассона, ГПа; h – товщина оболонки; $\varepsilon_{\theta}, \varepsilon_{\varphi}$ – відносні деформації у відповідних напрямках; $\kappa_{\theta}, \kappa_{\varphi}$ – зміни кривизн; α – коефіцієнт лінійного термічного розширення K^{-1} ; T – зміна температури, $^{\circ}C$.

Для наочності силової моделі оболонки на рис. 6.10 наведена схема меридіонального перерізу її напівсфери з діючими зусиллями та моментами.



Рисинук 6.10 – Схема меридіонального перерізу напівсфери

В нашому випадку розглядається деформування оболонки, що викликане контактною взаємодією з навколишнім її пружним середовищем при зміні температури T всієї системи. Тому оболонка знаходиться в

мембранному напруженому стані її мембранні переміщення дорівнюють нулю, а радіальні переміщення $u(\theta, \varphi)$ однакові у всіх точках. У зв'язку з цим

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{u}{r}; \quad \varepsilon_{\varphi} = \frac{u}{r}; \quad \kappa_{\theta} = 0; \quad \kappa_{\varphi} = 0. \quad (6.56)$$

В цих умовах мають місце рівності

$$M_{\theta} = M_{\varphi} = 0; \quad Q_{\theta} = 0. \quad (6.57)$$

Перші два рівняння системи (6.54) задовольняються тотожно, а третє рівняння набуває форму

$$-N_{\varphi} \sin \theta - N_{\theta} + q_r r = 0. \quad (6.58)$$

Щоб не будувати за допомогою рівностей (6.56) та (6.58) диференціальні рівняння, розглянемо напівсферу на рис. 6.10 із замкненим апексом та спроектуємо всі сили на вісь Oz . Тоді за допомогою (6.58) та Рис. 6.10 отримаємо

$$-N_{\theta} 2\pi r + q_r \pi r^2 = 0, \quad (6.59)$$

звідки

$$N_{\theta} = N_{\varphi} = \frac{q_r r}{2}. \quad (6.60)$$

Використовуючи (6.55) і (6.56), перетворимо (6.60) до вигляду

$$N_{\theta} = N_{\varphi} = \frac{Eh}{1-\nu} \left(\frac{u}{r} - \alpha T \right) = \frac{q_r r}{2}. \quad (6.61)$$

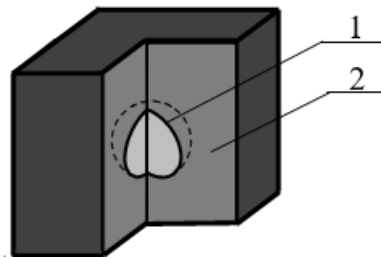
За допомогою (6.61) знаходимо радіальне переміщення u сферичної оболонки, що піддана дії рівномірно розподіленого радіального навантаження q_r , при зміні її температури на величину T :

$$u = \frac{(1-\nu)q_r r^2}{2Eh} + \alpha r T. \quad (6.62)$$

Тут необхідно акцентувати увагу на те, що застосування формул теорії суцільних пружних сферичних оболонок (6.55), (6.61), (6.62) до задач деформування фулеренів з дискретною решітчастою структурою, в якій поняття товщини стінки, модуля пружності та коефіцієнта Пуассона матеріалу є умовними, базуються на численних експериментальних прямих та опосередкованих моделюваннях. У зв'язку з цим, в оболонковій моделі фулерену не використовується поняття товщини h оболонки і модуля пружності E її матеріалу, а вводиться величина Eh , яку можна виміряти безпосередньо на реальних мембранних та оболонкових (нанотрубках та наносферах) наноструктурах. Так, для фулеренів визначено $Eh \approx 3,30 \text{ ТПа} \cdot \text{Å}$, $\nu \approx 0,14 - 0,2$. Коефіцієнт лінійного термічного розширення фулеренів при кімнатній температурі $\alpha \approx 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$, однак він збільшується зі зростанням температури, а при дуже низьких температурах стає від'ємним.

6.3.3 Термодетормування фулерену в матриці полімерного композиту

При аналізі термодетормування фулерену в полімерній матриці будемо вважати її пружним середовищем. Для розрахунку використовуємо сферичну систему координат $Or\varphi\theta$. Вважаємо, що сферична оболонка фулерену 1 радіусу r_1 включена до пружного середовища 2 (рис.6.18), розміри якого необмежені.



Рисинук 6.11 – Схема сферичної оболонки фулерену 1 у пружному середовищі 2

Термонапружений стан середовища 2 визначається нормальними напруженнями $\sigma_r^{(2)}$, $\sigma_\varphi^{(2)}$, $\sigma_\theta^{(2)}$, які в даному випадку зручно описувати (на відміну від оболонки 1) за допомогою параметрів Ляме λ_2 і μ_2 [32]

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(2)}(r) &= (\lambda_2 + 2\mu_2)\varepsilon_r^{(2)} + \lambda_2(\varepsilon_\varphi^{(2)} + \varepsilon_\theta^{(2)}) - (3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2 T; \\ \sigma_\varphi^{(2)}(r) &= \sigma_\theta^{(2)}(r) = \lambda_2\varepsilon_r^{(2)} + 2(\lambda_2 + \mu_2)\varepsilon_\varphi^{(2)} - (3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2 T,\end{aligned}\tag{6.63}$$

Відносні деформації $\varepsilon_r^{(2)}$, $\varepsilon_\varphi^{(2)}$, $\varepsilon_\theta^{(2)}$, що тут використовуються, виражаються через радіальне переміщення

$$\varepsilon_r^{(2)}(r) = \frac{du_2}{dr}; \quad \varepsilon_\varphi^{(2)}(r) = \varepsilon_\theta^{(2)}(r) = \frac{u_2}{r}, \quad (6.64)$$

Рівняння термопружної рівноваги елемента середовища 2 представимо у вигляді [32]

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2\sigma_r - \sigma_\varphi - \sigma_\theta}{r} = 0; \quad (r > r_1), \quad (6.65)$$

Використовуючи заміни (6.64), (6.65), надамо йому форми:

$$\frac{d^2u_2}{dr^2} + \frac{2du_2}{rdr} - \frac{2}{r^2}u_2 = 0; \quad (r > r_1). \quad (6.66)$$

Рівняння (6.66) зводиться до вигляду, більш зручного для інтегрування

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u_2) \right] = 0; \quad (r > r_1). \quad (6.67)$$

Після двократного інтегрування (6.67) отримаємо його загальний розв'язок

$$u_2(r) = rC_1 + \frac{1}{r^2}C_2; \quad (r > r_1), \quad (6.68)$$

де C_1 і C_2 – константи інтегрування.

Таким чином, рівності (6.62) і (6.68) визначають загальні розв'язки

задач про контактне деформування оболонки фулерену та пружного середовища з центральною симетрією при зміні температури на величину T . Щоб описати їх спільне деформування, необхідно визначити константи q_r , C_1 і C_2 з умов контактної взаємодії тіла 1 та середовища 2 на поверхні $r = r_1$

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2(r_1); \\ q_r &= \sigma_r^{(2)}(r_1), \end{aligned} \quad (6.69)$$

та умови рівності нулю термонапруження $\sigma_r^{(2)}(r)$ на нескінченності:

$$\sigma_r^{(2)}(r) \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (6.70)$$

Для цього виразимо деформації (6.64) через переміщення (6.68)

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(2)}(r) &= C_1 - \frac{2}{r^3} C_2; \\ \varepsilon_\varphi^{(2)}(r) &= \varepsilon_\theta^{(2)}(r) = C_1 + \frac{1}{r^3} C_2, \end{aligned} \quad (6.71)$$

і підставимо їх у праві частини рівностей (6.63)

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(2)}(r) &= (3\lambda_2 + 2\mu_2)C_1 - \frac{4\mu_2}{r^3}C_2 - (3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2 T; \\ \sigma_\varphi^{(2)}(r) &= \sigma_\theta^{(2)}(r) = (3\lambda_2 + 2\mu_2)C_1 + \frac{2\mu_2}{r^3}C_2 - (3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2 T. \end{aligned} \quad (6.72)$$

З умови (6.70) у зв'язку з (6.72) маємо

$$(3\lambda_2 + 2\mu_2)C_1 - (3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2 T = 0 \quad (6.73)$$

$$C_1 = \alpha_2 T. \quad (6.74)$$

Для використання першої умови в системі (6.69) до відповідних символів в рівнянні (6.62) додамо індекс 1. Тоді, враховуючи (6.74), отримаємо

$$u_1 = \frac{(1-\nu_1)q_r r_1^2}{2E_1 h_1} + \alpha_1 r_1 T = \alpha_2 r_1 T + \frac{1}{r_1^2} C_2. \quad (6.75)$$

За допомогою (6.72) і (6.74) перепишемо також другу умову системи (16)

$$q_r = -\frac{4\mu_2}{r_1^3} C_2. \quad (6.76)$$

З рівнянь (6.75), (6.76) знаходимо

$$\begin{aligned} C_2 &= (\alpha_1 - \alpha_2) r_1^3 T \left/ \left[\frac{2(1-\nu_1)\mu_2 r_1}{E_1 h_1} + 1 \right] \right.; \\ q_r &= -4\mu_2 (\alpha_1 - \alpha_2) T \left/ \left[\frac{2(1-\nu_1)\mu_2 r_1}{E_1 h_1} + 1 \right] \right. \end{aligned} \quad (6.77)$$

Знаючи константи C_1 і C_2 , визначаємо всі функції напружено-

деформованого стану матриці 2

$$u_2(r) = r\alpha_2 T + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)r_1^3 T}{r^2} \bigg/ \left[\frac{2(1-\nu_1)\mu_2 r_1}{E_1 h_1} + 1 \right], \quad (6.78)$$

$$\varepsilon_r^{(2)}(r) = \alpha_2 T - \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)r_1^2 T}{r^3} \bigg/ \left[\frac{2(1-\nu_1)\mu_2 r_1}{E_1 h_1} + 1 \right], \quad (6.79)$$

$$\varepsilon_\varphi^{(2)}(r) = \varepsilon_\theta^{(2)}(r) = \alpha_2 T + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)r_1^3 T}{r^3} \bigg/ \left[\frac{2(1-\nu_1)\mu_2 r_1}{E_1 h_1} + 1 \right], \quad (6.80)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(2)}(r) &= -\frac{4\mu_2 r_1^3 (\alpha_1 - \alpha_2) T}{r^3} \bigg/ \left[\frac{2(1-\nu_1)\mu_2 r_1}{E_1 h_1} + 1 \right]; \\ \sigma_\varphi^{(2)}(r) &= \sigma_\theta^{(2)}(r) = \frac{2\mu_2 r_1^3 (\alpha_1 - \alpha_2) T}{r^3} \bigg/ \left[\frac{2(1-\nu_1)\mu_2 r_1}{E_1 h_1} + 1 \right]. \end{aligned} \quad (6.81)$$

З їх використанням обчислені переміщення u_1 фулерену та термонапруження $\sigma_r^{(2)}(r_1)$, $\sigma_\varphi^{(2)}(r_1) = \sigma_\theta^{(2)}(r_1)$ в полімерних матрицях при заданому значенні T зміни температури системи.

6.3.4 Результати досліджень

Наведемо результати розрахунків термдеформованих станів полімерних матеріалів, армованих фулеренами, зумовлених термомеханічною несумісністю параметрів матриці та арматури. В якості матеріалів матриці виберемо фенолформальдегід, епоксидну смолу,

полікарбонат, поліамід, полістирол, поліефір, поліпропілен. Відмітимо, що у загальному випадку їх термомеханічні властивості можуть залежати від їх складу, технології виготовлення та температури, тому в Таблиці 6.6 подані найбільш характерні значення їх параметрів Ламе λ і μ , границь міцності $[\sigma]_{\text{міц}}$ і коефіцієнтів лінійного термічного розширення α .

Таблиця 6.6 – Термомеханічні параметри полімерних матеріалів

№ п.п	Полімерний матеріал	λ , ГПа	μ , ГПа	$[\sigma]_{\text{міц}}$, МПа	$10^5 \alpha \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
1	Фенолформальдегід	1,18	1,56	48	3
2	Епоксидна смола	2,8	1,3	40-80	5
3	Полікарбонат	2,25	0,87	66	6,5
4	Поліамід	3,76	1,06	50-90	7
5	Полістирол	2,58	1,21	46	7
6	Поліефір	4,73	1,84	10-129	7,9
7	Поліпропілен	2,40	0,46	31-41	14

Розміри фулеренів змінюються в широких межах у зв'язку з числом атомів від $n=60$ (для найбільш стійкого та вивченого) до $n=1 \cdot 10^4$. При цьому для одношарових фулеренів їх радіуси набувають значення $r_1 = 0,35; 0,8 \text{ нм}$ і вище, для багатошарових цибулин їх r_1 знаходяться у межах від 2,5 до 5 нм. Хоча у виключних випадках він може досягати значення 50 нм. В наведених обчисленнях вважалось, що $r_1 = 0,35$ і $0,8 \text{ нм}$, $E_1 h_1 = 330 \text{ Н/м}$, $\nu_1 = 0,18$, $\alpha_1 = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, температура системи змінювалась

на величину $T = 100^\circ \text{C}$. Результати обчислень наведені в Таблиці 6.7.

Таблиця 6.7 – Значення параметрів термонапружених станів системи

	Полімерний матеріал матриці	r_1 нм	$10^3 u_1$ нм	q_r МПа	$10^3 N_\phi$ Н/м	$10^3 u_2(r_1)$ нм	$\sigma_r^{(2)}(r_1)$ МПа	$\sigma_\phi^{(2)}(r_1)$ МПа
1	Фенол- формальдегід	0,35	0,3519	12,45	2,179	0,3519	12,45	-6,226
		0,8	0,8099	12,40	4,961	0,8099	12,40	-6,202
2	Епоксидна смола	0,35	0,3532	20,75	3,632	0,3532	20,75	-10,38
		0,8	0,8165	20,63	8,253	0,8165	20,63	-10,34
3	Полікарбонат	0,35	0,3529	19,11	3,344	0,3529	19,11	-9,555
		0,8	0,8152	19,07	7,630	0,8152	19,07	-9,537
4	Поліамід	0,35	0,3539	25,39	4,443	0,3539	25,39	-12,69
		0,8	0,8201	25,33	10,133	0,8201	25,33	-12,66
5	Полістирол	0,35	0,3544	28,98	5,071	0,3544	28,98	-14,49
		0,8	0,8230	28,90	11,56	0,8230	28,90	-14,45
6	Поліефір	0,35	0,3577	50,62	8,859	0,3577	50,62	-25,31
		0,8	0,8401	50,42	20,17	0,8401	50,42	-25,21
7	Поліпропілен	0,35	0,3536	23,90	4,182	0,3536	23,90	-11,95
		0,8	0,8190	23,88	9,551	0,8190	23,88	-11,94

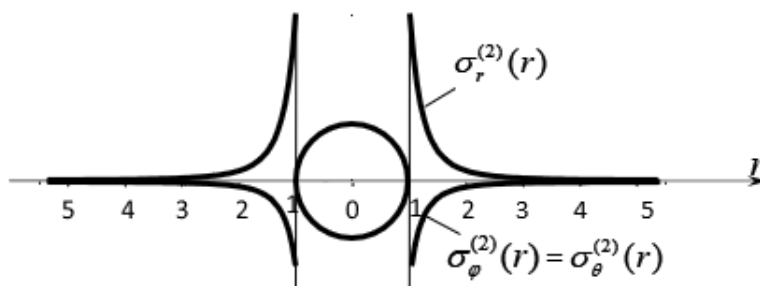
Для зручності співставлення цих даних позиції матеріалів розташовані в порядку збільшення їх коефіцієнту лінійного термічного розширення, що є основним параметром, який характеризує термомеханічну несумісність арматури та матриці.

Привертає до себе увагу та обставина, що у всіх випадках радіальне

переміщення u_1 фулерену практично не залежить від властивостей матеріалу матриці та залишається рівними приблизно 0,00035 і 0,0008 нм, відповідно, для першого та другого значень r_1 . Це зумовлено тим, що механічна жорсткість фулерену набагато більша жорсткості кожного з полімерів, вони не перешкоджають його майже вільному термічному розширенню і його стінка переміщується на величини $r_1 \alpha_1 T$, рівних $0,35 \cdot 1,0 \cdot 10^{-5} \cdot 100$ і $0,8 \cdot 1,0 \cdot 10^{-5} \cdot 100$ відповідно.

Можна також виділити, що зі збільшенням α термонапруження $\sigma_r^{(2)}(r_1)$, $\sigma_\phi^{(2)}(r_1)$ в полімерній матриці на інтерфейсній поверхні $r = r_1$ зростають, за виключенням позиції 7, що відрізняється вельми малим коефіцієнтом μ_2 , що також впливає на сумісність матеріалів. При заданій порівняно невеликій зміні температури $T = 100^\circ \text{C}$ ці напруження не досягли своїх граничних значень $[\sigma]_{\text{міц}}$ (див. Табл.6.6), крім можливо позиції 6. Однак при $T = 200^\circ \text{C}$ (також допустимого значення для полімерів) і його перевищення заграничні термонапруження можуть виникнути в епоксидній смолі, поліаміді, полістиролі, полієфірі та поліпропілені.

Більш повне уявлення про небезпеку заграничних термонапружень може бути сформовано в результаті розгляду функцій (6.81) їх розподілення в тілі матриці в радіальному напрямі (рис.6.19).



Рисинук 6.12 – Функції розподілення термонапружень в матеріалі матриці

Вони спадають обернено пропорційно кубу відстані від центра сфери 1 і виявляються практично невідчутними на відстані r_1 від її поверхні. Тому якщо навіть обчислені величини внутрішньоструктурних термонапружень перевищили їх границі міцності, то викликані ними тріщини мають довжини, що складають лише частку нанометра і вони сконцентровані в нано зоні в околі тіла фулерену. Крім того в результаті виникнення нанотріщин знімаються деформаційні несумісності і внутрішньоструктурні термонапруження перетворюються на нуль. При цьому, однак, губиться адгезія між тілом матриці та фулереном і його роль в армуванні композита стає нікчемною. В кінці цього аналізу відмітимо, що він наведений на основі уявлень, що використовуються в макропружності і без врахування ефектів пластичності, тим не менш, мабуть, він дозволяє виявити основні особливості механізму виникнення внутрішньоструктурних нанопшкоджень в неоднорідній системі.

6.4 Висновки до розділу 6

У розділі 6 на основі методів теорії термопружності поставлено та досліджено задачі про концентрацію термонапружень в полімерних матеріалах армованих карбоновими нанотрубками та фулеренами.

1. Сформульовано задачу математичного моделювання біфуркаційного випинання нанотрубок, попередньо напружених поздовжньою силою та крутним моментом. У замкненій формі побудовано співвідношення, що визначають дві форми спірального випинання та їх суперпозицій. Показано, що ліва та права орієнтації біфуркаційних спіралей відповідають лівій та правій орієнтаціям крутного моменту. Для нанотрубки будь-якої довжини, напруженої лише крутним моментом, формою втрати стійкості є одновиткова спіраль. Якщо нанотрубка попередньо напружена також

поздовжньою силою, біфуркаційними формами є багатовиткові спіралі, кількість витків яких зростає зі збільшенням як сил розтягнення, так і стиснення, а також довжини трубки.

2. Розроблена модель термонапружного деформування в полімерних матеріалах, що армовані карбоновими нанотрубками в умовах зміни в них однорідних і неоднорідних полів температур. Сформульована система розв'язувальних рівнянь, побудовані її розв'язки в замкненій формі.

Обчислені внутрішньоструктурні термонапруження в матриці, що складаються з епоксидної смоли, поліаміду, фенолформальдегіду, поліефіру, полікарбонату, полістирола і поліпропілену. Розглянуто два випадки, коли температура всієї системи змінилась на 50°C і коли температура стінки нанотрубки змінилась на 25°C , а матеріал матриці додатково нагрівся на 50°C . В обох випадках найбільші значення радіальних і колових термонапружень в матриці реалізуються на інтерфейсній поверхні, вони однакові за абсолютною величиною, мають різні знаки та спадають обернено пропорційно квадрату радіуса. Термонапруження, орієнтовні в осьовому напрямі, значно перевищують радіальні та колові термонапруження. При цьому колові зусилля змінились несуттєво, а термонапруження $\sigma_r^{(2)}(r_1)$, $\sigma_{\varphi}^{(2)}(r_1)$ в середовищі матриці зросли від 4% до 14%. У всіх випадках обчислені термонапруження, хоча і є помітними, менші ніж їх граничні значення і лише іноді наближаються до них.

Виконані дослідження свідчать про те, що в наслідок несумісності термомеханічних параметрів карбонових нанотрубок і полімерних матеріалів при зміні температур фаз композиту на їх основі використання нанотрубок в якості арматури може призводити не тільки до збільшення механічної міцності системи, але також і до зародження на інтерфейсних поверхнях додаткових концентраторів внутрішньоструктурних термонапружень, які при

спільній дії з експлуатаційними навантаженнями можуть викликати локальні нанопошкодження.

3. За допомогою методів термопружності сформульована система звичайних диференціальних рівнянь термодетормування композитів армованих вуглецевими фулеренами, в умовах зміни температури системи та за умови контактної механічної взаємодії фракцій композиту на інтерфейсній поверхні їх супряження. В замкненій формі побудовані розв'язки цих рівнянь, які характеризують пружне переміщення, деформації та напруження у фракціях композиту при заданих значеннях їх термомеханічних параметрів.

Показано, що для різних полімерних матеріалів суттєва різниця значень термомеханічних характеристик полімерних матриць та армованих фулеренів може призводити до несумісності термічних деформацій в композиті та виникненню в ньому значних внутрішньоструктурних напружень, які з підвищенням температури системи можуть досягати і навіть перевищувати границі міцності її матеріалу. При цьому, однак, зони концентрації цих напружень локалізуються в околах інтерфейсних поверхонь, а глибини проникнення викликаних ними пошкоджень не перевищують одного нанометра.

8. Результати досліджень даного розділу викладено у наступних публікаціях [22, 23, 74, 83, 149, 155, 156, 259, 260]

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена вирішенню актуальної науково-практичної проблеми встановлення закономірностей термонапруженого і термодетформованого станів шаруватих конструкцій дорожнього одягу доріг та мостів з урахуванням впливу несумісності термомеханічних параметрів матеріалів при зміні температури та на основі цього удосконалення таких конструкцій, а також удосконалення покриттів, армованих металевими і неметалевими стрижнями та неоднорідними включеннями, за рахунок раціонального підбору термомеханічних параметрів їх елементів, що мінімізує або виключає їх деформативну несумісність при температурних впливах в умовах сезонних та добових змін температури в Україні.

1. На основі аналізу механічних і математичних особливостей проблеми термопружного деформування шаруватих конструкцій дорожнього одягу доріг і мостів встановлено, що внутрішні та комбіновані механізми терморуйнувань особливо часто проявляються в композитних матеріалах, в яких термомеханічні властивості зв'язуючого та наповнювача мають термомеханічну несумісність. Вони особливо помітні в композитах, які не можуть вільно подовжуватися і скорочуватися у поздовжньому напрямку при збільшенні та зменшенні температури і в яких модулі пружності, коефіцієнти Пуассона та коефіцієнти лінійного температурного розширення мають різні значення.

Проведене моделювання задачі про виникнення термічних поздовжніх розтягуючих напружень та дотичних напружень у верхньому шарі асфальтобетонного покриття дороги показало, що причиною його відшарування може бути концентрація дотичних напружень на краях дороги. Причому встановлено, що рівень цих напружень не зменшується зі збільшенням товщини шару. В зв'язку з цим зроблено висновок, що зменшивши товщину цього шару на краях можна уникнути несумісності

модулів пружності, коефіцієнтів Пуассона та коефіцієнтів термічного розширення контактуючих шарів. Показано також, що значення термонапружень зменшується зі зменшенням коефіцієнтів розширення.

2. За допомогою розробленої обчислювальної системи виконано розрахунки концентрації термонапружень в шаруватих конструкціях дорожнього одягу дороги під час добової зміни температури. Встановлено, що пікові значення поздовжніх напружень розтягу у верхньому шарі покриття і зсувних напружень, локалізованих між першим і другим шарами, можуть бути причиною спостережуваних на практиці в зимовий час утворення на дорозі на початковій стадії руйнування поперечних тріщин і її розшарування. Отримані результати дозволяють сформулювати основні закономірності формування полів термопружних напружень. До найпомітнішого явища можна віднести утворення крайового ефекту у функції розподілу температури. У зв'язку з цим суміщення гладкої неоднорідності температурного поля і шаруватої неоднорідності термомеханічних властивостей фрагментів покриття приводить до концентрацій напружень, які є розривними функціями і змінюють свої знаки при еволюції температурного поля. Вони також значною мірою залежать від наявності обмежень, що перешкоджають вільному термопружному розширенню-звуженню окремих фрагментів системи. В зв'язку з цим можна прийти до висновку, що змінюючи термомеханічні параметри кожного із шарів дорожнього одягу можна цілеспрямовано змінювати в них поля температур і напружень, оптимізуючи конструктивні характеристики дороги.

3. Проведене теоретичне моделювання термонапружень у композитах які містять сферичні включення, яке показало, що додаткові внутрішні термонапруження концентруються на контактній сферичній поверхні, радіальні та колові термонапруження рівні за модулем, мають різні знаки і зменшуються пропорційно кубу радіальної координати. Такі поля

термонапружень особливо несприятливі для крихкого матеріалу матриці, який погано чинить опір розтягуючим напруженням, що в даному випадку обов'язково реалізуються як для додатних, так і від'ємних приростів температури. Отримані аналітичні вирази для термонапружень дозволяють досліджувати міцність асфальтобетонів з мінеральними наповнювачами.

На базі отриманих розв'язків диференціальних рівнянь, що описують термопружне деформування асфальтобетонних матеріалів з гумовими включеннями в умовах температурних змін встановлені причини пришвидшеної деградації асфальтобетонних покриттів з гумовими включеннями, що пов'язані з механічною несумісністю гуми та широкими межами зміни її коефіцієнта термічного розширення. За допомогою аналітичних обчислень продемонстровано, що пом'якшення додаткових термомеханічних дефектів та їх усунення можна досягти за рахунок зниження термомеханічної несумісності властивостей фаз композиту шляхом бітумного модифікування гуми. При цьому ефективність цього способу підвищується зі збільшенням глибини проникнення модифікованого шару в гумове зерно.

4. За результатами математичного моделювання проблеми концентрації внутрішньоструктурних термонапружень у композиті з трубчастою, стрижневою та волокнистою арматурою, яке здійснювалось на основі методів термопружності з застосуванням моделі пружного середовища з циліндричним включенням встановлено, що зміна температури в такій системі супроводжується генеруванням додаткових внутрішніх радіальних та колових термонапружень у матеріалі матриці. Ці напруження концентрується на поверхні контакту матриці та арматури і швидко зменшуються пропорційно квадрату радіальної координати. При цьому при суттєвій термомеханічній несумісності матеріалів матриці та арматури ці

додаткові термонапруження можуть значно перевищувати межі міцності матеріалу матриці та приводити до її локальних пошкоджень та руйнувань.

5. Подані оцінки переваг та недоліків матеріалів з фібергласовою, фіберкарбоновою, фібербазальтовою, фіберарамідною арматурами. Результати обчислень внутрішньоструктурних термонапружень в армованому відповідними видами стрижнів асфальтобетонному середовищі при зміні температури системи на -20°C і вибраних значеннях параметрів арматури показали, що отримані значення термонапружень є співставними з межами міцності асфальтобетону, однак, в найменш сприятливих умовах виявляється система з фібербазальтовою арматурою, що володіє високим значенням КЛТР. Оскільки в цьому випадку $\alpha_1 > \alpha_2$, радіальні напрямки в матриці виявились розтягуючими, а колові – стискаючими. Тому в критичному стані асфальтобетон відривається від стрижня та зв'язок між ними втрачається. В той же час, проведені аналогічні дослідження для двох марок цементобетону показали, що для обох цих видів тільки колові термонапруження в цементобетоні виявились стискаючими, а всі інші напруження (в тому числі й радіальні напруження в цементобетоні) – розтягуючими і для всіх видів арматури вони помітно перевищують (в 2, а для деяких видів в 4 рази) границі міцності цементобетону. У зв'язку з цим можна зробити висновок, що при розглянутих умовах в малому околі армуючого стрижня завжди будуть виникати локалізовані пошкодження у вигляді колових та радіальних тріщин, що прибирають механічний зв'язок між арматурою та матрицею. Цей зв'язок частково може зберігатись, якщо арматура рифлена та конструктивно скомбінована у вигляді сіток чи решіток. Відмічені негативні ефекти можна пояснити суттєвим перевищенням (в 2, а для фібербазальту в 5 разів) значень термічного розширення всіх видів арматури цієї величини цементобетону. Як видно, всі вони мають бути

прийнятими до уваги при будівництві цементобетонних споруд в регіонах з великими сезонними перепадами температури.

6. Розроблено теоретичні моделі термонапруженого моделювання цементобетонних та асфальтобетонних матеріалів з порами і капілярами, частково або повністю заповнених водою. За допомогою методів математичного моделювання на базі теорії термопружності отримані в замкненій формі аналітичні вирази, що пов'язують параметри термодетформованого стану системи з термомеханічними параметрами її фаз на етапах зниження температури води, її замерзання і подальшого зменшення температури. Моделювання проведено з урахуванням специфічних властивостей води та їх зміни зі зміною температури. Так, вода є рідкою, з технічної точки зору, абсолютно нестисливим середовищем. При температурі, яка перевищує $T = +4^{\circ}\text{C}$, вона має змінний додатний коефіцієнт об'ємного температурного (а тому і лінійного) розширення. При $T = +4^{\circ}\text{C}$ цей коефіцієнт перетворюється на нуль, і при $T < +4^{\circ}\text{C}$ він стає від'ємним. При $T = 0^{\circ}\text{C}$ вода перетворюється на лід, об'єм якого на 9% більший об'єму води і який на відміну від неї є пружним тілом, що стискається. Як показали обчислення, вже на цьому етапі термонапруження в матриці, які викликані збільшенням об'єму замерзаючого льоду, навіть при неповному заповненні водою внутрішніх порожнин матриці (але який перевищує 91% їх об'єму) набагато перевищують межі міцності як асфальтобетону, так і цементобетону. При подальшому зниженні температури лід у мікропорожнинах поводить себе як звичайне пружне тіло з відповідними значеннями модуля пружності, коефіцієнта Пуассона та додатного коефіцієнта температурного лінійного розширення. Оскільки в результаті часткових руйнувань матриці в околі вихідних порожнин їх об'єм збільшився, подальші відлиги і заморозки, що повторюються,

інтенсифікують ефекти мікроруйнувань матриці і явище її мікророзтріскування і мікроруйнування стає глобальним.

7. Використовуючи розроблені моделі та методи визначення внутрішньоструктурних термонапружень в полімерних матеріалах, армованих карбоновими нанотрубками було проведено розрахунки термонапруженого стану матриць, що складаються з епоксидної смоли, поліаміду, фенолформальдегіду, поліефіру, полікарбонату, полістирола і поліпропілену в умовах зміни в них однорідних і неоднорідних полів температур. Розглянуто два випадки, коли температура всієї системи змінилась на 50°C і коли температура стінки нанотрубки змінилась на 25°C , а матеріал матриці додатково нагрівся на 50°C . В обох випадках найбільші значення радіальних і колових термонапружень в матриці реалізуються на інтерфейсній поверхні, вони однакові за абсолютною величиною, мають різні знаки та спадають обернено пропорційно квадрату радіуса. При цьому термонапруження, орієнтовні в осьовому напрямі, значно перевищують радіальні та колові термонапруження. Двократне зменшення температури нанотрубки, в другому випадку, призвело до майже двократного зменшення її радіальних переміщень. При цьому колові зусилля змінились несуттєво, а радіальні та колові термонапруження в середовищі матриці зросли від 4% до 14%. Отримані результати показали, що в наслідок несумісності термомеханічних параметрів карбонових нанотрубок і полімерних матеріалів при зміні температур фаз композиту на їх основі, використання нанотрубок в якості арматури може призводити не тільки до збільшення механічної міцності системи, але також і до зародження на інтерфейсних поверхнях додаткових концентраторів внутрішньоструктурних термонапружень, які при спільній дії з експлуатаційними навантаженнями можуть викликати локальні нанопшкодження.

Дослідження термодетформованих станів полімерних матеріалів,

армованих фулеренами, зумовлених термомеханічною несумісністю параметрів матриці та арматури показали, що для різних полімерних матеріалів суттєва різниця значень термомеханічних характеристик полімерних матриць та армованих фулеренів може призводити до несумісності термічних деформацій в композиті та виникненню в ньому значних внутрішньоструктурних напружень, які з підвищенням температури системи можуть досягати і навіть перевищувати границі міцності її матеріалу. При цьому, однак, зони концентрації цих напружень локалізуються в околах інтерфейсних поверхонь, а глибини проникнення викликаних ними пошкоджень не перевищують одного нанометра.

8. Моделювання концентрації внутрішньоструктурних термонапружень в шаруватих конструкціях дорожнього одягу доріг та мостів дозволить понизити їх рівень та уникнути утворення локальних дефектів, тріщин, розшарувань і деструкцій. Це дасть змогу за рахунок підвищення міцності і довговічності конструкцій дорожнього одягу значно зменшити витрати на їх ремонти, що сприятиме забезпеченню сталого розвитку України. Багатоваріантні цілеспрямовані розрахунки на міцність та дослідження дорожньої конструкції при різних значеннях її геометричних та фізико-математичних параметрів дають змогу згладити концентратори напружень і деформацій та підвищити довговічність системи. Це дозволить успішно вирішувати проблеми відновлення та розвитку мережі автомобільних доріг України, оцінювати експлуатаційний стан доріг, раціонально розподіляти ресурси на їх утримання, а також більш точно прогнозувати міцність і довговічність дорожнього одягу, оцінювати ефективність проектних рішень та застосування нових матеріалів і технологій.

9. За результатами роботи отримано охоронні документи: Патент на корисну модель № 155834 «Спосіб виключення ефекту термосилового

відшарування асфальтобетонного покриття від крайових ділянок жорсткої основи дороги або мосту при температурних змінах»; Патент на корисну модель № 152211 «Спосіб зменшення додаткових контактних термонапружень в асфальтобетонних дорожніх покриттях, армованих стрижнями, при несумісності термомеханічних параметрів матеріалів конструкції в умовах температурних впливів»; Патент на корисну модель № 149263 «Спосіб виключення критичних напружень в зоні поперечного розвантажуючого розрізу багатошарового асфальтобетонного дорожнього покриття»; Свідоцтво про право автора на твір: комп'ютерна програма «Комп'ютерний аналіз впливу вертикальних тріщин та розшарувань в дорожньому покритті на поля деформацій та напружень в його конструкції» Свідоцтво про право автора на твір: «Математичні формули для обчислення додаткових термонапружень в армованих дорожніх покриттях при термомеханічній несумісності матеріалів покриття і арматури»; Свідоцтво про право автора на твір: Комп'ютерна програма «Комп'ютерний аналіз впливу термомеханічних характеристик матеріалів дорожнього покриття на його термонапружений стан».

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Богомолів В.О., Жданюк В. К., Разніцин І. Л., Богомолів С. В., Цинка А. О., Критерій довговічності асфальтобетонних шарів дорожніх одягів, *Вісник ХНАДУ*. 2017 Вип. 76. С. 74-79.
http://nbuv.gov.ua/UJRN/vhad_2017_76_14
2. Богомолів В.О., Жданюк В.К., Богомолів С.В. Щодо критеріїв міцності для дорожніх одягів нежорсткого типу. *Автошляховик України*. 2011. № 5. С. 29-33.
3. Гайдайчук В.В., Густелєв О.О., Шевчук Л.В., Шлюнь Н.В. Термопружне деформування шаруватого покриття на вгнутій ділянці дороги. Науково-технічний збірник. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2019. №. 102, С. 180-190. [DOI: 10.32347/2410-2547.2019.102.180-190](https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.102.180-190)
4. Гайдайчук В.В., Мозговий В.В., Густелєв О.О., Шевчук Л.В. Аналіз деформування дорожнього покриття на металевій плиті південного моста. *Промислове будівництво та інженерні споруди*. 2019. №1. С. 31-39.
5. Гайдайчук В.В., Мозговий В.В., Заєць Ю.О., Шевчук Л.В. Моделювання напружено-деформованого стану конструкції дорожнього одягу під дією транспортних навантажень. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2017. Вип. 99. С. 45-57.
6. Гайдайчук В.В., Мозговий В.В., Заєць Ю.О., Шевчук Л.В. Чисельне моделювання термонапруженого стану шаруватого покриття автомобільної дороги. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2017. Вип. 98. С. 56-71.
7. Гамеляк І.П., Даценко В.М. Забезпечення надійності конструкції дорожнього одягу за несною здатністю при капітальному ремонті та реконструкції. *Автошляховик України*. 2015. №5 (247). С. 40-43.
8. Гембара Н. О. Вплив протикорозійного багатошарового покриття на термопружність круглих пластин, *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2013. Т. 49. № 6. С. 50-54.
9. Гудрамович В.С. Теорія повзучості та її застосування до розрахунку елементів тонкостінних конструкцій. Київ: Наукова думка. 2005. 221 с.

10. Гуляєв В. І., Шлюнь Н. В. Математичне моделювання внутрішньоструктурних термонапружень, що викликаються полями змінної температури в композитах зі стрижневою арматурою. *Дороги і мости*. Київ, 2023. Вип. 28. С. 58–69. <https://doi.org/10.36100/dorogimosti2023.28.068>
11. Гуляєв В., Шлюнь Н., Шевчук Л., Заєць Ю.. Специфіка термомеханічного зародження внутрішніх дефектів в бітумній структурі з гумовими включеннями. *Впровадження інноваційних матеріалів і технологій при проєктуванні, будівництві та експлуатації об'єктів транспортної інфраструктури в рамках програми «Велике будівництво»*: збірник тез доповідей Міжнародної конференції. м. Київ, 24-25 листопада 2022 року. Київ: НТУ, с.111.
12. Гуляєв В.І., Гайдайчук В.В. Мозговий В.В., Густелєв О.О., Заєць Ю.О., Шевчук Л.В., Шлюнь Н.В. Термопружний стан багатошарових дорожніх покриттів. Київ: НТУ. 2018. 252 с. ISBN 978-966-632-299-2
13. Гуляєв В.І., Мозговий В.В., Шлюнь Н.В., Заєць Ю.О., Білобрицька О.І., Шевчук Л.В. Внутрішньоструктурні термонапруження в композитних матеріалах з термомеханічно несумісними параметрами їх фракцій. Київ: Вид. Ліра-К, 2023. 302 с. ISBN 978-617-520-680-5
14. Гуляєв В.І., Гайдайчук В.В., Густелєв О.О., Шевчук Л.В. Термонапружений стан шарувато-неоднорідних дорожніх покриттів. *Прикладна механіка*. 2021. 57. №1. С. 100-114.
15. Гуляєв В.І., Гайдайчук В.В., Мозговий В.В., Заєць Ю.О., Шевчук Л.В. Дослідження термонапруженого стану конструкцій дорожнього одягу. *Промислове будівництво та інженерні споруди*. 2017. №1. С. 6-12.
16. Гуляєв В.І., Мозговий В.В., Гайдайчук В.В., Заєць Ю.О., Шевчук Л.В. Деякі закономірності термопружного деформування асфальтобетонного покриття дороги. *Вісник Національного транспортного університету. Серія «Технічні науки»*. Науково-технічний збірник. 2017. Вип. 37. С. 80-92.
17. Гуляєв В.І., Мозговий В.В., Густелєв О.О., Шлюнь Н.В., Куцман О.М., Баран С.А. Дослідження напружено-деформованого стану дорожнього

одягу з укріпленою основою під поперечними тріщинами і швами. *Вісник Національного транспортного університету*. 2019. №. 3(43). С. 26-38. [DOI: 10.33744/2308-6645-2019-1-43-026-038](https://doi.org/10.33744/2308-6645-2019-1-43-026-038)

18. Гуляєв В.І., Мозговий В.В., Шлюнь Н.В., Заєць Ю.О. Внутрішньоструктурні термонапруження в асфальтобетонних і цементобетонних матеріалах, підсилених фібергласовою, фіберкарбоновою, фібербазальтовою та фіберарамідною арматурою. *НВЖ «Автошляховик України»*. №3. 2023. с.62-69. [DOI: 10.33868/0365-8392-2023-3-275-62-69](https://doi.org/10.33868/0365-8392-2023-3-275-62-69)

19. Гуляєв В.І., Мозговий В.В., Шлюнь Н.В. Чому в деяких регіонах у конструкціях мостів заборонена сталева арматура з епоксидним покриттям? *НВЖ «Автошляховик України»*. №2. 2023. с.48-56. [DOI: 10.33868/0365-8392-2023-2-274-48-56](https://doi.org/10.33868/0365-8392-2023-2-274-48-56)

20. Гуляєв В.І., Шевчук Л.В., Куцман О.М. Сезонний перерозподіл полів напружень в конструкціях шаруватих покриттів доріг під дією транспортних навантажень. *Вісник Національного транспортного університету. Серія «Технічні науки». Науково-технічний збірник*. 2018. Вип. 40. С. 98-105.

21. Шлюнь Н., Гринчак А. Математичне моделювання додаткових внутрішньоструктурних термонапружень в композитах із неоднорідними сферичними включеннями. *Всеукраїнська наукова конференція здобувачів освіти і молодих учених «Відбудова транспортної інфраструктури України»*. К.: НТУ, 2023. С. 99. ISBN: 978-966-632-319-7

22. Гуляєв В.І., Шлюнь Н.В. Мікротермомеханічні ефекти на інтерфейсних поверхнях композитів, які армовані карбоновими нанотрубками, в високоградієнтних полях температури. *LXXX наукова конференція професорського-викладацького складу, аспірантів, студентів та співробітників відокремлених структурних підрозділів університету*. К.: НТУ. 2024. С. 853-854.

23. Гуляєв В.І., Шлюнь Н.В. Проектування оптимальних траєкторій свердловин. *Вісник НТУ. Серія «Технічні науки». Науково-технічний збірник*.

К. : НТУ. 2021. Вип. 1 (49). С. 109-116. [DOI: 10.33744/2308-6645-2021-1-48-109-116](https://doi.org/10.33744/2308-6645-2021-1-48-109-116)

24. Гуляєв В.І., Шлюнь Н.В. Три механізми виникнення термонапружень і терморуїнувань у пружних тілах. *Вісник Національного транспортного університету. Серія «Технічні науки». Науковий. науково-виробничий журнал*. К.: НТУ. 2023. Вип. 3 (57) . С. 43-49. [DOI: 10.33744/2308-6645-2023-3-57-043-049](https://doi.org/10.33744/2308-6645-2023-3-57-043-049)

25. Дорожко Є.В. Вплив розрахункової температури асфальтобетонних шарів покриття на зсувостійкість земляного полотна. *Вісник ХНАДУ*. вип. 86. 2019. т. II. С.83-87. [DOI: 10.30977/BUL.2219-5548.2019.86.2.83](https://doi.org/10.30977/BUL.2219-5548.2019.86.2.83)

26. Жданюк В.К., Костін Д.Ю., Петров В.І. Дослідження впливу гумової крихти як стабілізуювальної домішки на властивості щебенево-мастикового асфальтобетону. *Вісник ХНАДУ*. 2019. Вип.86. Т.ІІ. С. 19-23.

27. Заєць Ю.О. Про механізм термопружного розшарування дорожніх покриттів при добових змінах в них полів температури. *Вісник Національного транспортного університету. Серія «Технічні науки». Науково-технічний збірник*. 2018. Вип. 40. С. 114-113.

28. Карвацький А. Я., Мікульонок І. О., Лазарєв Т. В., Короленко К. М.. Про визначення модуля пружності одношарових вуглецевих нанотрубок методами структурної механіки. *Mech. and Advanced Technol.* 2019. №1 (85). 13-25.

29. Карнаухов В.Г. Зв'язані задачі термов'язкопружності. Київ: Наукова думка. 1982. 206 с.

30. Кіт Г. С., Мартиняк Р. М. Термопружність структур з теплопровідними тріщинами. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2012. Т.46. №1. С. 11-20.

31. Клименко М.І., Гребенюк С.М., Богуславська А.М., Гаценко А.В. Напружено-деформований стан гумових та гумовокордних віброізоляторів в умовах температурного та нелінійного деформування. *Геотехнічна механіка: Міжвід. зб. наук. праць*. Дніпро: ІГТМ НАНУ. 2018. Вип. 138. С. 196-204.

32. Коваленко А.Д. Основи термопружності. Київ: Наукова думка. 1970. 307с.
33. Коваленко А.Д. Термопружність. - Київ: Вища школа. 1975. 307 с.
34. Ковальов Я. Н. Автомобільні дороги. Київ: Вища школа. 2006. 352 с.
35. Ковальчук Б.І., Лебедєв А.А., Уманський С.Е. Механіка непружного деформування матеріалів та елементів конструкцій. Київ: Наук. Думка. 1987. 280 с.
36. Левківський Д. Модифікований метод прямих в задачах термопружності вісесиметричних тіл. *Містобудування та територіальне планування*. 2019. №70. С. 315–332.
37. Лисенков Е. А., Гаголкіна З. О., Лобко Є. В., та ін.. Вплив вуглецевих нанотрубок на механічні властивості сітчастих поліуретанів. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2017. 53. № 1. 18-24.
38. Лунєва Г.І. Старі шини – і небезпечний, і корисний вид відходів. *Рециклінг відходів*. 2008. №1(13). С. 2-10.
39. Мозговий В.В., Онищенко А.М., Різніченко О.С. Методика проектування асфальтобетонних шарів зносу для міських умов. *Вісник НТУ*. 2010. Част. 1. С. 46-50.
40. Мозговий В.В. Підвищення гідроізоляційної здатності асфальтобетонного покриття. *Проблеми механіки та будівництва транспортних споруд: Праці II Міжнародної науково-практичної конференції*. Алмати. 2015. С.54-60.
41. Новацький В. Динамічні задачі термопружності. Київ: Наукова думка.. 1970. 256 с.
42. Оксак С.В. Вплив гумової крихти на властивості бітуму та асфальтобетону. *Вісник ХНАДУ*. 2017. Вип. 79. С. 133-137.
43. Пат. 149263 Україна. МПК Е 01С 3/06 (2006.01) Спосіб виключення критичних напружень в зоні поперечного розвантажуючого розрізу багатошарового асфальтобетонного дорожнього покриття (Л.В. Шевчук. Н.В.

Шлюнь, О.І. Білобрицька, С.А. Баран, О.М. Куцман) заявник та власник Національний транспортний університет. № u202103651 24.06.2021: опубл. 27.10.2021. Бюл. №43.

44. Пат. 152211 Україна. МПК E01B3/14 E01B31/28 Спосіб зменшення додаткових контактних термонапружень в асфальтобетонних дорожніх покриттях, армованих стрижнями, при несумісності термомеханічних параметрів матеріалів конструкції в умовах температурних впливів (В.І. Гуляєв, О.І. Білобрицька, Н.В. Шлюнь, Л.В. Шевчук, О.М. Куцман, І.І. Гринчак) заявник та власник Національний транспортний університет. № u202202047 04.01.2023: опубл. 04.01.2023. Бюл. № 1/2023.

45. Пат. 155834 Україна. МПК (2024.01) E01C 7/00 E01C 11/00 Спосіб виключення ефекту термосилового відшарування асфальтобетонного покриття від крайових ділянок жорсткої основи дороги або мосту при температурних змінах (В.І. Гуляєв, Н.В. Шлюнь, О.І. Білобрицька, Л.В. Шевчук, С.А. Баран, І.І. Гринчак) заявник та власник Національний транспортний університет. № u 2022 02048 17.04.2024: опубл. 17.04.2024. Бюл. № 16.

46. Пелех Б.Л., Максимук А.В., Коровайчук І.М. Контактні задачі для шаруватих елементів конструкцій тіл з покриттями. Київ: Наукова думка. 1988. 279 с.

47. Перельмутер А. В., Слівнер В.І. Розрахункові моделі споруд і можливість їхнього аналізу. К.: Видавництво «Сталь». 2007. 600 с.

48. Писаренко Г.С. Опір матеріалів. К. Вища школа. Головне видавництво. 1986. 775 с.

49. Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. Рівняння і крайові задачі теорії пластичності та повзучості: Спр. пос. Київ: Наук. Думка. 1981. 494 с.

50. Радовский Б.С. Проблеми механіки дорожньо-будівельних матеріалів і дорожніх одягів. Київ: ПоліграфКонсалтинг. 2003. 252 с.

51. Радовский Б.С., Супрун А.С., Казаков І.І. Проектування дорожніх одягів для руху великовантажних автомобілів. Київ: Будівельник. 1989. - 168 с.

52. Радовский Б.С., Телтаев Б.Б. В'язкопружні характеристики бітуму та їх оцінка за стандартними показниками. Монографія. Алма-Ата: БІЛІМ. 2013. 152 с.

53. Рудаков К.М., Яковлєв А.І. Моделювання великих деформацій. Повідомлення 5. температурні деформації. *Вісник Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут". Сер.: Машинобудування*. 2015. № 1 (73). С. 43-51.

54. Свідоцтво про право автора на твір: комп'ютерна програма «Комп'ютерний аналіз впливу термомеханічних характеристик матеріалів дорожнього покриття на його термопружний стан» (Шевчук Л.В., Шлюнь Н.В., Білобрицька О.І., Баран С.А.). № 96561. 2020 р.

55. Свідоцтво про право автора на твір: комп'ютерна програма «Комп'ютерний аналіз впливу вертикальних тріщин та розшарувань в дорожньому покритті на поля деформацій та напружень в його конструкції» (Шлюнь Н.В., Шевчук Л.В., Білобрицька О.І., Куцман О.М.). № 96560. 2020 р.

56. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір Науковий твір: «Математичні формули для обчислення додаткових термонапружень в армованих дорожніх покриттях при термомеханічній несумісності матеріалів покриття і арматури» (В.І. Гуляєв., Н.В. Шлюнь., Л.В. Шевчук). №115933. 19.01.2023

57. Середницька Х. І. Задача термопружності для закритої міжфазної теплоізолюваної щілини в різнорідному біматеріалі [Електронний ресурс]. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2020. Вип. 32. С. 69-80.

58. Сєдов А.В., Фоменко О.О. Дослідження зносу асфальтобетонного покриття з урахуванням впливу температури, вологості покриття і наявності

агресивних середовищ. *Вісник ХНАДУ*. 2021. вип. 92. т. 2. С.68-73. [DOI: 10.30977/BUL.2219-5548.2021.92.2.68](https://doi.org/10.30977/BUL.2219-5548.2021.92.2.68)

59. Солодкий С.Й. Дорожні одяги: навч. посібник. Львів: Видавництво Львівської політехніки. 2015. 164 с. ISBN 978-617-607-826-5.

60. Солодкий С.Й., Толмачов С.М. Бетонні дорожні та аеродромні покриття: навч. посібник. Львів: Видавництво Львівської політехніки. 2016. 132 с. ISBN 978-966-941-030-6.

61. Талах С. М., Дубик О. М., Лисницька К. М. Чисельний розрахунок напружено-деформованого стану нежорстких дорожніх одягів, відновлених за технологією холодного ресайклінгу. *Scientific Journal «ScienceRise»*. 2017. №1/2(30). С. 31-38

62. Телтаєв Б.Б. Деформації та напруження в нежорстких конструкціях дорожніх одягів. Алмата: Казахська академія транспорту і комунікацій ім М. Тинишбаєва. 1999. 217 с.

63. Третьяченко Г.Н., Карпинос Б.С., Барило В.Г. Руйнування матеріалів під час циклічних нагрівань. Київ: Наук. думка. 1993. 288 с.

64. Уржумцев Ю.С., Максимов Р.Д. Прогностика деформативності полімерних матеріалів.– Рига: Зинатне. 1975. 416 с.

65. Хлібишин Ю.Я., Почапська І.Я., Гринишин О.Б., Нагурський А.О. Дослідження модифікації дорожніх бітумів гумовою крихтою. *Вісник Національного університету «Львівська політехніка» Хімія. технологія речовин та їх застосування*. 2014. № 787. С.144-148.

66. Шевчук Л.В., Шлюнь Н.В., Тишкевич М.М. Термопружні деформації асфальтобетону на металевій плиті Південного моста. *LXXV наукова конференція професорського-викладацького складу, аспірантів, студентів та співробітників відокремлених структурних підрозділів університету*. К.: НТУ. 2019. С. 505.

67. Шлюнь Н. В. Особливості термомеханічної подібності в армованих композитних середовищах. *International scientific-practical conference*

“Science, education and technology: global trends and regional aspects”: conference proceedings. (Tampere, Finland, July 11, 2024). с.34-36.

68. Шлюнь Н. В., Заєць Ю. О. Термомеханічне зародження мікропорожнин в околі пор та капілярів дорожніх матеріалів заповнених водою. *International scientific-practical conference “Current issues of science, education and technology in the context of modern challenges”*: conference proceedings (Aarhus, Denmark, June 29, 2024). Aarhus, Denmark: Scholarly. С.48-49.

69. Шлюнь Н., Шевчук Л. Про деякі закономірності сезонного перерозподілу полів напружень у конструкціях шаруватих покривів під дією транспортних навантажень *Міжнародна науково-практична конференція «Інноваційні підходи у відновленні транспортної інфраструктури в особливих умовах воєнного стану: виклики та перспективи»*. К.: НТУ. 2024. 660 с.

70. Шлюнь Н.В. Еволюція термонапружень в цементобетоні на стінці капіляру частково або повністю заповненого водою при падінні температури. *Перспективи розвитку автомобільного транспорту та інфраструктури: збірка тез доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції. Київ: ДП ДержавтотрансНДІпроект*. 2023. ст.96-90.

71. Шлюнь Н.В., Білобрицька. О.І., Заєць Ю.О., Шевчук Л.В. Умови відсутності та три механізми зародження термонапружень в пружних тілах . *Вісник Національного транспортного університету. Серія «Технічні науки»*. Науково-технічний збірник. К. НТУ. 2023. Вип. (55). с. 323-344. [DOI: 10.33744/2308-6645-2023-1-55-323-334](https://doi.org/10.33744/2308-6645-2023-1-55-323-334)

72. Шлюнь Н.В. Моделювання термонапруженого стану композиту при несумісних термомеханічних властивостях його матриці та наповнювача. *LXXIX наукова конференція професорсько-викладацького складу, аспірантів, студентів та співробітників відокремлених структурних підрозділів університету: тези доповідей*. К.: НТУ. 2023. С. 656.

73. Шлюнь Н.В. Особливості термонапруженого стану асфальтобетонного дорожніх покриттів з гумовими включеннями. *Дороги і мости*. Київ. 2022. Вип. 26. - С. 124-137.

74. Шлюнь Н.В. Плоскі та просторові періодичні згинні коливання подовжених карбонових нанотрубок. *Вісник Національного транспортного університету. Серія «Технічні науки». Науковий. науково-виробничий журнал*. К.: НТУ. 2024. Вип. 1 (58). DOI: [10.33744/2308-6645-2024-1-58-203-211](https://doi.org/10.33744/2308-6645-2024-1-58-203-211) С. 203–211.

75. Шлюнь Н.В. Пониження концентрації термонапружень у бітумному матеріалі з модифікованими гумовими крихтами. *НВЖ «Автошляховик України»*. №2. 2022. с.60-66. DOI: [10.33868/0365-8392-2022-2-270-60-66](https://doi.org/10.33868/0365-8392-2022-2-270-60-66)

76. Шлюнь Н.В. Теоретичне моделювання зародження внутрішніх прихованих термічних дефектів у бітумному середовищі з гумовими включеннями. *«Автомобільні дороги і дорожнє будівництво» Науково-технічний збірник*. 2023. Вип. 114. с.106-121. DOI:[10.33744/0365-8171-2023-114.1-106-121](https://doi.org/10.33744/0365-8171-2023-114.1-106-121)

77. Шлюнь Н.В., Білобрицька О.І., Шевчук Л.В., Заєць Ю.О. Концентрація термонапружень в цементобетоні в околі капіляра. частково або повністю заповненого водою при її замерзанні. *Автошляховик України*. №4. 2023. с.38-48. DOI: [10.33868/0365-8392-2023-4-276-39-49](https://doi.org/10.33868/0365-8392-2023-4-276-39-49)

78. Шлюнь Н.В., Заєць Ю.О. Про внутрішній механізм термопошкоджень в армованих композитах з термомеханічною несумісністю їх фаз. *Вісник Національного транспортного університету. Серія «Технічні науки». Науковий журнал*. 2022. Вип. 3(53). С. 427-432.

79. Шлюнь Н.В., Заєць Ю.О., Берлянд М.С. Теоретичний аналіз внутрішньоструктурних термонапружень в композиті. що армований суцільними стрижнями. *LXXX наукова конференція професорського-викладацького складу. аспірантів. студентів та співробітників відокремлених структурних підрозділів університету*. К.: НТУ. 2024. С. 759.

80. Шлюнь Н.В. Термонапружений стан дорожніх покриттів. III Міжнародна науково-практична конференція «Сучасні методи і проблемно-орієнтовані комплекси розрахунку конструкцій і їх застосування у проектуванні і навчальному процесі» вересень 2019. Р. 12-15.

81. Шлюнь Н.В., Білобрицька О.І. Сингулярно збурені задачі термомеханіки шаруватих дорожніх покриттів. *Вісник Національного транспортного університету*. 2020. №. 1(46). С. 455-461. DOI: [10.33744/2308-6645-2020-1-46-455-461](https://doi.org/10.33744/2308-6645-2020-1-46-455-461)

82. Шлюнь Н.В. Термомеханічна подібність при експериментальному та теоретичному моделюванні термоміцності дорожніх матеріалів та конструкцій. «Автомобільні дороги і дорожнє будівництво» *Науково-технічний збірник*. 2023. Вип. 113. с.98-107. DOI: [10.33744/0365-8171-2023-113.1-098-107](https://doi.org/10.33744/0365-8171-2023-113.1-098-107)

83. Шлюнь Н.В., Заєць Ю.О. Термомеханічні деформування карбонових нанотрубок в полімерних матрицях. «Автомобільні дороги і дорожнє будівництво» *Науково-технічний збірник*. 2024. Вип. 115(1). с.67-80. DOI: [10.33744/0365-8171-2024-115.1-067-080](https://doi.org/10.33744/0365-8171-2024-115.1-067-080)

84. AASHTO. Mechanistic-Empirical Pavement Design Guide. Interim Edition: a manual of practice. 2008.

85. Abbas Mohajerani, Lucas Buznett, John V. Smith, Stefan Markovski, Glen Rodwell, Md Tareq Rahman, Halenur Kurmus, Mehdi Mirzbabaei, Arul Arulrajan, Suksun Horpibulsuk. Farsid Maghool Recycling waste rubber tyres in construction materials and associated environmental considerations: A review. *Resources. Conservation and Recycling*. 2020. V.155. April. pp. 104679. 1-17. <https://doi.org/10.1016/j.resconrec.2020.104679>

86. Abraham J., Tomas S., Kalarrical H. editors. Handbook of carbon nanotubes. Springer Link; 2020.

87. Agrawal A.K., et.al. Deterioration rates of typical bridge elements in New York. *Journ. Brid. Eng.* 2010. V.15(4). pp. 419-429.

88. Ahmad S. Continuum elastic model of fullerenes and the sphericity of the carbon onion shells. *The Journal of Chemical Physics*. 2002. 116(8). 3396–3400. <https://doi.org/10.1063/1.1446428>
89. Alireza Afshar, Soheil Johandary, Haleh Rosekh, et.al. Corrosion resistance evolution of rebars with various primers and coatings in concrete modified with different additives. *Construction and Building Materials*. 2020. V.262. November. pp. 120034. Doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2020.120034.
90. Andrianov I.V., Awrejcewicz J., Danishevskyy V.V. Linear and Nonlinear Waves in Microstructured Solids: Homogenization and Asymptotic Approaches. Boca Raton: CRC Press. 2021. 250 pp.
91. Andrianov. I.V.. Danishevskyy. V.V. & Topol. H. Local stress distribution in composites for pulled-out fibers with axially varying bonding. *Acta Mech*. 2020. 231. 2065–2083. <https://doi.org/10.1007/s00707-020-02634-6>
92. Angela Farina. M. Emin Kutay. Michele Lanotte. Laboratory and field performance investigation of pre-swollen crumb rubber modified asphalt mixtures. *International Journal of Pavement Research and Technology*. 2021. V.14(4). pp. 513-518. <https://doi.org/10.1007/s42947-020-0191-0>
93. Atanackovic T.. and Glavardanov V.. «Buckling of a twisted and compressed rod». *Int J Solids Struct*. 2002. 39. 2987-2999.
94. Bahia H.U., Zeng M., Nam K. Consideration of strain at failure and strength in prediction of pavement thermal cracking. *J. AAPT*. 2000. V.69. pp. 497-535.
95. Balcan M.F., Blum A., Srebro N. A theory of learning with similarity functions. *Machine Learning*. 2008. V.72(1-2). pp. 89-112.
96. Barnard AW, Zhang M., Wiederhecker GS., Lipson M., McEuen PL. Real-time vibrations of a carbon nanotube. *Nature*. 2019; 566(7742): 89-93. <https://doi.org/10.1038/s41586-018-0861-0>.
97. Baumeister E., Klaeger S., Kaldos A. Characterization and application of hollow-sphere-composite lightweight materials. *Proc. IMechE Part L: J. Materials: Design and Applications*. IMechE. 2005. V.219. pp. 207–216.

98. Beleicheva T.G. and Ziling K.K. Thermoelastic axisymmetric problem for a two-layer cylinder. *J. Appl. Mech. Technical Physics*. 1978. V.19. pp. 108–113.
99. Berber M. Hafer IH. Carbon nanotubes: current progress of their polymer composites. BoD-Books on Demand; 2016.
100. Besley NA. Vibrational analysis of carbon nanotube based nanomechanical resonators. *J Phys Chem C*. 2020; 124. 30: 16714-16721. <https://doi.org/10.1021/acs.jpcc.0c04998>.
101. Bhaskar B.S., Desmukh M.S., Choudhary S.K., Desmukh D.S. Heat transfer through porous materials (aluminum foam) empirical optimization of a heat exchanger. *International Journal of Mechanical Engineering*. 2022. V.7(1). pp. 47-55.
102. Bhushan B., Handbook of Nanotechnology. Springer. Berlin (2004).
103. Bluman G., Broadbridge P., King J.R., Ward M.J. Similarity: generalizations. applications and open problems. *J. Eng. Math*. 2010. V.66. pp. 1-9.
104. Boatman B. Epoxy Coated Rebar Bridge Decks: Expected Service Life. MI: Michigan Department of Transportation. Lansing. 2010.
105. Boubaker Fetiza Ali. Khedoudja Soudani. and Smail Haddadi. Effect of waste plastic and crumb rubber on the thermal oxidative ageing of modified bitumen. *Road Mat. and Pav*. 2022. V.23(1). pp. 222-233.
106. Bouldin M.G., Dongré R., Rowe G.M., Sharrock M.J., Anderson D.A. Predicting thermal cracking of pavements from binder properties. *AAPT*. 2000. 69. pp. 455-496.
107. Bowskil G. J., Colwill D.M. Experience with porous asphalt in the United Kingdom. *European Conference on Porous Asphalt*. Madrid. 1997. pp. 1091-1127.
108. British Standards BS EN12697: Bituminous mixtures. Test methods for hot mix asphalt. British Standards Publ.. UK. HD23/99 (1999). Design manual for roads and bridges. 2001. V.7. Pavement Design and Maintenance.

109. Butz T., Muller J., Riebesehl G. Innovative method for producing crumbed rubber modified asphalt. *5-th Eurasphalt & Eurobitume Congress. Istanbul*. 2012.
110. Chang K.W., Howes K.W. Nonlinear Singular Perturbation. Springer-Verlag. New York. Berlin. Heidelberg. Tokyo. 1984.
111. Chen E.Y., Pan G.E., Norfolk T.S., Wang O. Surface loading of a multilayered viscoelastic pavement. *Road Mat. Pav. Des.* 2011. V.12. pp. 849–874.
112. Christensen D.W. Bonaquist R. Improved Hirsch model for estimating the modulus of hot mix asphalt. *J. Assoc. Asph. Pav. Tech.* 2015. 84. pp. 527-557.
113. Christensen D.W. Mathematical modeling of the linear viscoelastic behavior of asphalt cements. The Pennsylvania State University. Thesis. 1992.
114. Christensen R.M. and Lo K.H. Solutions for effective shear properties in three-phase sphere and cylinder models. *J. Mech. Phys. Solids.* 1979. V.27. pp. 315-330.
115. Christensen R.M. Mechanics of Composite Materials. Wiley. NY. USA. New York. 1979. 348 p.
116. Christian Karch. Micromechanical analysis of thermal expansion coefficient. *Modeling and Numerical Simulation of Material Science.* 2014. V.3. pp. 1-15.
117. Christian Peyronne, Gilbert Caroff Dimensionnement des chaussées. Presses de lecole nationale des. Ponts et chaussées.
118. Chu C.N., Saka N., Shu N.P. Negative thermal expansion ceramics: a review. *Materials Science and Engineering.* 1987. V.95. pp. 303-308.
119. Civalek Ö. Dastjerdi S. Akbaş ŞD. Akgöz B. Vibration analysis of carbon nanotube-reinforced composite microbeams. *Math Methods Appl Sci.* 2021. <https://doi.org/10.1002/mma.7069>.
120. Czigan N., Kling S. A comparative analysis of hollow and solid glass fiber reinforced composites. *ECCM15-15TH European Conference on Composite Materials.* Venice. Italy. 2012. 24-28 June. pp. 1-7.

121. Dai H.L., Wang L., Abdelkefi A., Ni Q. «On nonlinear behavior and buckling of fluid-transporting nanotubes». *Int J Eng. Sci.* 87 . 13-22 (2015).
122. Dai L., Sun J. Mechanical properties of carbon nanotubes-polymer composites. Open access peer-reviewed chapter in the book Carbon Nanotubes - Current Progress of their Polymer Composites. 2016.
123. Deepak Kamde, Radhakrishna Pillai Corrosion initiation mechanisms and service life estimation of concrete systems with fusion-bonded epoxy (FBE) coated steel exposed to chloride. *Constr. Build. Mater.* 2021. V.277. March. pp. 122314. Doi/org/10.1016/j. conbuildmat.2021.122314
124. Delatte N. Concrete Pavement Design. Construction. and Performance. Taylor & Francis. London and New York. 2008. 372 p.
125. Design of Pavement Structures. Technical Guide (in French). SETRA. Laboratoire Central des Pontset Chaussées. Dec. 1994.
126. Dmitriev S.V., Sunagatova I.R., Ilgamov MA., Pavlov IS. Natural frequencies of bending vibrations of carbon nanotubes. *Tech. Phys.* 2022; Vol. 67: 7-13. <https://doi.org/10.1134/S1063784222010042>.
127. Dresselhaus M.S., Avouris P. Carbon nanotubes: synthesis. structures. properties and application. Berlin: Springer; 2001.
128. Dugundii J., Colligeros Y.A. Similarity laws for aerothermoelastic testing. *Int. Aero/Space Sci.* 1962. V.29(8). pp. 936-950.
129. Elishakoff I., Pentaras D., Dujat K., Versaci C., Muscolino G., Storch J., Bucas S., Challamel N., Natsuki T., Zhang YY., Wang CM., Ghyselinck G. Carbon nanotubes and nanosensors: vibration. buckling and ballistic impact. London: ISTE Willey; 2012. <https://doi.org/10.1002/9781118562000>.
130. Elishakoff I., Pentaras D. Buckling of a double-walled carbon nanotube. *Adv Sci Lett.* 2009; 2(3): 372-376. <https://doi.org/10.1166/asl.2009.1061>.
131. Elishakoff I., Pentaras D., Dujat K., et. al.. Carbon Nanotubes and Nanosensors: Vibration. Buckling and Ballistic Impact. London: ISTE Willey (2012).

132. Elwardany M., Planche J.-P., King G. Universal and practical approach to evaluate asphalt binder resistance to thermally-induced damage. *Construction and Building Materials*. 2020. V.255. pp. 1-18.

133. Elwardany M.D., King G., Planche J.P., Rodezno C., Christensen D., Fertig Ill R.S., Kuhn K.H., Bhuiyan F.H. Internal restraint damage mechanism for age-induced pavement surface damage. *Asphalt Paving Technol. J. Assoc. Asphalt Paving Technol.* 2019. V.88.

134. Fatima-Ezzahra, El Mabchour, Abouchadi H., Mohamed Zeriab Es-Sadek., Taha-Janan M. Theoretical and numerical contribution for prediction of the mechanical properties of a randomly distributed reinforcement in the matrix. *International Review of Mechanical Engineering*. 2020. V.14(5). pp. 303-309. <https://doi.org/10.15866/ireme.v14i5.19150>

135. Fatima-Ezzahra, El Mabchour. H. Abouchadi, Mohamed Zeriab Es-Sadek, M. Taha-Janan Numerical and theoretical analysis of thermal behaviour of a composite material randomly distributed. *International Review of Mechanical Engineering*. 2019. V.13(4). pp. 265-274.

<https://doi.org/10.15866/ireme.v13i4.17152>

136. Formica G., Lacarbonara W., Alessi R. Vibrations of carbon nanotube-reinforced composites. *J Sound Vib*. 2010. 329: 1875-1889.

<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.11.020>.

137. Gaidaichuk V.V., Shlyun N.V., Shevchuk L.V., Bilobrytska O.I. Theoretical modelling of the effect of thermal delamination of an asphalt concrete pavement from a rigid foundation of a road or bridge. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2022. 109. pp.38-49. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2022.109.38-49> Web of Science

138. Gao W. Study on properties of recycled tyre rubber modified asphalt mixture using dry process. *Construction and Building Materials*. 2007. 21. pp. 1011-1015.

139. Gdoutos E.E. Fracture of Nano and Engineering Materials and Structures. 2007. Springer. Berlin.

140. Ghavanloo E., Rafii-Tabar H., Fazelzadeh S.A. New insights on nonlocal spherical shell model and its application to free vibration of spherical fullerene molecules. *Int J Mech Sci.* 2019. 161–162:105046.

<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2019.105046>

141. Ghavanloo E., Rafii-Tabar H., Kausar A., Giannopoulos Georgios I., Fazelzadeh S. Ahmad. Experimental and computational physics of fullerenes and their nanocomposites: Synthesis. thermo-mechanical characteristics and nanomedicine applications. *Physics Reports.* 2023. V. 996. P.1-116.

<https://doi.org/10.1016/j.physrep.2022.10.003>.

142. Ghavanloo. E., Izadi. R. & Nayebi. A. Computational modeling of the effective Young's modulus values of fullerene molecules: a combined molecular dynamics simulation and continuum shell model. *J Mol Model.* 2018. 24. 71.

<https://doi.org/10.1007/s00894-018-3623-x>

143. Gholamali Shafabakhsh. Mohammadreza Aliakbari Bidokhti and Hassan Divandan. Evaluation of the performance of SBS/Nano-Al₂O₃ composite-modified bitumen at high temperature. *Road Mat. and Paves.* 2021. V.22(11). pp. 2523-2537.

144. Goddard III W.A., Brenner D., Lyshevski SE., Iafrate GJ., Goddard WA. et al. Handbook of nanoscience. engineering. and technology. Boca Raton: CRC Press; 2003.

145. Graczyk M., Rafa J., Zofka A. Pavement modelling using mechanical and thermal homogenization of layered systems. *Roads and Bridges. Drogi i Mosty.* 17. 2. 2018. pp.141-157.

<https://www.rabdim.pl/index.php/rb/article/view/v17n2p141/468>

146. Green A.E., Radok J.R.M., Rivlin R.S. Thermo-elastic similarity laws. *Quarterly of Applied Mathematics.* 1958. V.15(4). pp. 381-393.

147. Greenhill A.G., «On the strength of shafting when exposed both to torsion and to end thrust». in: Proc. of the Institute of Mechanical Engineers. 1883. London. April. pp. 182–209 ().

148. Grigorenko A.Ya., Yaremchenko N.P., Yaremchenko S.N. Analysis of axisymmetric stress-strain state of continuously inhomogeneous hollow sphere. *International Applied Mechanics*. 2018. V.54(5). pp. 577-583.

149. Gulyaev V.I., Shlyun N.V. and Zaets Yu.O. Spiral Buckling of Torque and Axial Force-Prestressed Nanotubes. *Strength of Materials*. 2024. 56(1). pp. 62–69. DOI:[10.1007/s11223-024-00627-7](https://doi.org/10.1007/s11223-024-00627-7)

150. Gulyaev. V.I., Mozgovyi. V.V., Shlyun' N.V. Thermomechanical Aspects of Frost Resistance of Cement and Asphalt Concrete Materials. *International Applied Mechanics*. 2023. 59(5). p. 594–604. DOI:10.1007/s10778-024-01244-2 Scopus.

151. Gulyaev. V.I., Shlyun. N.V. Intrastructural thermal stresses in composites with homogeneous and heterogeneous spherical inclusions. *strength of materials*. 2023. 55(2). pp. 254–264. DOI:10.1007/s11223-023-00520-9 Scopus

152. Gulyayev V.I., Gaidaichuk V.V., Solovjov I.L., and Gorbunovich I.V.. The buckling of elongated rotating drill strings. *J Petroleum Sci Eng*. 2009. 67. Issues 3–4. 140-148 ().

153. Gulyayev V.I., Mozgovyi V.V.. Shlyun N.V.. Shevchuk L.V. Modelling negative thermomechanical effects in reinforced road structures with thermoelastic incompatibility of coating and reinforcement materials. *System Research & Information Technologies*. 2022. № 2. C.117-127.
<https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2022.2.09>.

154. Gulyayev V.I., Mozgovyi V.V., Shlyun N.V.. Shevchuk L.V.. Bilobrytska O.I. Negative thermomechanical effects in granular composites with incompatible thermomechanical parameters of their components. *International Review of Mechanical Engineering*. 2022. V.16(4). pp. 188-197.

155. Gulyayev. V.. Glazunov. S.. Glushakova. O.. Vashchilina. E.. Shevchuk. L.. Shlyun. N.. Andrusenko. E. Modelling Emergency Situations in the Drilling of Deep Boreholes. 2019. Cambridge Scholars Publishing. 500 p.

156. Gulyayev. V.I., Shlyun. N.V. Singularly perturbed problems of drill string buckling in deep curvilinear borehole channels. *Modern Trends in Structural and Solid Mechanics 1*. ISTE Ltd and John Wiley & Sons. Inc.2021. pp. 177-200.
157. Gupta S.S. Bosco F.. Batra R.C. Wall thickness and elastic moduli of single-walled carbon nanotubes from frequencies of axial. torsional and inextensional modes of vibration. *Computational Materials Science*. 2010. 47. pp. 1049-1059.
158. Gutkin M.Yu. Ovid'ko V.A. Physical mechanics of deformable nanostructures. St. Petersburg: Yanus Publishers; 2003.
159. Guz A.N., Rushchitsky J.J., Guz I.A. Introduction to mechanics of nanocomposites. Kyiv: S.P. Timoshenko Institute of Mechanics; 2010.
160. Hadi S., Esmaeeli. Yaghoob Amir Farnam., D. P. Bentz. Pablo D. Zavattieri. Numerical simulation of the freeze-thaw behavior of mortar containing deicing salt solution. *Materials and Structures*. 2017. V.50(1). pp. 1-20.
161. Han Z., Fina A. Thermal conductivity of carbon nanotubes and their polymer nanocomposites: A Review. *Progress in Polymer Science*. 2011. V. 36 (7). pp. 914-944.
162. Han-Seung Lee, Velu Saraswathy, Seung-Jun Kwon and Subbiah Karthick. Corrosion Inhibitors for Reinforced Concrete: A Review. In book: *Corrosion Inhibitors. Principles and Recent Application*. Edited by Mahmood Aliofkhazraei. 2017. doi:10.5772/intechopen.72572.
163. Harada S., Kozako M., Hikita M.. Igarashi T. and Kaji H. Preparation of fullerene/epoxy resin composite with fine dispersion and its breakdown strength. *International Symposium on Electrical Insulating Materials (ISEIM)*. Toyohashi. Japan. 2017. pp. 654-656. doi: 10.23919/ISEIM.2017.8166575.
164. Harik V. Mechanics of carbon nanotubes: fundamentals. modelling and safety. London: Academic Press; 2018.
165. Hatami A.. Marcous G. Developing Deterioration Models for Life Cycle Cost Analysis of Nebraska Bridges. in TRB. 2012.

166. Heitzman M. State of the practice. design and construction of asphalt paving materials with crumb rubber modifier. Research Report FHWA-SA-92-022.FHWA. U.S. Department of Transportation. May. 1992.
167. Herve Di Benedetto. Louis Francken. Mechanical tests for bituminous materials. Recent improvements and future prospects. *Proceedings of the Fifth International RJLEM Symposium MTBM LYON 97*. France. 1997. 14-16 MAI. p. 353-355.
168. Hetnarski R.B. and Ignaczak J. Mathematical theory of elasticity. Taylor and Francis. New York. 2004.
169. Hetnarsky R.B., Eslami M.R. Thermal Stresses — Advanced Theory and Applications. Solid Mechanics and its Applications 158. © Springer Science Business Media B.V. 2009. 579 p.
170. Hill B., Oldham D., Behnia B. et al. Evaluation of low temperature viscoelastic properties and fracture behavior of bio-asphalt mixtures. *International Journal of Pavement Engineering*. 2018. V.19. 4. pp.362-369. DOI:[10.1080/10298436.2016.1175563](https://doi.org/10.1080/10298436.2016.1175563)
171. Hiroyuki S.Jn. Buckling of carbon nanotubes: a state of the art review. *Materials (Basel)*. 2012; 5(1): 47-84. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1112.4839>.
172. Hovanesian J.D., Kowalski H.C. Similarity in thermoelasticity. *Experimental Mechanics*. 1967. February. pp. 82-84. <https://doi.org/10.36100/dorogimosti2022.26.124>
173. Huang R., Chen Z., Chu X., Wu Z., Li L. Preparation and thermal properties of epoxy composites filled with negative thermal expansion nanoparticles modified by plasma treatment. *Journal of Composite Materials*. 2011. V.45(16). pp.1675–1682.
174. Huang. N., Chen. Y., Xie. Y., Yang. W., Li. J., & Guo. H. Stiffening of double-shelled fullerene molecules under uniaxial strains. *Fullerenes, Nanotubes and Carbon Nanostructures*. 2024. 1–7. <https://doi.org/10.1080/1536383X.2024.2329740>

175. Hucker M.J., Bond I.P., Haq S., Bleay S., Foreman A. Influence of manufacturing parameters on the tensile strengths of hollow and solid glass fibres. *Journal of Materials Science*. 2002. 37. pp. 309-315.
176. Huliaiev V.I., Haidaichuk V.V., Hustieliev O.O., Shevchuk L.V. Thermal stress state of layered and inhomogeneous pavement. *International Applied Mechanics*. 2021. V.57(1). pp. 86-96.
177. Hussain M. Naeem MN. Vibrational behavior of single-walled carbon nanotubes based on donnell shell theory using wave propagation approach. *AIP Advances*. 2017; 7. 045114. <https://doi.org/10.1063/1.4979112>.
178. Hussain M., Naeem M.N., Vibrational behavior of single-walled carbon nanotubes based on donnell shell theory using wave propagation approach. novel nanomaterials. *Synthesis Applications*. 78-90. (2018).
179. Hyun Hwan Kim, Moon-Sup Lee, Soon-Jae Lee. Performance evolution of polymer modified asphalt (PMA) binders containing ground tire-rubber (GTR). *International Journal of Pavement Research and Technology*. 2019. V.12(2). pp. 215-222. <https://doi.org/10.1007/s42947-019-0027-y>.
180. Ishfaq Mohiud Din. Mohammad Shafi Miz., Mohammad Adnan Farooq. Effect of freeze-thaw cycles on properties of asphalt pavements in cold regions: A review. *Transportation Research Procedia*. 2020. V.48. pp. 3634-3641.
181. Jamal-Omidi M., Shayanmehr M., Rafiee R. A study on equivalent spherical structure of buckyball-C60 based on continuum shell model. *Lat. Am. J. Solids Struct*. 2016. V. 13. no. 5. pp. 1016–1029. doi:10.1590/1679-78252508.
182. Jorge de Briton., Rawaz Kurda The past and future of sustainable concrete: A critical review and strategies on cement-based materials. *Journal of Cleaner Production*. 2021. V.281. pp. 123558.
183. Jorge Pais, Caio Santos, Paulo Pereira et al. The adjustment of pavement deflections due to temperature variations. *International Journal of Pavement Engineering*. Volume 21. 2020 Issue 13. pp. 1585-1594 <https://doi.org/10.1080/10298436.2018.1557334>

184. Ju J.W. and Chen T.M. Effective elastic moduli of two-phase composites containing randomly dispersed spherical inhomogeneities. *Acta Mech.* 1994. 103(1). pp. 123-144.
185. Kausar A. Fullerene Reinforced Polymeric Nanocomposites for Energy Storage – Status and Prognoses. *Front. Mater.* 2022. 9. 150. <https://doi.org/10.3389/fmats.2022.874169>
186. Khazanovich L. The elastic-viscoelastic correspondence principle for non-homogeneous materials with time translation non-variant properties. *Intern. Journ. Solids and Structures.* 2008. V.45(15). pp.1-9.
187. Kostopoulos V., Baltopoulos A., Karapappas P., Vavouliotis A. Impact and after-impact properties of carbon fibre reinforced composites enhanced with multiwall carbon nanotubes. *Composites Science and Technology.* 2010. 70. pp. 553-563.
188. Kovalenko A.D. Thermoelasticity: Basic Theory and Applications. Wolters-Noordhoff. Groningen. The Netherlands. 1972.
189. Krishnan J.M.. Rajagopal K.R. Review of the uses and modeling of bitumen from ancient to modern times. American society of mechanical engineers. *Appl. Mech. Rev.* 2003. V.56(2). pp. 149–214.
190. Kwon YK., Kim P. Unusually high thermal conductivity in carbon nanotubes. Chapter in the book *High Thermal Conductivity Materials*. Springer. New York. NY. pp. 227-265.
191. Lecomte-Grosbras P., Paluch B., Brieu M. Free edge effects study in laminated composites using Digital Image Correlation: effect of material and geometrical singularities. *EPJ Web of Conferences.* 2010. V.6. pp. 20011.
192. Lee E.H. Stress analysis in viscoelastic bodies. *Quarterly of Applied Mathematics.* 1955. V.13. pp.183-190.
193. Leslie R.G. Treloar. The mechanics of rubber elasticity. *Journal of Polymer Science polymer Symposia.* 2007. 48(1). pp. 107-123.

194. Lesueur D. The colloidal structure of bitumen: consequences on the rheology and on the mechanisms of bitumen modification. *Adv. Coll. Interface Sci.* 2009. 145(1–2). pp. 42–82.
195. Liew KM, Yan Jiawei, Lu Wen Zang. Mechanical behaviors of carbon nanotubes. Elsevier; 2016.
196. Lind C. Two decades of thermal expansion research: where do we stand? *Materials*. 2012. V.5. pp. 1125-1154.
197. Litton R.L., Tsai F.L., Lee S.I., Luo R., Hu S., Zhou F. «Models for Predicting Reflection Cracking of Hot-Mix Asphalt Overlays» Research Report 669. Texas Transportation Institute. Texas A&M University. College Station. Texas. 2010. 61 p.
198. Liu Y., Qian Zh., Zheng D., Zhang M. Interlaminar thermal effect analysis of steel bridge deck pavement during gussasphalt mixture paving. *International Journal of Pavement Engineering*. Volume 20. 2019 Issue 11. pp. 1323-1335. <https://doi.org/10.1080/10298436.2017.1413240>
199. Logache M., Agbosson A., Pastor J. and Muller D. Role of interface on the elastic behavior of composite materials: Theoretical and experimental analysis. *Journal of Composite Materials*. 1994. V.28(12). pp. 1140-1157. Doi.org/10.1177/002199839402801205.
200. Lubomir Lapcik, Matthew J.A., Ruzsala, Martin Vasina. Barbora Lapcikova, Jakub Vlcek, Neil A. Rowson, Liam M. Grover. Richard W. Greenwood. Hollow spheres as nanocomposite fillers for aerospace and automotive composite materials applications. *Composites Part B: Engineering*. 2016. V.106(1). pp. 74-80.
201. Lyon R.E., Farris R. J. Thermomechanics of rubber at small strains. *Polymer*. 1987. V.28(7). pp. 1127-1132.
202. Ma B., Si W., Zhu D. Applying method of moments to model the reliability of deteriorating performance to asphalt pavement under freeze-thaw cycles in cold regions. *J. Mater. Civ. Eng.* 2015. 27(1). pp. 04014103.

203. Marcela Fiedlerova, Petr Jisa, Kamil Stepanek Using various thermal analytical methods for bitumen characterization. *International Journal of Pavement Research and Technology*. 2021. V.14(4). pp. 459-465.
204. Mashaan N.S., Ali A.H., Karim M.R., Abdelaziz M. Effects of crumb rubber concentration on physical and rheological properties of rubberised bitumen binders. *International Journal of Physical Sciences*. 2011. V.6(4). pp.684-690.
205. Mashiri Soledad. Vinod J.S., Sheikh MD Neaz, Tsang Hing-Ho. Shear strength and dilatancy behavior of sand-tyre chip mixtures. *Soils and Foundations*. Tokyo. 2015. V.55(3). pp. 517-528. DOI:10.1016/j.sandf.2015.04.004.
206. Mc Donald B.B. Corrosion of Epoxy-Coated Steel in Concrete. In book: *Corrosion of Steel in Concrete Structure*. Edited by Amiz Pouzsae. Woodhead Publishing. 2016. pp. 87-110.
207. Md Amanul Hasan, Rafiqul A. Tarefder. Development of temperature zone map for mechanistic empirical (ME) pavement design. *Journal of Pavement Research and Technology*. 2018. V.11(1). pp. 99-111.
208. Micah Hale W., Freyne S.F., Russel B.W. Examining the frost resistance of high performance concrete. *Constr. Build. Mater.* 2009. V.23(2). pp. 878-888.
209. Miller W.. Smith S.W.. Mackenzie D.S.. Ewans K.E. Negative thermal expansion: a review. *Journal of Material Science*. 2009. 44. pp. 5441-5451.
210. Graczyk M., Rafa J., Zofka A. Pavement modelling using mechanical and thermal homogenization of layered systems. *Roads and Bridges – Drogi i Mosty*. 2018. V.17(2). pp.141-157.
211. Mohammed A. Abed. György L. Balázs. Concrete Performance in Cold Regions: Understanding Concrete's Resistance to Freezing/Thawing Cycles. Chapter Metrics Overview. 2021. October 15. DOI: 10.5772/intechopen.99968.
212. Molenaar A.A., Li N. Prediction of compressive and tensile strength of asphalt concrete. *Int. J. Pav. Res. Tech.* 2014. V.7(5). pp. 324-331.
213. Monteiro A.O., Cachim P.B., Costa P.M. Mechanics of filled carbon nanotubes. *Diamond and Related Materials*. 2014. 44. pp. 11-25.

214. Mossop S.C. The freezing of supercooled water. *Proceedings of the Physical Society. Section B.* 1955. V.68(4). pp. 193-209.
215. Nabetani K., Muramatsu Y., Oka K., Nakano K., Hojo H., Mizumaki M., Agui A., Higo Y., Hayashi N., Takano M., Azuma M. Suppression of temperature hysteresis in negative thermal expansion compound $\text{BiNi}_{1-502x}\text{Fe}_x\text{O}_3$ and zero-thermal expansion composite. *Applied Physics Letters.* 2015. V.106(6). pp. 061912-1-061912-5.
216. Natsuki T., Urakami K. Analysis of vibration frequency of carbon nanotubes used as nano-force sensors considering clamped boundary condition. *Electronics.* 2019; 8(10): 1082. <https://doi.org/10.3390/electronics8101082>.
217. Neely L.A., Kochergin V., See E.M., Robinson H.D. Negative thermal expansion in a zirconium tungstate / epoxy composite at low temperatures. *J. of Materials Science.* 2014. V.49(1). pp. 392-396.
218. Noda N., Hetnarski R.B., Tanigawa Y. *Thermal Stresses.* 2nd edition. New York. Taylor and Francis. 2003.
219. Nowacki W. *Thermoelasticity.* 2nd ed. Oxford: PWN – Polish Scientific Publishers. Warsaw and Pergamon Press. 1986.
220. Nuha Salim Mashaan, Asim Hasan Ali, Mohamed Reham Karim. Mahrez Abdelaziz. An overview of crumb rubber modified asphalt. *Intern. Journ. of Physical Sciences.* 2011. 7(2). pp. 166-170.
221. Orynyak I., Tsybulnyk A., Danylenko K., and Orynyak A. Implicit direct time integration of the heat conduction problem in the Method of Matched Sections. *Mech. Adv. Technol.* vol. 8. no. 1(100). pp. 87–97. Mar. 2024.
222. Osama Mohamad Elmardi Sulieman Khayal. A review study of delamination in composite laminated plates. Preprint. 2019. April.
223. Paravita Sri Wulandari, Daniel Tjandra Use of crumb rubber as an additive in asphalt concrete mixture. *Procedia Engineering.* 2017. V.171. pp.1384-01389.
224. Parvaneh V., Shariati M., Torabi H. Bending buckling behavior of perfect and defective single-walled carbon nanotubes via a structural mechanics

model. *Acta Mech.* 2012; 223(11): 2369-2378. <https://doi.org/10.1007/s00707-012-0711-3>.

225. Paulino G.H., Jin Z.-H. Correspondence principle in viscoelastic functionally graded materials. *ASME J. Appl. Mech.* 2001. V.68. pp. 129-132.

226. Pavalan V., Sivagamasundari R. Thermal expansion coefficient of basalt fibre reinforced polymer bars. *International Journal for Research in Engineering Application & Management.* 2019. V.5(1). pp. 414-418.

227. Penado F. E. Effective elastic properties of honeycomb core with fiber-reinforced composite shells. *Open Journal of Composite Materials.* 2013. V.3(4). pp. 89-96.

228. Pentaras D., Elishakoff I. Free vibration of triple-walled carbon nanotubes". *Acta Mech.* 2011; 221: 239-249. <https://doi.org/10.1007/s00707-011-0496-9>.

229. Pentaras P., Elishakoff I. Effective approximations for natural frequencies of double-walled carbon nanotubes based on donnell shell theory. *J of Nanotech Eng Med.* 2011; 2 (2): paper 021013. <https://doi.org/10.1115/1.4003601>.

230. Pianca F., Schell H., Gene Cautillo The performance of epoxy coated reinforcement: experience of the Ontario Ministry of Transportation. *International Journal of Materials and Product Technology.* 2005. V.23(3/4). pp. 286-308. Doi:10.1504/IJMPT.2005.007732.

231. Jaskula P., Judyski J. Verification of the criteria for evaluation of water and frost resistance of asphalt concrete. *Road Materials and Pavement Design.* 2008. V.9(1). pp. 135-162.

232. Pokseresht M., Ansari R. and Hassanzadeh-Aghdam M.K. Investigating the effect of carbon interfacial layer on the elastoplastic response of ceramic particle-reinforced metal matrix composites. *Mechanics Based Design of Structures and Machines.* Taylor Francis Online. 2020. Doi.org/10.1080/15397734.2020.1854783.

233. Pounder E.R. *The Physics of Ice.* Pergamon Press: Oxford. U.K.. 1965.

234. Povana Hiremath, M.C. Gowrishankar, Manjunath Shettar, Sathyashankara Sharma Raghovendra Prabh. Effect of microstructure. phase formation on the mechanical and surface characteristics of low alloy medium carbon forged steels – a review. *International Review of Mechanical Engineering*. 2021. V.15(6). pp. 325-334. <https://doi.org/10.15866/ireme.v15i6.20972>.
235. Powell R.W. Thermal conductivities and expansion coefficients of water and ice. *Advances in Physics*. 1958. 7(26). pp. 276-297. DOI: 10.1080/00018735800101277.
236. Presti D.L. Recycled tyre rubber modified bitumens for road asphalt mixture: a literature review. *Construction and Building Materials*. 2013. V.49. pp. 863-881.
237. Qian D., Wagner G.J., Liu W.K., Yu M.F., Ruoff R. S. Mechanics of carbon nanotubes. *Applied Mechanics Reviews*. 2002. 55(6). pp. 495-532.
238. Qian Z., Chuang-jun L. Analysis of micro structural damage characteristics of freeze-thaw split asphalt mixtures. *J. Highw. Transp. Res. Dev*. 2010. pp. 6-9.
239. Qiang Zeng, Teddy Fen-Chong, Patrick Dangla, Kefei Li. A study of freezing behavior of cementitious materials by poromechanical approach. *International Journal of Solids and Structures*. 2011. V.48(22-23). pp. 3267-3273.
240. Radovskiy B., Mozgovoy V. Ways to Reduce Low Temperature Cracking in Asphalt Pavements. In: *4th Eurobitume Symposium*. Madrid. 1989.
241. Radovskiy B., Teltayev B. Viscoelastic Properties of Asphalts Based on Penetration and Softening Point. Monograph. Springer Nature. Switzerland. 2017. 107 p.
242. Rafiei S. Foundations of nanotechnology. Volume Three: Mechanics of carbon nanotubes. Apple Academic Press. CRC Press; 2021.
243. Raheb Mirzananamadi, Par Johansson, Sotirios Grammaticos, Thermal properties of asphalt concrete: A numerical and experimental study. *Construction and Building Materials*. 2018. V.158. pp. 774-785.

244. Rakesh Kumar, Bishwajit Bhattacharjee Porosity. pore size distribution and in situ strength of concrete. *Cement and Concrete Research*. 2003. V.33(1). pp. 155-164.
245. Read W.T. Stress analysis for compressional viscoelastic materials. *Journal of Applied Physics*. 1950. V.21. pp. 671-674.
246. Robert Caputo, Region Manager – New York and Washington DC Metro areas at Western Speciality Contractors. Epoxy coated rebar – “To coat or not to coat?”. 10 Oct. 2021.
247. Rokade S. Use of waste plastic and waste rubber tyres in flexible highway pavements. *International Conference on Future Environment and Energy IPCBEE*. 2012. V.28. pp. 105-108.
248. Rozen W., Ketler E., Hashin Z. Hollow Glass Fibre Reinforced Plastics. General Electric Missile & Space Division. Philadelphia. 1962.
249. Ru CQ. Axially compressed buckling of a doublewalled carbon nanotube embedded in an elastic medium. *J Mech Phys Solids*. 2001. 49(6). 1265-1279. [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(00\)00079-X](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(00)00079-X).
250. Sagues A.A, Lau K., Powers R.G., Kessler R.J. Corrosion of epoxy-coated rebar in marine bridges – A 30 year perspective. Paper № 4039. 17th International Corrosion Congress – Corrosion Control in the Service of Society. Las Vegas. 2009.
251. Schellekens J.C., Borst De R. Free edge delamination in carbon epoxy laminates: A novel numerical / experimental approach. *Composite Structures*. 1994. V.28. pp. 357-373.
252. Sedov L.I. Similarity and Dimensional Methods in Mechanics. CRC Press. 1993.
253. Setiawan Dian M. The role of temperature differential and subgrade quality on stress. curling. and deflection behavior of rigid pavement. *Journal of the Mechanical Behavior of Materials*. 2020. V.29(5-6). id.10. 12pp.

254. Shahriar Dastjerdi, Bekir Akgöz. On the statics of fullerene structures. *International Journal of Engineering Science*. 2019 142. P. 125-144. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.06.002>
255. Sharvin Poovaneshvaran. Lim Wee Zeng. Mohd Rosli Hasan. Xu Yand. Aboelkasim Diab. Workability, compactibility and engineering properties of rubber-modified asphalt mixtures prepared via wet process. *International Journal of Pavement Research and Technology*. 2021. 14(5). pp. 560-569. <https://doi.org/10.1007/s42947-020-1006-z>.
256. Shima Hiroyuki Buckling of carbon nanotubes: A state of the art review». *Materials (Basel)*. 5(1). 47-84 (2012).
257. Shishkin G.I. Method of splitting for singularly perturbed parabolic equations. *East-West J. Numer. Math*. 1993. V.1(2). pp. 147-163.
258. Shlyun N., Gaydaychuk V., Shevchuk L. and Kutsman O. Modelling discontinuous stress fields in multilayer coatings of automobile roads. *IEEE SAIC*. 2020. Kyiv. Ukraine. p. 140. Scopus
259. Shlyun N.V. Analysis of thermo-mechanical incompatibility of fullerenes with polymeric matrices of composites. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2024. 112. pp.139-148. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2024.112.139-148>
260. Shlyun. N.V., Gulyayev V.I. (2020) Buckling of a drill-string in two-sectional bore-holes. *International Journal of Mechanical Sciences*. 172. 105427. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105427>
261. Simonsen E., Isacson U. Thaw weakening of pavement structures in cold regions. *Cold Reg. Sci. Technol*. 1999. V.29(2). pp. 135-151.
262. Sips R. General theory of deformation of viscoelastic substance. *Journal of Polymer Science*. 1951. V.7. pp. 191-205. <https://doi.org/10.1002/pol.1951.120070208>.
263. Strozzi M., Elishakoff I., Manevitch LI., Gendelman OV. Applicability and limitations of donnell shell theory for vibration modelling of double-walled

carbon nanotubes”. *Thin-Walled Struct.* 2022; 178: article 109532.

<https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.109532>.

264. Susan G. Sterrett. Similarity and dimensional analysis. *Philosophy of Technology and Engineering Sciences. Antonie Meijers.* Amsterdam. 2009. V.9. pp. 799-823.

265. Tack Hee Han, Ki Yong Yoon and Young Jong Kang Compressive strength of circular hollow reinforced concrete confined by an internal steel tube. *Construction and Building Materials.* 2010. V.24(9). pp. 1690-1699. Doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2010.02.022.

266. Tahir Gonen, Salih Yazicioglu, Bohar Demirel The influence of freezing-thawing cycles on the capillary water absorption and porosity of concrete with mineral admixture. *KSCE Journal of Civil Engineering.* 2015. 19. pp. 667-671.

267. Takenaka K. Negative thermal expansion materials: technological key for control of thermal expansion. *Science and Technology of Advanced Materials.* 2012. V.13. pp. 1-11.

268. Tao Ma, Yongqiang Zhong, Tao Tang, Xiaoming Huang Design and evaluation of heat-resistant asphalt mixture for permafrost regions. *International Journal of Civil Engineering.* 2016. V.14(1). pp.339-346. Doi:10.1007/s40999-016-0094-2.

269. Tarn Minh Phan, Tri Ho Minh Le, and Dae-Wook Park Evaluation of cracking resistance of healed warm mix asphalt based on air-void and binder content. *Road Materials and Pavement Design.* 2022. V.23(1). pp. 47-61.

270. Teltaev B., Amirbaev E., Radovsiy B. Evaluating the effect of polymer modification on the low-temperature rheological properties of asphalt binder. *Polymers.* 2022. V.14(13). pp. 2548. <https://doi.org/10.3390/polym14132548>.

271. The SHELL Bitumen Handbook. 5th ed.. Thomas Telford Ltd. London. 2003.

272. Tomanek D, Enbody R.J. Science and application of nanotubes. Springer Science & Business Media; 2005.

273. Torkaman – Asadi MA, Rahmanian M. Firouz – Abadi RD. Free vibrations and stability of high-speed rotating carbon nanotubes partially resting on Winkler foundations”. *Compos Struct.* 2015; 126: 52-61. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.02.037>.

274. Trach V.M., Podvornyi A.V. Stability of cylindrical anisotropic composite shells under torsion in a three-dimensional formulation. *Strength of Materials and Theory of Structures*. issue 111. KNUBA. 2023. P. 74-86.

275. Trach V.M., Podvornyi A.V., Zhukova N.B., Bondarskyi O.G. Free vibrations of layered anisotropic thick-walled cylindrical shells. *Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles*. Kyiv: KNUBA. 2024. Issue 113.P. 250-264

276. Trupti Amit Kinjawadekar, Shanthazam Patil, Gopinatha Nayak A critical review on glass fiber-reinforced polymer bars as reinforcement in flexural members. *Journ. Intst. Eng. India. Ser. A*. 2023. V.104(2). pp. 501-516.

277. Trusdell C. and Carlson D.E. Thermoelasticity. Encyclopedia of Physics. Vol. Via/2. Springer. Berlin. 1972.

278. Van der Poel C. On the rheology of concentrated dispersions. *Rheol Acta*. 1958. 1. pp. 198-205.

279. Voigt V. Bestimmung der consianten der elasticitat und untersuchung der reibung dir einige metalle. *Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*. Bd. 38. pp. 1-87.

280. Volterra V. Lecons Sur Les Functions de Lignes. Gautier – Villard. Paris. 1913.

281. Walter R. Stahl. Similarity and dimensional methods in biology. *Science*. 1962. V.137(3525). pp. 205-212.

282. Wang P., Xiang R., Maruyama S. Chapter two - thermal conductivity of carbon nanotubes and assemblies. *Advances in Heat Transfer*. Elsevier. 2018. V. 50. pp. 43-122.

283. Wang S.S. Edge delamination in angle-ply composite laminates. *AIAA Journal*. 1984. V.22(2). pp. 256-264.

284. Weng G.I. Some elastic properties of reinforced solids with special reference to isotropic ones containing spherical inclusions. *Int. J. Eng. Sci.* 1984. V.22(7). pp. 845–856.

285. Xianming Shi. Monitoring of Reinforced Concrete Corrosion. In book: *Eco-Efficient Repair and Rehabilitation of Concrete Infrastructures*. 2018. pp. 69-95. Doi.org/10.1016/B978-0-08-102181-1.00004-6.

286. Xiaofei Pei, Martin Noel, Mark Green, Greg W.R. Sheir. Cementitious coatings for improved corrosion resistance of steel reinforcement. *Surface Coating Technology*. 2017. V.315. pp. 188-195. DOI:[10.1016/j.surfcoat.2017.02.036](https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2017.02.036).

287. Xu H., Guo W., Tan Y Internal structure evolution of asphalt mixtures during freeze-thaw cycles. *Mat. Des.* 2015. V.86. pp. 436-446.

288. Yang Liu, Zhendong Qian, Dong Zheng, Meng Zhang. Interlaminar thermal effect analysis of steel bridge deck pavement during gussasphalt mixture paving. *International Journal of Pavement Engineering*. 2019. V.20(11). pp. 1323-1335.

289. Yihua Chen, Eric K. Garcia. Maya R. Gupta, Ali Rahimi, Luca Cazzanti. Similarity-based classification: concepts and algorithms. *Journal Machine Learning Research*. 2009. V.10. pp. 747-776.

290. Yingjun Jiang., Changqing Deng, Zhejiang Chen, and Yuhang Tian. Evaluation of the cooling effect and anti-rutting performance of thermally resistant and heat-reflective pavement. *International Journal of Pavement Engineering*. 2020. V.21(4). pp. 447-456.

291. Yi-qin T., Li-dong Z., Bi-Wel L. Research on freeze-thaw damage model and life prediction of asphalt mixtures. *J. Highw. Transp. Res. Dev.* 2011. pp. 1-7.

292. Yoder E.J. Principles of Pavement Design. John Wiley & Sons. INC. Chapman & Hall. Ltd. New York. London. 1991.

293. Zhang D., Huang X., Zhao Y., Zhang S. Rubberized asphalt mixture design using a theoretical model. *Construction and Building Materials*. 2014. V.67. pp.265-269.

294. Zhang Y.Q., Liu X., Zhao J. Influence of temperature change on column buckling of multiwalled carbon nanotubes. *Physics Letters A*. 2008. 372. 1676-1681.
295. Zhidong Han, Alberto Fina. Thermal conductivity of carbon nanotubes and their polymer nanocomposites: A review. *Progress in Polymer Science*. 2011. V.36. №7. pp. 914-944. <https://doi.org/10.1016/j.progpolymsci.2010.11.004>
296. Zofka A., Marasteanu M., Li X., Clyne T., McGraw J. Simple method to obtain asphalt binders low temperature properties from asphalt mixtures properties. *J. Assoc. Asph. Pav. Tech*. 2005. V.74. pp. 255-282.

ДОДАТОК А

А.1 Постановка задачі теорії термопружності в циліндричних координатах

Основні рівняння статичної і квазістатичної задач термопружності розглядалися вище в декартових координатах. Однак ці задачі зручно розглядати в циліндричних координатах. Розглянемо основні рівняння задач термопружності в цих координатах. Всі формули наведемо в розгорнутому вигляді, не застосовуючи індексного позначення і правила суми для координат, які повторюються.

В циліндричних координатах положення точки P визначається трьома координатами: r, θ, z (рис. 1). Координатними поверхнями є циліндри $r = \text{const}$, півплощини $\theta = \text{const}$ і площини $z = \text{const}$. Декартові координати пов'язані з циліндричними відношеннями $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$, $x_3 = z$.

Розглянемо тригранник одиничних взаємно ортогональних векторів, що утворюють систему: $\mathbf{e}_r$ – вектор радіуса, $\mathbf{e}_\theta$ – вектор дотичної до кола, $\mathbf{e}_z$ – вектор твірної. Кожен із одиничних векторів напрямлений в напрямі зростання відповідної координати (рис. А.1)

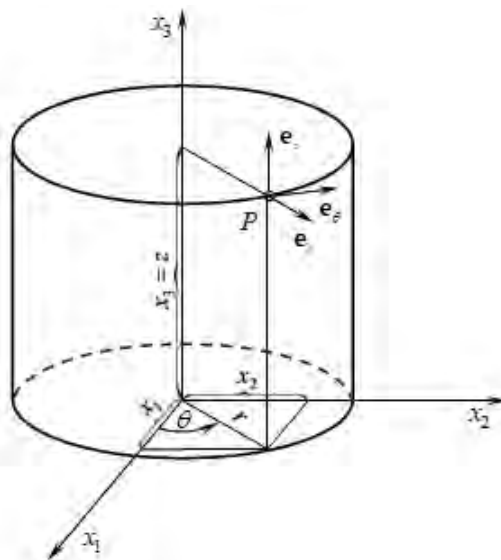


Рисунок А.1 – Циліндрична система координат

З векторного аналізу відомо, що основні векторні операції в циліндричних координатах можна виразити таким чином:

$$\text{grad } \psi = \mathbf{e}_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad (\text{A.1})$$

$$\text{div } \mathbf{a} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}; \quad (\text{A.2})$$

$$\text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{e}_r \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_\theta \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right); \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}; \quad (\text{A.4})$$

В циліндричних координатах співвідношення між компонентами тензора деформацій ε_r , ε_θ , ε_z , $\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta r}$, $\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{zr}$, $\varepsilon_{z\theta} = \varepsilon_{\theta z}$ і компонентами вектора переміщення u_r , u_θ , u_z мають вигляд

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right); \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta r} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right]; \\ \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{zr} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right); \\ \varepsilon_{z\theta} = \varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Рівняння рівноваги набувають вигляду:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_r - \sigma_\theta \right) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + F_r &= 0; \\
\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2\sigma_{r\theta} \right) + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + F_\theta &= 0; \\
\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \sigma_{rz} \right) + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z &= 0,
\end{aligned} \tag{A.6}$$

де σ_r , σ_θ , σ_z , $\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r}$, $\sigma_{rz} = \sigma_{zr}$, $\sigma_{z\theta} = \sigma_{\theta z}$ – компоненти тензора напружень (рис. А.2); F_r , F_θ , F_z – компоненти вектора об'ємної сили $\vec{F}$.

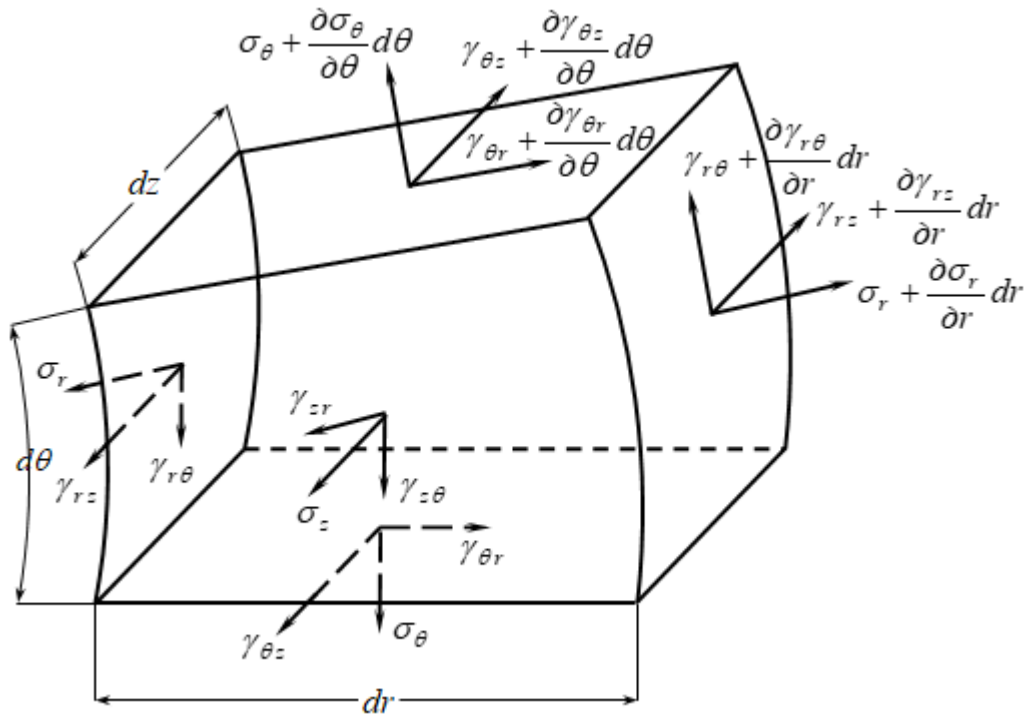


Рисунок А.2 – Напруження, які діють на елемент об'єму в циліндричній системі координат

Співвідношення між компонентами тензора напружень і компонентами тензора деформацій приймають на основі (1.7) вигляд

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= 2\mu\varepsilon_r + \lambda\varepsilon_{kk} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T - T_0); \\
\sigma_\theta &= 2\mu\varepsilon_\theta + \lambda\varepsilon_{kk} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T - T_0); \\
\sigma_z &= 2\mu\varepsilon_z + \lambda\varepsilon_{kk} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T - T_0); \\
\sigma_{r\theta} &= 2\mu\varepsilon_{r\theta}; \quad \sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz}; \quad \sigma_{z\theta} = 2\mu\varepsilon_{z\theta},
\end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\text{де } \varepsilon_{kk} = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

У співвідношеннях (A.7) коефіцієнти Ляме λ і μ і коефіцієнт лінійного теплового розширення α_T в загальному випадку є функціями координат.

Підставляючи вирази для напружень (A.7) в рівняння рівноваги (A.6) і беручи до уваги співвідношення (A.5), знаходимо

$$\begin{aligned}
&\mu \nabla^2 u_r + (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial r} - \mu \frac{u_r}{r^2} - \frac{2\mu}{r^2} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial r} + \\
&+ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \\
&+ \varepsilon_{kk} \frac{\partial \lambda}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} [(3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T - T_0)] + F_r = 0
\end{aligned} \tag{A.8}$$

$$\begin{aligned}
&\mu \nabla^2 u_\theta + \frac{\lambda + \mu}{r} \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial \theta} - \mu \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2\mu}{r^2} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \\
&+ \frac{\partial \mu}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + \\
&+ \frac{\partial \mu}{\partial z} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) + \frac{\varepsilon_{kk}}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} - \\
&- \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} [(3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T - T_0)] + F_\theta = 0
\end{aligned} \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}
& \mu \nabla^2 u_z + (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial z} + \frac{\partial \mu}{\partial r} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \\
& \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) + 2 \frac{\partial \mu}{\partial z} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial z} + \varepsilon_{kk} \frac{\partial \lambda}{\partial z} - \\
& - \frac{\partial}{\partial z} [(3\lambda + 2\mu) \alpha_T (T - T_0)] + F_z = 0
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Рівняння (A.8) – (A.10) визначають поля переміщень u_0 , u_r , u_z , які викликані полем температури $T(\theta, r, z, t)$ у вибраний момент часу t . Для обчислення функції T в циліндричній системі координат рівняння

$$\nabla^2 T - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

з використанням диференціального оператора (A.4) перетворюється до вигляду

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \tag{A.11}$$

За допомогою рівняння (A.11) можна обчислити функцію температури $T(t)$, яка змінюється за часом. Оскільки ця зміна відбувається повільно, при підрахунку функцій переміщень u, v, w можна не враховувати сили інерції і в кожний момент часу t обчислювати ці компоненти окремо за допомогою рівнянь (A.8)-(A.10).

А.2 Постановка задачі теорії термопружності в сферичних координатах

Сферичні координати застосовуються в теорії пружності (термопружності) для опису деформування пружних тіл і об'єктів сферичної

форми. Таку форму мають, наприклад, армуючі включення в композитних матеріалах, сферичної пори та ін. В сферичних координатах положення точки M (рис. А.3) визначається радіусом r , а також зенітним (θ) і азимутальним (φ) кутами.

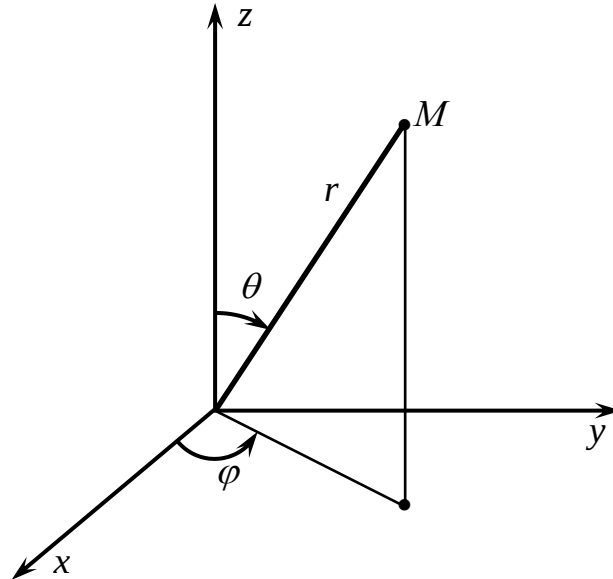


Рисунок А.3 – Сферична система координат

Для цієї системи

$$\begin{aligned} H_1 = H_r = 1, \quad H_2 = H_\theta = r, \quad H_3 = H_\phi = r \sin \theta, \\ g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \theta, \\ g_{12} = 0, \quad g_{23} = 0, \quad g_{31} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

За допомогою цих співвідношень і рівності

$$p_{ij} = \lambda I_1 g_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0)g_{ij},$$

побудуємо вирази для фізичних компонент тензора напружень в сферичній системі координат

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \sigma_{rr} = \lambda I_1 + 2\mu \varepsilon_{rr} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0), \\
\sigma_\theta &= \sigma_{\theta\theta} = \lambda I_1 + 2\mu \varepsilon_{\theta\theta} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0), \\
\sigma_\varphi &= \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda I_1 + 2\mu \varepsilon_{\varphi\varphi} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0), \\
\sigma_{r\theta} &= 2\mu \varepsilon_{r\theta}, \quad \sigma_{\theta\varphi} = 2\mu \varepsilon_{\theta\varphi}, \quad \sigma_{\varphi r} = 2\mu \varepsilon_{\varphi r}.
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Тут I_1 – перший інваріант тензора деформацій.

Вважаємо, що процес термопружного деформування середовища є квазістатичним і інерційними та об'ємними силами в рівнянні

$$\rho \frac{\partial u^i}{\partial t} = \nabla_j p^{ij} + f^i,$$

можна знехтувати. В цьому випадку з урахуванням рівностей (A.2) це рівняння можна привести до системи

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta} + \sigma_{\varphi\theta} \cot \theta) &= 0, \\
\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \cot \theta + 3\sigma_{r\theta}] &= 0, \\
\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\theta\varphi} \cot \theta) &= 0.
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Зв'язок між деформаціями і переміщеннями визначається залежностями

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \\
\varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{u_r}{r} + \cot \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}, & \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \\
\varepsilon_{\theta\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \cot \theta \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right), & \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right).
\end{aligned} \tag{A.15}$$

де u_r , u_θ , u_φ – компоненти вектора переміщень вздовж відповідних координат.

Компоненти тензора деформацій можна виразити також через компоненти тензора напружень:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_{rr} - \nu (\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\varphi\varphi}) \right] + \alpha (T - T_0), \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_{\theta\theta} - \nu (\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{rr}) \right] + \alpha (T - T_0), \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_{\varphi\varphi} - \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \right] + \alpha (T - T_0), \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{\sigma_{r\theta}}{2\mu}, \quad \varepsilon_{\theta\varphi} = \frac{\sigma_{\theta\varphi}}{2\mu}, \quad \varepsilon_{\varphi r} = \frac{\sigma_{\varphi r}}{2\mu}.\end{aligned}\tag{A.16}$$

Співвідношення (A.2) – (A.5) дозволяють сформулювати розв’язувальні рівняння теорії термопружності в сферичних координатах. До них додається рівняння теплопровідності, переписане з урахуванням (A.1):

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(r \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) \right] = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}.\tag{A.17}$$

Побудувавши розв’язки цього рівняння при відповідних початкових і граничних умовах, для кожного знайденого поля функції $T(r, \theta, \varphi, t)$ можна знайти розв’язок системи (A.2) – (A.5).

ДОДАТОК Б

РЕЗУЛЬТАТИ СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

«Цементобетон. армований сталевими стрижнями з епоксидним покриттям» з Розділу 4. п.4.2.2

Чисельне моделювання методом скінченних елементів в осесиметричній постановці із заданими вихідними параметрами для сталі: $E_1 = 210$ ГПа. $\alpha_1 = 1 \cdot 10^{-5}$ $1/^\circ\text{C}$. $\nu_1 = 0,3$; для епоксидного покриття $E_2 = 5,8$ ГПа. $\alpha_2 = 5,5 \cdot 10^{-5}$ $1/^\circ\text{C}$. $\nu_2 = 0,33$; для цементобетону $E_3 = 50$ ГПа. $\alpha_3 = 1 \cdot 10^{-5}$ $1/^\circ\text{C}$. $\nu_3 = 0,2$.

Прийнято, що $T = -30^\circ\text{C}$.

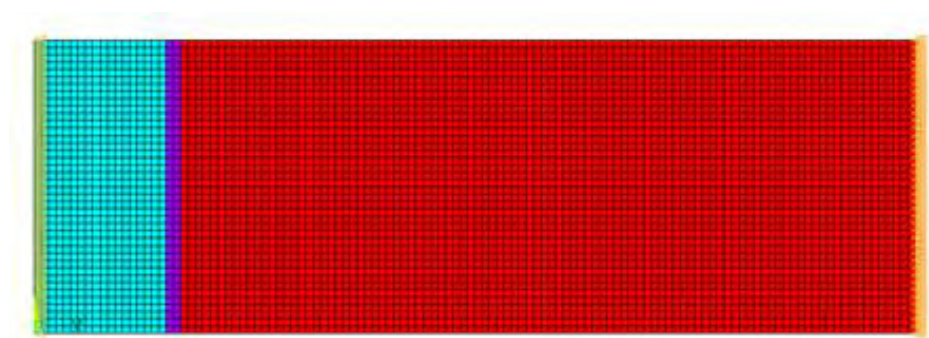


Рисунок Б.1 – Скінченно-елементна модель із заданими температурами вузлів для температурної задачі

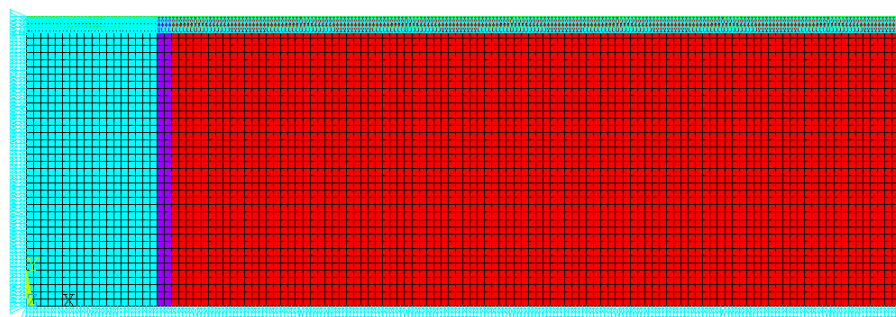


Рисунок Б.2 – Скінченно-елементна модель з граничними умовами для структурної задачі

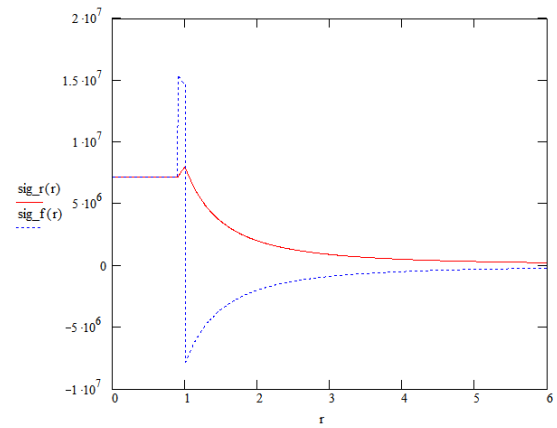
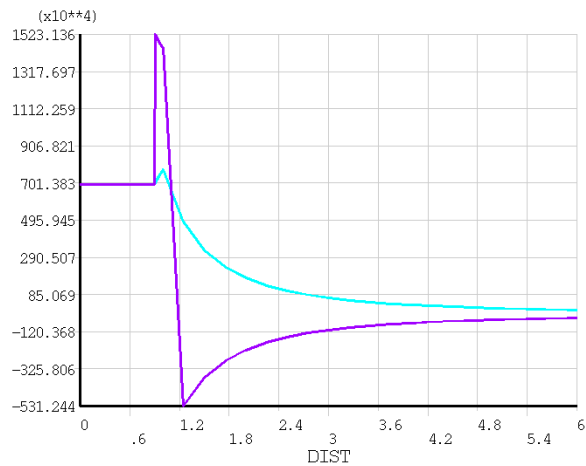


Рисунок Б.3 – Розподіл напружень σ_r та σ_ϕ в радіальному напрямку:

а – результати отримані в програмі ANSYS; б – аналітичний розв’язок.

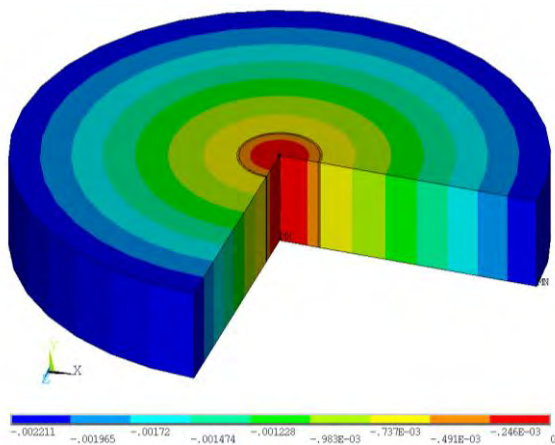


Рисунок Б.4 – Розподіл радіальних переміщень

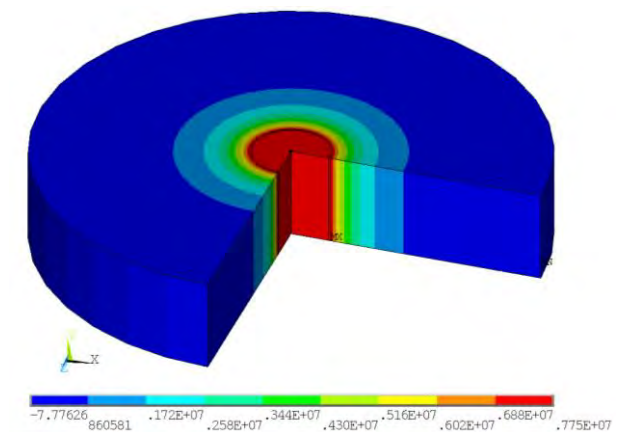


Рисунок Б.5 – Розподіл радіальних напружень σ_r

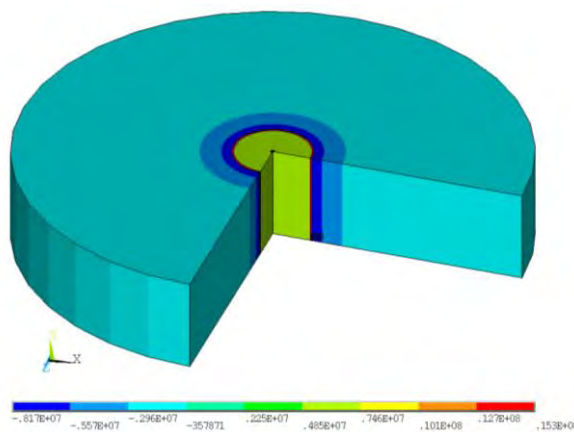


Рисунок Б.6 – Розподіл колових напружень σ_ϕ

Таблиця Б.1 – Значення термонапружень отриманих в результаті аналітичного розв’язку та скінченно-елементного моделювання

Види термонапружень	$r_1 / r_2 = 0.9$	
	Аналітичний розв’язок	ANSYS
$\sigma_r^{(1)}(0) = \sigma_r^{(1)}(r_1)$	7.1850	6.9493
$\sigma_\varphi^{(1)}(0) = \sigma_\varphi^{(1)}(r_1)$	7.1850	6.9493
$\sigma_r^{(2)}(r_1)$	7.1850	6.9713
$\sigma_\varphi^{(2)}(r_1)$	15.4	15.258
$\sigma_r^{(2)}(r_2)$	7.965	7.7605
$\sigma_\varphi^{(2)}(r_2)$	14.62	14.469
$\sigma_r^{(3)}(r_2)$	7.965	7.7063
$\sigma_\varphi^{(3)}(r_2)$	-7.965	-8.1486

«Склопластиковий армуючий стрижень радіусу r_1 з термомеханічними параметрами $\lambda_1 = 30.2 \text{ ГПа}$. $\mu_1 = 12.9 \text{ ГПа}$. $\alpha_1 = 0,9 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ знаходиться в асфальбетонному середовищі з параметрами $\lambda_2 = 1,38 \text{ ГПа}$. $\mu_2 = 0,923 \text{ ГПа}$. $\alpha_2 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ з Розділу 4. п.4.1.2

Прийнято, що $\Delta T = -20^\circ \text{ K}$.

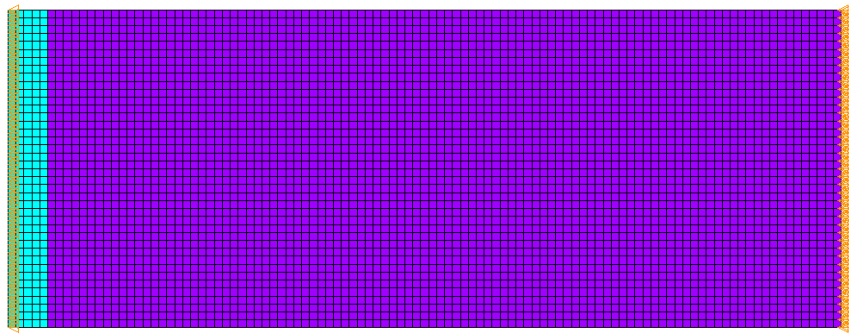


Рисунок Б.7 – Скінченно-елементна модель із заданими температурами вузлів для температурної задачі

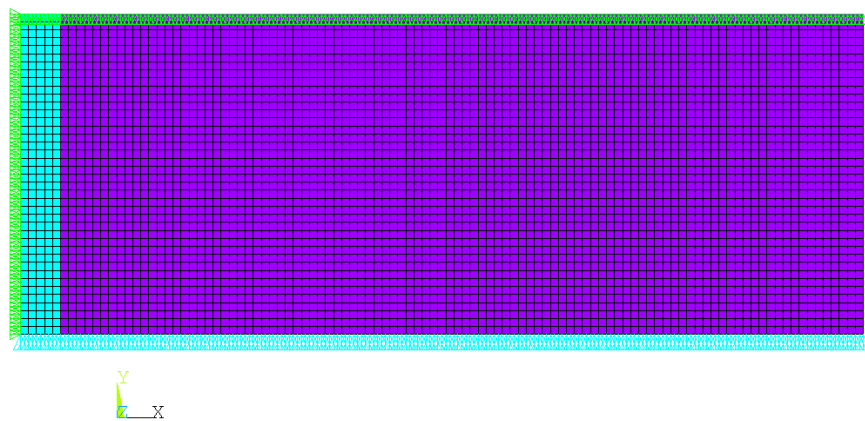


Рисунок Б.8 – Скінченно-елементна модель з граничними умовами для структурної задачі

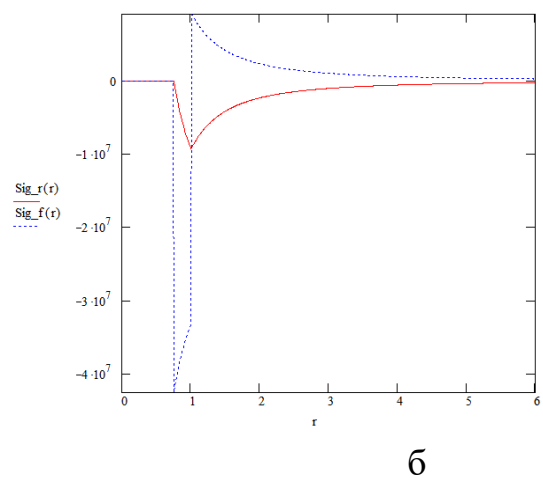
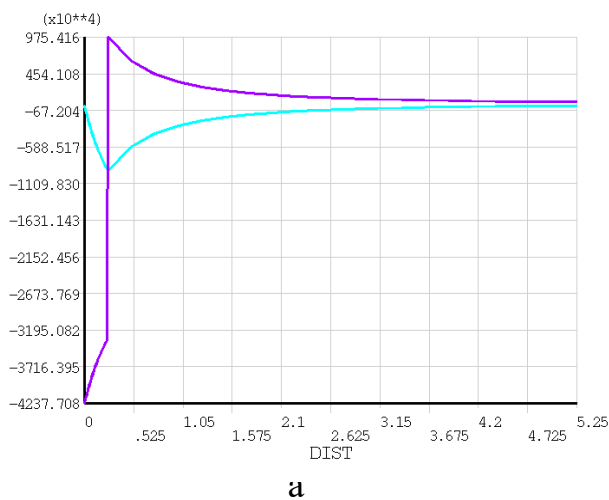


Рисунок Б.9 – Розподіл напружень σ_r та σ_ϕ в радіальному напрямку:

а – результати отримані в програмі ANSYS; б – аналітичний розв'язок.

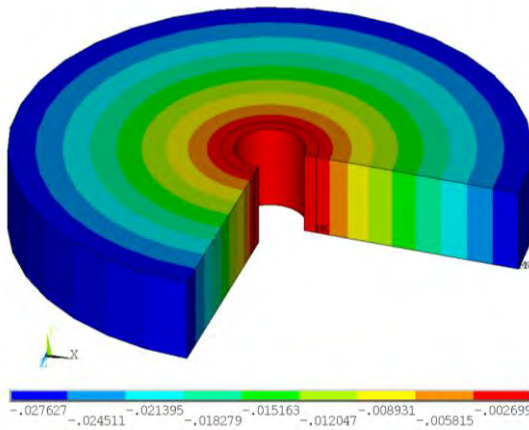
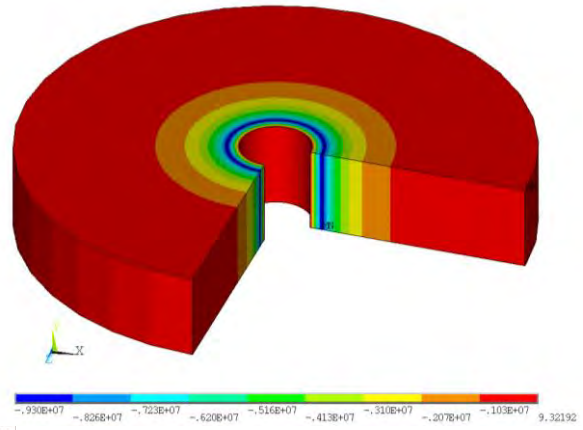
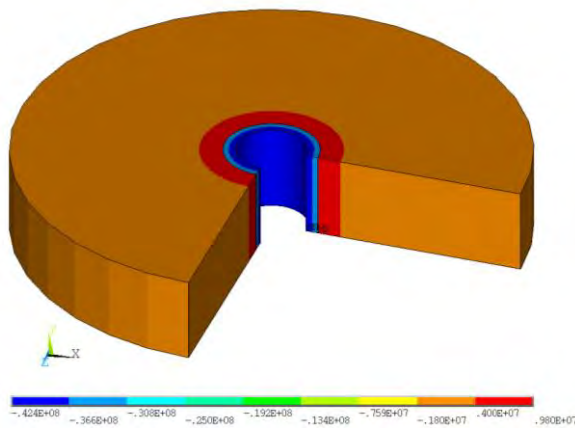


Рисунок Б.10 – Розподіл радіальних переміщень

Рисунок Б.11 – Розподіл радіальних напружень σ_r Рисунок Б.12 – Розподіл колових напружень σ_φ

Таблиця Б.2 – Значення термонапружень отриманих в результаті аналітичного розв'язку та скінченно-елементного моделювання

Види термонапружень	$r_1 / r_2 = 0.75$	
	Аналітичний розв'язок	ANSYS
$\sigma_r^{(1)}(r_1)$ МПа	0	-0.042762
$\sigma_\varphi^{(1)}(r_1)$ МПа	-42.43	-42.377
$\sigma_r^{(1)}(r_2)$ МПа	-9.281	-9.2954
$\sigma_\varphi^{(1)}(r_2)$ МПа	-33.15	-33.124
$\sigma_r^{(2)}(r_2)$ МПа	-9.281	-9.2683
$\sigma_\varphi^{(2)}(r_2)$ МПа	9.281	9.7985

ДОДАТОК В

ДОВІДКИ ПРО ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ РОБОТИ



ДЕРЖАВНЕ АГЕНТСТВО ВІДНОВЛЕННЯ ТА РОЗВИТКУ
ІНФРАСТРУКТУРИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНЕ ПІДПРИЄМСТВО «НАЦІОНАЛЬНИЙ
ІНСТИТУТ РОЗВИТКУ ІНФРАСТРУКТУРИ»
(ДП «НІРІ»)

просп. Берестейський, буд. 57, м. Київ, 03113, тел. (044) 456 34 15
імейл: nauka@nidi.org.ua, вебсайт: www.nidi.org.ua
код ЄДРПОУ 03450778

Довідка

про впровадження наукових розробок
Шлюнь Наталії Володимирівни

Наукові розробки та практичні рекомендації щодо підвищення довговічності дорожнього полотна за рахунок зменшення або виключення додаткових концентраторів термонапружень, викликаних несумісністю термомеханічних характеристик неоднорідних композитних матеріалів, що отримані Шлюнь Н.В. в дисертаційній роботі «Моделі та методи розрахунку неоднорідних композитів з урахуванням макро і мікро термомеханічних ефектів у них» знайшли практичне застосування при проектуванні та розрахунку конструкцій дорожніх одягів для капітального ремонту та будівництва доріг і мостів по всій території України.

Директор, канд. екон. наук



Артем БЕЗУГЛИЙ



ТОВ "КАПОНІР-ГРУП"
ЄДРПОУ 35394166
01054, м. Київ, вул. Олесея Гончара 57-Б
т./ф. (044) 387-12-96
www.caponier.com.ua

Довідка

про впровадження результатів докторської дисертаційної роботи "Моделі та методи розрахунку неоднорідних композитів з урахуванням макро і мікро термомеханічних ефектів у них" Н.В. Шлюнь, виконаної в Національному транспортному університеті

Дана довідка засвідчує, що розробки Шлюнь Н.В. щодо виявлення негативних термомеханічних ефектів зароджень додаткових термонапружень у зернистих композитах залежно від несумісності термомеханічних параметрів їх компонент для підвищення тріщиностійкості та довговічності конструкцій дорожніх одягів отримали практичне застосування при розробці проєктів на виконання поточного ремонту споруд.

Результати досліджень щодо морозостійкості асфальто- та цементобетонів при циклічних змінах температури були використані при підготовці проєктно-кошторисної документації.

Директор



Гусев Д.Ю.



вих. № 01-22/04/2025-ДТ
від 22.04.2025 року

ДОВІДКА

про впровадження результатів докторської дисертаційної роботи Н.В. Шлюнь
"Моделі та методи розрахунку неоднорідних композитів з урахуванням макро і мікро
термомеханічних ефектів у них"

Результати наукових досліджень, що отримані в докторській дисертації Н.В. Шлюнь
представляють великий інтерес для нашої організації. Моделі та методи розрахунку
неоднорідних композитів були використані компанією ТОВ «ДОРТРАНС» при проектуванні
ремонту дорожнього полотна.

Рекомендації щодо підвищення довговічності та тріщиностійкості асфальту та
цементобетонну включено до проектно-кошторисної документації компанії.

З повагою,
директор ТОВ «ДОРТРАНС»



Олександр ПЕДАН



ВИКОНАВЧИЙ ОРГАН КИЇВСЬКОЇ МІСЬКОЇ РАДИ (КИЇВСЬКА МІСЬКА ДЕРЖАВНА АДМІНІСТРАЦІЯ)

ДЕПАРТАМЕНТ ТРАНСПОРТНОЇ ІНФРАСТРУКТУРИ

КОМУНАЛЬНА КОРПОРАЦІЯ «КИЇВАВТОДОР»

(КК «КИЇВАВТОДОР»)

вул. Петра Болбочана (К. Каменєва), 6, м. Київ, 01104, тел. (044)285 03 36 E-mail: kyivavtodor@kyivcity.gov.ua
Код ЄДРПОУ 03359026

05091015 № 053/167-11/13
На № _____ від _____

Довідка

про впровадження результатів докторської дисертаційної роботи «Моделі та методи розрахунку неоднорідних композитів з урахуванням макро і мікро термомеханічних ефектів у них» Шлюнь Н.В. виконаної в Національному транспортному університеті

Наукові розробки Шлюнь Н.В. щодо визначення концентраторів термонапружень в матеріалах з скляною стрижневою арматурою для підвищення тріщиностійкості та довговічності конструкцій дорожніх одягів отримали практичне застосування при проєктуванні конструкцій дорожніх одягів з композитів із їх найбільш доцільними термомеханічними властивостями. Результати досліджень відносно дії водоморозних впливів на тріщиностійкість асфальтобетонного покриття були враховані на етапах проєктування та виконанні розрахунків конструкцій.

Генеральний директор

Олександр ФЕДОРЕНКО



020449

УКРАЇНА
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТРАНСПОРТНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

вул. М.Омеляновича-Павленка, 1, м. Київ, Україна, 01010, т.ф. +38 (044) 280 82 03, т. +38 (044) 280 87 65
e-mail: general@ntu.edu.ua, код ЄДРПОУ 02070915

09.05.2025 № 1092/01

на №

ДОВІДКА

про впровадження в навчальний процес результатів
докторської дисертаційної роботи Н.В. Шлюнь
“Моделі та методи розрахунку неоднорідних композитів з урахуванням
макро і мікро термомеханічних ефектів у них”

Результати досліджень дисертаційної роботи Н.В. Шлюнь були впроваджені у навчальному процесі на кафедрі дорожньо-будівельних матеріалів і хімії факультету транспортного будівництва НТУ при викладанні дисципліни «Механіка дорожнього одягу» для студентів спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія» освітньої програми «Технології будівельних конструкцій, виробів і матеріалів», а також дисципліни «Сучасні моделі та методи розрахунку дорожніх конструкцій з урахуванням термореологічних властивостей» для аспірантів спеціальності 192 «будівництво та цивільна інженерія».

Проректор з навчальної роботи
та міжнародних зв'язків,
к.т.н., професор



Віталій ХАРУТА

Декан факультету
транспортного будівництва
д-р.техн.наук, професор

Андрій БУБЕЛА







УКРАЇНА



СВІДОЦТВО

про реєстрацію авторського права на твір

№ 115933

Науковий твір «Математичні формули для обчислення додаткових термонапружень в армованих дорожніх покриттях при термомеханічній несумісності матеріалів покриття і арматури»

(вид, назва твору)

Автор(и) Шлюнь Наталія Володимирівна, Гуляєв Валерій Іванович, Мозговий Володимир Васильович, Шевчук Людмила Володимирівна

(повне ім'я, псевдонім (за наявності))

Дата реєстрації 19 січня 2023 р.

Директор
Державної організації
«Український національний
офіс інтелектуальної власності
та інновацій»



Олена ОРЛЮК







ДОДАТОК Г

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Монографії:

1. Гуляєв В.І., Гайдайчук В.В., Мозговий В.В., Густелєв О.О., Заєць Ю.О., Шевчук Л.В., Шлюнь Н.В. Термопружний стан багат шарових дорожніх покриттів. НТУ. Київ.2018. 252 с. ISBN 978-966-632-299-2 (*Особистий внесок автора: досліджено причини появи поперечних тріщин у верхньому шарі дорожнього покриття в зимовий час; проаналізовано вплив викривлення на перерозподіл полів напружень під дією температурних збурень*).
2. Гуляєв В.І., Мозговий В.В., Шлюнь Н.В., Заєць Ю.О., Білобрицька О.І., Шевчук Л.В., Внутрішньоструктурні термонапруження в композитних матеріалах з термомеханічно несумісними параметрами їх фракцій. Київ: Вид. Ліра-К, 2023. 302 с. ISBN 978-617-520-680-5 (*Особистий внесок автора: розробка математичних моделей термопружного деформування і руйнування композитних, асфальтобетонних та цементобетонних матеріалів; виведення диференціальних рівнянь та їх розв'язування*).
3. Gulyayev, V., Glazunov, S., Glushakova, O., Vashchilina, E., Shevchuk, L., Shlyun, N., Andrusenko, E. Modelling Emergency Situations in the Drilling of Deep Boreholes. Cambridge Scholars Publishing. 2019. ISBN(10): 1-5275-4020-0, ISBN(13): 978-1-5275-4020-0 (*Особистий внесок автора: постановка та розв'язання задач 7-го розділу монографії*).
4. Gulyayev, V.I., Shlyun, N.V. Singularly perturbed problems of drill string buckling in deep curvilinear borehole channels. Modern Trends in Structural and Solid Mechanics 1. ISTE Ltd and John Wiley & Sons, Inc.2021, pp. 177-200. ISBN(10): 1-5275-4020-0, ISBN(13): 978-1-5275-4020-0 ISBN: 978-1-78630-714

(Особистий внесок автора: комп'ютерне моделювання сингулярно-збуреної задачі, графічне представлення отриманих результатів.) **Scopus**

Статті у виданнях іноземних держав або у виданнях України, які включені до міжнародних наукометричних баз:

5. Gulyaev V.I., Shlyun N.V. and Zaets Yu.O. Spiral Buckling of Torque and Axial Force-Prestressed Nanotubes. *Strength of Materials*. 2024. 56(1). pp. 62–69. (Особистий внесок автора: розроблено математичну модель для визначення критичних станів та форм біфуркаційного випинання нанотрубок, напружених поздовжньою силою та крутним моментом). DOI:[10.1007/s11223-024-00627-7](https://doi.org/10.1007/s11223-024-00627-7) **Scopus Q4**

6. Shlyun N.V., Analysis of thermo-mechanical incompatibility of fullerenes with polymeric matrices of composites. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2024. 112. pp.139-148. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2024.112.139-148> **WoS Q4**

7. Gulyaev, V.I., Mozgovyi, V.V., Shlyun', N.V. Thermomechanical aspects of frost resistance of cement and asphalt concrete materials. *International Applied Mechanics*, 2023, 59(5), p. 594–604.. (Особистий внесок автора: виведення та розв'язування диференціальних рівнянь термпружного деформування композитних матеріалів під час замерзання води в їх порах і капілярах). DOI:[10.1007/s10778-024-01244-2](https://doi.org/10.1007/s10778-024-01244-2) **Scopus Q3**.

8. Gulyaev, V.I., Shlyun, N.V. Intrastructural thermal stresses in composites with homogeneous and heterogeneous spherical inclusions. *Strength of Materials*. 2023. 55(2). pp. 254–264. (Особистий внесок автора: розробка математичних моделей термпружного деформування асфальтобетонних матеріалів з гумовими включеннями в умовах температурних змін. виведення розв'язувальних рівнянь, побудова їх розв'язків). DOI:[10.1007/s11223-023-00520-9](https://doi.org/10.1007/s11223-023-00520-9) **Scopus Q4**

9. Gulyayev V.I., Mozgovyi V.V., Shlyun N.V., Shevchuk L.V.

Modelling negative thermomechanical effects in reinforced road structures with thermoelastic incompatibility of coating and reinforcement materials. *System Research and Information Technologies*. 2022. 2022(2), pp.117-127. (Особистий внесок автора: побудова аналітичних виразів для визначення значень додаткових термонапружень та формулювання умов термомеханічної несумісності матеріалів асфальтобетону та арматури).[DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2022.2.09](https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2022.2.09) **Scopus Q4**

10. Gulyayev, V.I., Mozgovyi, V.V., Shlyun, N.V., Shevchuk, L.V., Bilobrytska, O.I. Negative thermomechanical effects in granular composites with incompatible thermomechanical parameters of their components. *International Review of Mechanical Engineering*. 2022. 16(4), pp. 188–197. (Особистий внесок автора: визначення концентрації напружень на поверхні сферичної пори). <https://doi.org/10.15866/ireme.v16i4.21996>. **Scopus Q2**

11. Gaidaichuk V.V., Shlyun N.V., Shevchuk L.V., Bilobrytska O.I. Theoretical modelling of the effect of thermal delamination of an asphalt concrete pavement from a rigid foundation of a road or bridge. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2022, 109, pp.38-49. (Особистий внесок автора: виконано аналіз термопружного деформування двошарової пластини зі співставними жорсткими характеристиками шарів).<https://doi.org/10.32347/2410-2547.2022.109.38-49> **WoS Q4**

12. Shlyun, N.V., Gulyayev, V.I. Buckling of a drill-string in two-sectional bore-holes. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2020. 172. 105427. (Особистий внесок автора: виведення розв'язувальних рівнянь, побудова їх розв'язків). <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105427> **Scopus Q1**

13. Гайдайчук В.В., Густелев О.О., Шевчук Л.В., Шлюнь Н.В. Термопружне деформування шаруватого покриття на вгнутій ділянці дороги *Науково-технічний збірник «Опір матеріалів і теорія споруд»*. 2019. №. 102.

С. 180-190. *(Особистий внесок автора: проаналізовано вплив викривлення на перерозподіл полів напружень під дією температурних збурень)*. DOI: [10.32347/2410-2547.2019.102.180-190](https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.102.180-190) WoS Q4

Статті у фахових виданнях:

14. Шлюнь Н.В. Плоскі та просторові періодичні згинні коливання подовжених карбонових нанотрубок. *Вісник НТУ. Серія «Технічні науки»*. 2024. Вип. 1 (58). DOI: [10.33744/2308-6645-2024-1-58-203-211](https://doi.org/10.33744/2308-6645-2024-1-58-203-211) С. 203–211.

15. Шлюнь, Н.В., Заєць Ю.О. Термомеханічні деформування карбонових нанотрубок в полімерних матрицях. *Автомобільні дороги і дорожнє будівництво*. Науково-технічний збірник. 2024. Вип. 115(1). С.67-80. *(Особистий внесок автора: розробка математичної моделі зародження внутрішньоструктурних термонапружень в полімерних матеріалах, що армовані карбоновими нанотрубками в умовах зміни в них однорідних і неоднорідних полів температур)*. DOI:[10.33744/0365-8171-2024-115.1-067-080](https://doi.org/10.33744/0365-8171-2024-115.1-067-080)

16. Гуляєв В.І., Шлюнь Н.В. Математичне моделювання внутрішньоструктурних термонапружень, що викликаються полями змінної температури в композитах зі стрижневою арматурою. *Дороги і мости*. Київ. 2023. Вип. 28. С. 58–69. *(Особистий внесок автора: теоретичне моделювання ефектів зародження додаткових внутрішньоструктурних термонапружень в армуючих стрижнях (волокнах) з урахуванням їх покриття ізолюючим шаром)*.

<https://doi.org/10.36100/dorogimosti2023.28.068>

17. Шлюнь Н.В. Теоретичне моделювання зародження внутрішніх прихованих термічних дефектів у бітумному середовищі з гумовими включеннями. *Автомобільні дороги і дорожнє будівництво*. 2023. Вип. 114. с.106-121. DOI:[10.33744/0365-8171-2023-114.1-106-121](https://doi.org/10.33744/0365-8171-2023-114.1-106-121)

18. Гуляєв В.І., Шлюнь Н.В. Три механізми виникнення

термонапружень і терморуїнувань у пружних тілах. *Вісник НТУ Серія «Технічні науки»*. 2023. Вип. 3 (57). С. 43-49. (Особистий внесок автора: виділені три основні причини порушення умов вільного термодетормування пружних тіл, що призводять до генерування в них термонапружень). DOI: [10.33744/2308-6645-2023-3-57-043-049](https://doi.org/10.33744/2308-6645-2023-3-57-043-049)

19. Шлюнь Н.В., Білобрицька О.І., Шевчук Л.В., Заєць Ю.О. Концентрація термонапружень в цементобетоні в околі капіляра, частково або повністю заповненого водою, при її замерзанні. *НВЖ «Автошляховик України»*. №4. 2023. С.38-48. (Особистий внесок автора: визначення граничних рівнів наповнення водою пор та капілярів, за яких в цементобетонних та асфальтобетонних матеріалах виникають терморуїнування). DOI: [10.33868/0365-8392-2023-4-276-39-49](https://doi.org/10.33868/0365-8392-2023-4-276-39-49)

20. Гуляєв В.І., Мозговий В.В., Шлюнь Н.В. Заєць Ю.О. Внутрішньоструктурні термонапруження в асфальтобетонних і цементобетонних матеріалах, підсилених фібергласовою, фіберкарбоновою, фібербазальтовою та фіберарамідною арматурою. *НВЖ «Автошляховик України»*. 2023. №3. С.62-69. (Особистий внесок автора: виведення виразів для радіальних та колових термонапружень, що викликаються зміною температури системи.). DOI: [10.33868/0365-8392-2023-3-275-62-69](https://doi.org/10.33868/0365-8392-2023-3-275-62-69)

21. Шлюнь, Н.В. Термомеханічна подібність при експериментальному та теоретичному моделюванні термоміцності дорожніх матеріалів та конструкцій. *Автомобільні дороги і дорожнє будівництво*. 2023. Вип. 113. С.98-107. DOI: [10.33744/0365-8171-2023-113.1-098-107](https://doi.org/10.33744/0365-8171-2023-113.1-098-107)

22. Шлюнь Н.В., Білобрицька О.І., Шевчук Л.В., Заєць Ю.О. Умови відсутності та три механізми зародження термонапружень в пружних тілах. *Вісник НТУ Серія «Технічні науки»*. 2023. Вип. (55). С. 323-344. (Особистий внесок автора: виділені три основні причини порушення умов вільного термодетормування пружних тіл, що призводять до генерування в них

термонапружень). [DOI: 10.33744/2308-6645-2023-1-55-323-334](https://doi.org/10.33744/2308-6645-2023-1-55-323-334)

23. Гуляєв В.І., Мозговий В.В., Шлюнь Н.В. Чому в деяких регіонах у конструкціях мостів заборонена сталева арматура з епоксидним покриттям? *НВЖ «Автошляховик України»*. №2. 2023. с.48-56. (Особистий внесок автора: виконаний аналіз термомеханічної несумісності матеріалів цементобетону та арматур) [DOI: 10.33868/0365-8392-2023-2-274-48-56](https://doi.org/10.33868/0365-8392-2023-2-274-48-56)

24. Шлюнь Н.В. Пониження концентрації термонапружень у бітумному матеріалі з модифікованими гумовими крихтами. *НВЖ «Автошляховик України»*. №2. 2022. С.60-66. [DOI: 10.33868/0365-8392-2022-2-270-60-66](https://doi.org/10.33868/0365-8392-2022-2-270-60-66)

25. Шлюнь Н.В., Заєць Ю.О. Про внутрішній механізм термопошкоджень в армованих композитах з термомеханічною несумісністю їх фаз. *Вісник НТУ Серія «Технічні науки»*. 2022. Вип. 3 (53). С.427-432. (Особистий внесок автора: виведення розв'язувальних рівнянь, знайдення їх розв'язків в замкненій формі). [DOI: 10.33744/2308-6645-2022-3-53-427-432](https://doi.org/10.33744/2308-6645-2022-3-53-427-432)

26. Шлюнь Н. В. Особливості термонапруженого стану асфальтобетонного дорожнього покриття з гумовими включеннями. *Дороги і мости*. Київ. 2022. Вип. 26. С. 124–137. <https://doi.org/10.36100/dorogimosti2022.26.124>

27. Шлюнь Н.В., Білобрицька О.І. Сингулярно збурені задачі термомеханіки шаруватих дорожніх покриттів. *Вісник НТУ*. 2020. №.1(46). С. 455-461. (Особистий внесок автора: досліджено сингулярно-збурену задачу теплового деформування дорожнього покриття та розподіл в його масиві полів температури, переміщень та напружень). [DOI: 10.33744/2308-6645-2020-1-46-455-461](https://doi.org/10.33744/2308-6645-2020-1-46-455-461)

28. Гуляєв В.І., Мозговий В.В., Густелєв О.О., Шлюнь Н.В., Куцман О.М., Баран С.А. Дослідження напружено-деформованого стану дорожнього одягу з укріпленою основою під поперечними тріщинами і швами. *Вісник*

НТУ. 2019. №. 3(43). С. 26-38. *(Особистий внесок автора: досліджено причини появи поперечних тріщин у верхньому шарі дорожнього покриття в зимовий час)*. DOI: [10.33744/2308-6645-2019-1-43-026-038](https://doi.org/10.33744/2308-6645-2019-1-43-026-038)

29. Гуляєв В.І., Шлюнь Н.В. Проектування оптимальних траєкторій свердловин. Вісник НТУ. 2021. Вип. 1 (49). С. 109-116. *(Особистий внесок автора: комп'ютерне моделювання проблеми)*. DOI: [10.33744/2308-6645-2021-1-48-109-116](https://doi.org/10.33744/2308-6645-2021-1-48-109-116)

Опубліковані праці апробаційного характеру:

30. Шлюнь Н.В., Шевчук Л.В. Про деякі закономірності сезонного перерозподілу полів напружень у конструкціях шаруватих покриттів під дією транспортних навантажень. Міжнародна науково-практична конференція «Інноваційні підходи у відновленні транспортної інфраструктури в особливих умовах воєнного стану: виклики та перспективи. К.: НТУ, 2024. 660 с. ISBN 978-966-632-328-9. *(Особистий внесок автора: проведено скінченно-елементний аналіз перерозподілу полів напружень у конструкціях шаруватих покриттів під дією транспортних навантажень)*. DOI [10.33744/978-966-632-328-9-2024-3](https://doi.org/10.33744/978-966-632-328-9-2024-3)

31. Шлюнь Н. В., Заєць Ю. О. Термомеханічне зародження мікропорожнин в околі пор та капілярів дорожніх матеріалів заповнених водою. International scientific-practical conference Current issues of science, education and technology in the context of modern challenges: conference proceedings. Aarhus, Denmark, June 29, 2024. Aarhus, Denmark: Scholarly C.48-49. *(Особистий внесок автора: визначення граничних рівнів наповнення водою пор та капілярів, за яких в цементобетонних та асфальтобетонних матеріалах виникають локальні тріщини і терморуїнування)*. <https://www.economics.in.ua/2024/06/29.html>

32. Шлюнь Н. В. Особливості термомеханічної подібності в армованих композитних середовищах. International scientific-practical

conference Science, education and technology: global trends and regional aspects: conference proceedings Tampere, Finland, July 11, 2024. с.34-36. <https://www.economics.in.ua/2024/07/11.html>

33. Шлюнь Н.В., Заєць Ю.О., Берлянд М.С. Теоретичний аналіз внутрішньоструктурних термонапружень в композиті, що армований суцільними стрижнями. *LXXX наукова конференція професорського-викладацького складу, аспірантів, студентів та співробітників відокремлених структурних підрозділів університету*. К.: НТУ, 2024. С. 759. ISSN: 2786-6459 (Online), ISSN: 2786-6467 (Print). (Особистий внесок автора: виконаний аналіз термомеханічної несумісності матеріалів асфальтобетону, цементобетону та арматур). [DOI:10.33744/2786-6459-2024-80](https://doi.org/10.33744/2786-6459-2024-80)

34. Гуляєв В.І., Шлюнь Н.В. Мікротермомеханічні ефекти на інтерфейсних поверхнях композитів, які армовані карбоновими нанотрубками, в високоградієнтних полях температури. *LXXX наукова конференція професорського-викладацького складу, аспірантів, студентів та співробітників відокремлених структурних підрозділів університету*. К.: НТУ, 2024. С. 853-854. ISSN: 2786-6459 (Online), ISSN: 2786-6467 (Print), (Особистий внесок автора: виконаний аналіз генерування у матриці недопустимих концентраторів термонапружень, що викликані термомеханічною несумісністю параметрів базового матеріалу та нанотрубки). [DOI: 10.33744/2786-6459-2024-80](https://doi.org/10.33744/2786-6459-2024-80)

35. Шлюнь Н.В. Моделювання термонапруженого стану композиту при несумісних термомеханічних властивостях його матриці та наповнювача. *LXXIX наукова конференція професорсько-викладацького складу, аспірантів, студентів та співробітників відокремлених структурних підрозділів університету: тези доповідей*. К.: НТУ, 2023. С. 656. DOI: [10.33744/2786-6459-2023-79](https://doi.org/10.33744/2786-6459-2023-79)

36. Gaydaychuk V., Shlyun N., Shevchuk L., Kutsman O. Modelling discontinuous stress fields in multilayer coatings of automobile roads. *IEEE SAIC*. 2020. Kyiv, Ukraine. p. 140. (Особистий внесок автора: виконаний скінченно-елементний аналіз впливу тріщини на напружено-деформований стан багат шарової системи) **Scopus** DOI: [10.1109/SAIC51296.2020.9239207](https://doi.org/10.1109/SAIC51296.2020.9239207)

37. Шевчук Л.В., Шлюнь Н.В., Тишкевич М.М. Термопружні деформації асфальтобетону на металевій плиті Південного моста. *LXXV наукова конференція професорського-викладацького складу, аспірантів, студентів та співробітників відокремлених структурних підрозділів університету*. К.: НТУ, 2019. С.505. (Особистий внесок автора: виконаний аналіз напруженодеформованого стану асфальтобетону)

https://drive.google.com/file/d/1QtiGot7hhzOMqfUWx3T99V_7q-QAzLx1/view

38. Шлюнь Н.В., Термонапружений стан дорожніх покриттів. III Міжнародна науково-практична конференція «Сучасні методи і проблемно-орієнтовані комплекси розрахунку конструкцій і їх застосування у проектуванні і навчальному процесі» вересень 2019. Р. 12-15.

https://drive.google.com/file/d/1QtiGot7hhzOMqfUWx3T99V_7q-QAzLx1/view

39. В. Гуляєв, Н. Шлюнь, Л. Шевчук, Ю. Заєць. Специфіка термомеханічного зародження внутрішніх дефектів в бітумній структурі з гумовими включеннями. *Впровадження інноваційних матеріалів і технологій при проектуванні, будівництві та експлуатації об'єктів транспортної інфраструктури в рамках програми «Велике будівництво»*: збірник тез доповідей Міжнародної конференції, м. Київ, 24-25 листопада 2022 року. Київ: НТУ, 2022, с.111. ISBN: 978-966-632-317-3 (Online). (Особистий внесок автора: дослідження особливостей температурного деформування та розподілення полів термонапружень в композитній структурі, що

складається з бітумної матриці та гумових включень) DOI: [10.33744/978-966-632-317-3-2022-2](https://doi.org/10.33744/978-966-632-317-3-2022-2)

40. Шлюнь Н.В. Еволюція термонапружень в цементобетоні на стінці капіляру частково або повністю заповненого водою при падінні температури. *Перспективи розвитку автомобільного транспорту та інфраструктури: збірка тез доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції*. Київ: ДП ДержавтотрансНДІпроект», 2023, ст.96-90. ISBN 978-966-8799-22-8

https://insat.org.ua/files/nav/tkt/conferences/Thesis_Collect_2022.pdf

41. Шлюнь Н., Гринчак А. Математичне моделювання додаткових внутрішньоструктурних термонапружень в композитах із неоднорідними сферичними включеннями. *Всеукраїнська наукова конференція здобувачів освіти і молодих учених «Відбудова транспортної інфраструктури України»*. К.: НТУ, 2023. С. 99. ISBN: 978-966-632-319-7 (Особистий внесок автора: Побудова моделі, виведення розв'язувальних рівнянь, знайдення їх розв'язків). DOI:10.33744/978-966-632-319-7-2023-1

Свідоцтва та патенти:

42. Пат. 155834 Україна, МПК (2024.01) E01C 7/00 E01C 11/00 Спосіб виключення ефекту термосилового відшарування асфальтобетонного покриття від крайових ділянок жорсткої основи дороги або мосту при температурних змінах. В.І. Гуляєв, Н.В. Шлюнь, О.І. Білобрицька, Л.В. Шевчук, С.А. Баран, І.І. Гринчак, заявник та власник Національний транспортний університет. № и 2022 02048 17.04.2024: опубл. 17.04.2024, Бюл. № 16. (Особистий внесок автора: дослідження виникнення зрушуючих термонапружень доріг при зміні їх температури). <https://sis.nipo.gov.ua/uk/search/detail/1795717/>

43. Пат. 152211 Україна, МПК E01B3/14 E01B31/28 Спосіб зменшення додаткових контактних термонапружень в асфальтобетонних

дорожніх покриттях, армованих стрижнями, при несумісності термомеханічних параметрів матеріалів конструкції в умовах температурних впливів. В.І. Гуляєв, О.І. Білобрицька, Н.В. Шлюнь, Л.В. Шевчук, О.М. Куцман, І.І. Гринчак, заявник та власник Національний транспортний університет. № u202202047 04.01.2023: опубл. 04.01.2023, Бюл. № 1/2023. *(Особистий внесок автора: побудова аналітичних виразів для визначення значень додаткових термонапружень, формулювання умов термомеханічної несумісності матеріалів)*. <https://sis.nipo.gov.ua/uk/search/detail/1714351/>

44. Пат. 149263 Україна, МПК Е 01С 3/06 (2006.01) Спосіб виключення критичних напружень в зоні поперечного розвантажуючого розрізу багат шарового асфальтобетонного дорожнього покриття. Л.В. Шевчук, Н.В. Шлюнь, О.І. Білобрицька, С.А. Баран, О.М. Куцман, заявник та власник Національний транспортний університет. № u202103651 24.06.2021: опубл. 27.10.2021, Бюл. №43. *(Особистий внесок автора: аналіз скінченно-елементного моделювання)*. <https://sis.nipo.gov.ua/uk/search/detail/1635254/>

45. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір Науковий твір: «Математичні формули для обчислення додаткових термонапружень в армованих дорожніх покриттях при термомеханічній несумісності матеріалів покриття і арматури». Н.В. Шлюнь, В.І. Гуляєв, Мозговий В.В., Л.В. Шевчук. №115933, 19.01.2023 *(Особистий внесок автора: виведення аналітичних виразів)*. <https://sis.nipo.gov.ua/uk/search/detail/1730680/>

46. Свідоцтво про право автора на твір: комп'ютерна програма «Комп'ютерний аналіз впливу вертикальних тріщин та розшарувань в дорожньому покритті на поля деформацій та напружень в його конструкції» Шлюнь Н.В., Шевчук Л.В., Білобрицька О.І., Куцман О.М., № 96560, 2020 р. *(Особистий внесок автора: розроблено методику комп'ютерного моделювання і прогнозування явищ концентрації напружень в*

багатошарових асфальтобетонних дорожніх покриттях).

<https://sis.nipo.gov.ua/uk/search/detail/1625410/>

47. Свідоцтво про право автора на твір: Комп'ютерна програма «Комп'ютерний аналіз впливу термомеханічних характеристик матеріалів дорожнього покриття на його термонапружений стан» Шлюнь Н.В., Шевчук Л.В., Білобрицька О.І., Баран С.А., № 96561, 2020 р. *(Особистий внесок автора: розроблено методику комп'ютерного моделювання і прогнозування явищ концентрації напружень в багатошарових асфальтобетонних дорожніх покриттях).* <https://sis.nipo.gov.ua/uk/search/detail/1625408/>