МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТРАНСПОРТНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

На правах рукопису

ЗАЄЦЬ ЮЛІЯ ОЛЕКСАНДРІВНА

УДК 539.3

ЕКРАНУВАННЯ РОЗРИВНИХ ХВИЛЬ В НЕОДНОРІДНИХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ ПРУЖНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

05.23.17 – будівельна механіка

ДИСЕРТАЦІЯ
на здобуття наукового ступеня кандидата
технічних наук

Науковий керівник –
Гуляєв Валерій Іванович
доктор технічних наук,
професор

Київ – 2015

ЗМІСТ

ВСТУП. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ 5
РОЗДІЛ 1 СТАН ПРОБЛЕМИ МЕХАНІКИ ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ ПРУЖНИХ СЕРЕДОВИЩАХ 11
1.1 Прикладні аспекти проблеми розповсюдження хвиль в пружних середовищах 11
1.2 Огляд теоретичних досліджень створення екранів від впливу розривних хвиль 18
1.3 Теоретичні аспекти проблеми розповсюдження хвиль в пружних середовищах та їх дифракції на неоднорідностях 21
1.4 Висновки до розділу 1 31
РОЗДІЛ 2 ПРОМЕНЕВИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ РОЗРИВНИХ ХВИЛЬ В НЕОДНОРІДНИХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ ПРУЖНИХ СЕРЕДОВИЩАХ ЗІ ЗМІННИМИ МЕХАНІЧНИМИ ПАРАМЕТРАМИ 33
2.1 Рівняння динаміки пружного анізотропного середовища 33
2.2 Основні положення нульового наближення променевого методу аналізу поширення розривних хвиль в ізотропному пружному середовищі 40
2.2.1 Кінематика розповсюдження фронтів розривних (слабких ударних) хвиль в ізотропному пружному середовищі 40
2.2.2 Динаміка розповсюдження розривних хвиль в однорідному ізотропному пружному середовищі 50
2.3.1 Кінематика розповсюдження фронтів розривних (слабких ударних) хвиль в анізотропному неоднорідному пружному середовищі 54
2.3.2 Динаміка розповсюдження розривних хвиль в анізотропних неоднорідних пружних середовищах. 60
2.4 Висновки до розділу 2 65

РОЗДІЛ 3 ПОСЛАБЛЕННЯ ТА ЗБІЛЬШЕННЯ ІНТЕНСИВНОСТІ РОЗРИВНИХ ХВИЛЬ В НЕОДНОРІДНИХ ПРУЖНИХ СЕРЕДОВИЩАХ ЗІ ЗМІННИМИ МЕХАНІЧНИМИ ПАРАМЕТРАМИ 66

3.1 Трансформування променів і фронтів в неоднорідних пружних середовищах зі змінними параметрами анізотропії. 67

3.1.1 Випадок зміни елементів тензора пружних сталих за законом квадратичної функції 69

3.1.2 Випадок зміни елементів тензора пружних сталих за законом тригонометричної функції..... 91

3.2 Перетворення фронтів пружних хвиль в ізотропному середовищі з шаром змінної густини 114

3.3 Перетворення фронтів пружних хвиль в анізотропному середовищі з шаром неоднорідності зі змінними механічними характеристиками..... 123

3.4 Висновки до розділу 3 138

РОЗДІЛ 4 ЕКРАНУВАННЯ РОЗРИВНИХ ХВИЛЬ В ШАРУВАТО-НЕОДНОРІДНИХ ПРУЖНИХ СЕРЕДОВИЩАХ 140

4.1 Екранування слабких ударних хвиль в ізотропних середовищах з однією площиною розділу їх властивостей..... 140

4.1.1 Взаємодія плоскої розривної хвилі при її нормальному падінні на площину розділу двох середовищ..... 146

4.1.2 Тестування достовірності розробленої моделі і результатів розрахунків за допомогою принципу збереження повної енергії системи 151

4.1.3 Дифракція розривних хвиль на площині розподілу двох середовищ, з’єднаних без можливості проковзування..... 154

4.1.4 Дифракція розривних хвиль на площині розподілу двох середовищ, з’єднаних з можливістю проковзування 161

4.2 Екранування розривних хвиль в трансверсально-ізотропних середовищах з однієї площиною розділу їх властивостей 167
4.2.1 Взаємодія плоскої розривної хвилі з площиною розділу двох анізотропних середовищ, з'єднаних без можливості проковзування 167
4.2.2 Взаємодія плоскої розривної хвилі з площиною розділу двох анізотропних середовищ, з'єднаних з можливістю проковзування 174
4.3 Екранування розривних хвиль в ізотропних середовищах з двома площинами розділу їх властивостей (пружним шаром) 176
4.3.1 Визначення інтенсивності взаємодії падаючої розривної хвилі при проходженні пружного шару 176
4.3.2 Визначення інтенсивності взаємодії падаючої розривної хвилі з пружним шаром при умовах можливого проковзування на граничних площинах 183
4.4 Екранування розривних хвиль клиноподібним пружним шаром 185
4.4.1 Динаміка падаючої розривної хвилі при проходженні клиноподібного пружного шару 185
4.4.2 Динаміка взаємодії падаючої розривної хвилі з клиноподібним пружним шаром при умовах можливого проковзування на граничних площинах шару 189
4.5 Висновки до розділу 4 191
ВИСНОВКИ 193
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 195
ДОДАТОК А 217

ВСТУП. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Останнім часом у світі зростає кількість техногенних аварій, що спричинюють руйнування цивільних і промислових об’єктів та мають значні екологічні наслідки. Найнебезпечнішими з них є землетруси, які займають перше місце у світі за заподіяною економічною шкодою і кількістю постраждалих. Проте спеціалістами досі до кінця не з’ясовані причини їх виникнення та не розроблені методи прогнозування місць локалізації їхніх осередків, а також інтенсивності та часу їх реалізації. Тому один із способів зменшення ризиків від згенерованих землетрусами сейсмічних хвиль для населення, житлових масивів і навколишнього середовища може бути пов’язаний із застосуванням методів будівельної механіки для аналізу загальних закономірностей поширення таких хвиль та розробкою способів захисту від них.

Помічено, що інтенсивність сейсмічних дій та місце їх локалізації в значній мірі визначаються можливістю перебудови, фокусування та відбивання таких хвиль на неперервних та шаруватих неоднорідностях тектонічних середовищ. Тому шляхом моделювання динамічних явищ, пов’язаних із дифракцією ударної хвилі на тектонічних неоднорідностях, в обраному геологічному регіоні можна виділити зони з найменшим сейсмічним ризиком для стратегічно важливих об’єктів. При цьому заслуговують на увагу питання математичного моделювання ефектів екранування цих споруд та об’єктів від ударної дії сейсмічних (зокрема і розривних) хвиль на природних або штучно створених неоднорідностях середовищ, що деформуються.

У зв’язку з тим, що такі динамічні явища мають чітко виражений ударний характер, то перед рухомою поверхнею фронту хвилі середовище перебуває в недеформованому стані, за цією поверхнею функції напружень та деформацій мають скінченні значення, а безпосередньо на самій поверхні (в рамках теорії ідеальної пружності) вони зазнають розривів. Тому для таких

процесів виявляються малоефективними класичні методи будівельної механіки, пов’язані з постановкою крайових задач, і найбільш повну інформацію про еволюціонуючий фронт ударної хвилі й інтенсивність імпульсу, що переноситься нею в кожній точці фронту, можна отримати за допомогою нульового наближення променевого методу.

Оскільки на сьогодні ці явища проаналізовано недостатньо, можна вважати, що питання вивчення загальних закономірностей перетворення (екранування) розривних (ударних) хвиль у пружних анізотропних середовищах з неперервними та розривними неоднорідностями становлять **актуальну** наукову задачу будівельної механіки.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана відповідно до плану науково-дослідних робіт кафедри вищої математики Національного транспортного університету, а також у рамках науково-технічної роботи за державним замовленням МОН України «Розробка технологій безаварійного буріння надглибоких вертикальних і криволінійних нафтових та газових свердловин» (2008–2009 рр., номер державної реєстрації 0108U006054) і держбюджетної теми № 11 «Математичне моделювання процесів безаварійного буріння в сланцевих породах і шельфових зонах морських акваторій» (2012–2014 рр., номер державної реєстрації 0112U000137).

Мета і задачі дослідження.

Мета роботи полягає в постановці і розв’язанні нових задач будівельної механіки про дифракцію розривних хвиль (слабких ударних) на природних та штучних, неперервних та розривних неоднорідностях в ізотропних та анізотропних хвиле провідних середовищах з метою вивчення ефекту їх екранування та гасіння.

Для досягнення цієї мети необхідно виконати таке:

– здійснити огляд вітчизняної та зарубіжної науково-технічної літератури з проблем поширення, перетворення та екранування ударних, зокрема

сейсмічних, хвиль, згенерованих в тектонічних структурах з неперервними та розривними неоднорідностями;

– розробити математичну модель поширення розривних хвиль у неоднорідних пружних середовищах зі змінними механічними параметрами;

– провести комп'ютерне моделювання впливу зміни основних механічних параметрів неоднорідного анізотропного пружного середовища на перебудову сітки хвильових променів та фронтів;

– побудувати основні співвідношення кінематики та динаміки поширення слабких ударних хвиль у пружних середовищах із шарувато-розривними неоднорідностями їхніх механічних параметрів;

– дослідити зміни інтенсивності розривних хвиль під час їх поширення в шарувато-неоднорідних пружних середовищах.

Об'єктом дослідження є явище поширення нестаціонарних розривних (слабких ударних) хвиль, збурених в неоднорідних ізотропних та трансверсально-ізотропних пружних середовищах.

Предмет дослідження є ефекти перетворення та екранування розривних хвиль на неперервних та розривних неоднорідностях ізотропних і трансверсально-ізотропних пружних середовищ.

Методи дослідження. Для дослідження динамічних явищ поширення розривних хвиль використовується нульове наближення променевого методу. Зокрема, для постановки задачі геометричної побудови системи променів та фронтів застосовується рівняння ейконала, а задача визначення поля напружень у деякому околі поверхні хвильового фронту розв'язується за допомогою системи транспортних рівнянь. Інтегрування побудованих розв'язувальних звичайних диференціальних рівнянь здійснювалось методом Рунге – Кутта.

Достовірність результатів визначається строгістю та коректністю постановок вихідних задач; вибором високоточного методу числового інтегрування диференціальних рівнянь; тестовою перевіркою збереження повної енергії деформівної системи при перетворенні хвиль на

неоднорідностях пружного середовища та якісною узгодженістю результатів розрахунків з даними, отриманими іншими авторами при граничних значеннях характерних параметрів.

Наукова новизна отриманих результатів.

1. Із застосуванням основних положень нульового наближення променевого методу поставлені нові задачі перетворення та екранування розривних (слабких ударних) хвиль у пружних середовищах з неперервно-змінними та шарувато-неоднорідними параметрами пружності.

2. Вперше поставлена і розв’язана задача перебудови системи променів та рухомого фронту в середовищах із майже шаруватою структурою, при цьому коефіцієнти механічних параметрів залишаються диференційованими функціями. Показано, що такий шар неоднорідності щільності середовища може відігравати роль екрана завдяки здатності до відхилення хвильових променів.

3. Поставлена і розв’язана задача поширення слабких ударних хвиль у шарувато-неоднорідних середовищах із розривними функціями механічних властивостей. Досліджені явища перетворення плоскої розривної хвилі паралельним та клиноподібним шарами з відмінними механічними властивостями та випадки сполучення середовищ із можливістю їх проковзування на площині розділу, а також без такої можливості.

4. Показано, що поширення хвилі в шарувато-неоднорідному середовищі супроводжується виникненням хвиль нової поляризації (в загальному випадку всіх трьох типів), тоді як у випадку її розповсюдження в середовищі зі змінними механічними параметрами відбувається лише поворот вектора поляризації.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації можуть бути використані у вигляді комп’ютерного математичного забезпечення для числового дослідження явищ поширення та перетворення еволюціонуючих фронтів розривних (слабких ударних) хвиль, які

генеруються в анізотропних пружних середовищах із неперервними та розривними неоднорідностями.

Отримані в дисертації результати наукових досліджень використовуються ТОВ «ПАСДОРСЕРВІС» при проектуванні об'єктів промислового призначення з метою виявлення сейсмонебезпечних для будівництва зон та захисту проектованих об'єктів від впливу динамічних хвиль, збурених природними або техногенними чинниками.

Розроблені в дисертаційній роботі методи комп'ютерного моделювання динамічних процесів у пружних середовищах запроваджені в навчальний процес на кафедрі опору матеріалів та машинознавства Національного транспортного університету при викладанні курсу з будівельної механіки транспортних споруд.

Особистий внесок здобувача. Основні результати досліджень були отримані автором самостійно. Дисертанту належать аналітичні викладки, числова реалізація на ПК задач механіки та аналіз отриманих результатів. У роботах [1–4, 8, 9, 16, 24] В.І. Гуляєв брав участь у постановці задач та обговоренні отриманих результатів. У роботах [2, 12–14, 22] співавтором Г.М. Іванченком надана допомога в розробленні та налаштуванні обчислювального комплексу для проведення комп'ютерного моделювання досліджуваних процесів. У роботах [1, 3–8, 12, 14–16, 24] співавтор П.З. Луговий [1, 3, 4, 8, 24], співавтор О.В. Ващіліна [5–7, 12, 14–16] і співавтор І.В. Лебедєва [15] брали участь в обговоренні одержаних результатів. У монографії [1] співавтори В.І. Кошель та В.Г. Кравець надавали наукові консультації в процесі написання тексту з питань застосування отриманих результатів у практиці проведення гірських робіт.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційних досліджень були оприлюднені на таких міжнародних конференціях:

– Miedzynarodowa Konferencja "IX Szkola Geomechaniki 2009" (Poland, Gliwice – Ustroń, 23 – 26 października, 2009);

– International Conference “Dynamical system modelling and stability investigation” (Ukraine, Kyiv, May, 27-29, 2009);

– International Conference “Dynamical system modelling and stability investigation” (Ukraine, Kyiv, May, 29-31, 2013);

– 14 Міжнародна науково-практична конференція “Ринок послуг комплексних транспортних систем та прикладні проблеми логістики” (Україна, Київ, Жовтень, 2012);

– Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів” (Україна, Рівне, 19-22 лютого, 2015);

– XII Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові (Україна, Львів, 28-29 травня, 2015).

Результати дисертаційної роботи доповідались також на 72-й науково–практичній конференції Київського національного університету будівництва і архітектури (Україна, Київ, 22–25 березня 2011 р.) та 67-й і 70-й наукових конференціях Національного транспортного університету:

− LXVII науково-практична конференція науково-педагогічних працівників, аспірантів, студентів та структурних підрозділів Національного транспортного університету (Україна, Київ, 11 – 13 травня 2011 р.);

− LXX науково-практична конференція науково-педагогічних працівників, аспірантів, студентів та структурних підрозділів Національного транспортного університету (Україна, Київ, 16 – 18 травня 2014 р.).

Публікації. Основний зміст роботи викладено у 23 публікаціях [23-25, 43-45, 47, 48, 54-64, 88, 89, 96, 108, 193]: з них 1 монографія, 1 стаття в закордонному журналі, 2 статті у виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз і перекладені англійською мовою видавництвом «Springer», 11 робіт опубліковано у фахових виданнях, 2 - у збірниках матеріалів міжнародних конференцій і 4 — у збірниках тез міжнародних конференцій, 2 — в збірниках тез наукових конференцій Національного транспортного університету.

РОЗДІЛ 1
СТАН ПРОБЛЕМИ МЕХАНІКИ ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ ПРУЖНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

1.1 Прикладні аспекти проблеми розповсюдження хвиль в пружних середовищах

Явище удару і спровоковані їм ефекти розповсюдження ударних (розривних) хвиль в деформівних середовищах широко зустрічаються в природі і техніці. Так, в різних галузях промисловості використовуються машини ударної дії для виконання робіт, пов’язаних із збудженням в матеріалі, що обробляється, значних зусиль, які призводять до руйнування матеріалу або його деформування (наприклад, машини для штамповки деталей, кування, руйнування гірських порід, бетонних покриттів, занурень паль та ін.) [2].

Багато прикладів швидкоплинних процесів ударного типу можна знайти в області артилерійської техніки. Вони виникають при швидкому розгоні снаряда в каналі ствола гармати, різкому зменшенні швидкості снаряда і пробитті захисного огородження при прямому попаданні, розльоті осколків при розриві снаряда і т.д.; сюди також слід зарахувати ударний вплив вибухової хвилі на споруди. До цього напряму також відноситься гідравлічний удар, повя’занний з різким підвищенням тиску в трубопроводі при його швидкому перекритті [115].

Нині, все частіше, ці явища спостерігаються в зв’язку з стрімким розвитком енергоспоживання, оскільки актуальною постає проблема добування корисних копалин, зокрема вугілля та залізних руд, на великих глибинах. Збільшення глибин покладів впливає на можливість експлуатації родовищ за рахунок зростання гірського тиску і динамічних форм його прояву у вигляді гірських ударів. Багаторічна історія розробки таких родовищ знає велику кількість невдач, навіть катастроф на ряді рудників і

шахт, які призводять до тимчасової або повної зупинки діяльності окремих підприємств.

Гірські удари відбуваються при певному поєднанні геологічних і гірничотехнічних умов. Вони пов'язані з раптовим вивільненням концентровано накопиченої потенціальної енергії пружного стиснення гірських порід, що супроводжується миттєвим руйнуванням гранично напружених зон вугілля, породи, руди з подальшим проявом деформацій, зміщень і коливань навколишнього масиву порід. Практика ведення гірничих робіт говорить про те, що такі причини, по мірі збільшення глибини і площі їх проведення, можуть призвести до гірських ударів з важкими наслідками [120].

Варто також відмітити, що останнім часом в світі зростає число техногенних катастроф, котрі зумовлюють масштабні аварії на промислових об’єктах, наслідками яких є загибель людей і серйозні екологічні впливи. Найбільш великих руйнувань і трагічних наслідків завдають землетруси. Так, в 1556р. відбувся найбільш руйнівний в історії людства землетрус, який отримав назву Великого китайського землетрусу. Історики вважають, що він забрав життя близько 830 тисяч людей. Другий за силою землетрус також відбувся в Китаї 1976 року. Його магнітуда склала 8,2 бала, офіційне число загиблих перевищило 242 тисячі осіб. В 2004р. в зоні Індійського океану відбувся землетрус магнітудою від 9,1 до 9,3 балів, який спричинив потужне цунамі. Достовірне число жертв, викликане цією катастрофою, невідоме, проте воно оцінюється від 225 до 300 тисяч людей. Серед найбільш руйнівних землетрусів останніх років варто відзначити також землетрус на Гаїті (2010р, магнітуда 7 балів), в китайській провінції Ганьсу (1920р, 7,8 балів), Великий землетрус в Канто (1923р., Японія, 8,3 бала), землетрус в Ашхабаді (1948р., відбулось декілька поштовхів від 7,3 бала до 9 балів.)

Зауважимо, що тільки протягом року на Землі відбувається до мільйона землетрусів, але людство так і не зрозуміло до кінця причин їх виникнення і

не навчилось точно прогнозувати місця локалізації їх осередків, а також силу і час їх реалізації. Тому один із способів зменшення ризиків для населення житлових масивів і навколишнього середовища може бути пов'язаний зі з’ясуванням загальних закономірностей їх перебігу та розробкою способів захисту від них.

В наш час лише відомо, що механізм землетрусів включає явище суттєвої деформації земної кори, в результаті активних тектонічних рухів, а також процеси розповсюдження пружних поздовжніх та поперечних хвиль деформації, дифрагуючих на тектонічних неоднорідностях.

Найбільш рання модель осередку землетрусів розроблена Х. Рейдом в 1911 р. Вона включає ефект накопичення пружних деформацій при поступовому нарощуванні переміщень блоків, утворення розриву і різкого зміщення сторін розриву в положення, при якому відсутні пружні деформації [70].

Тут можна звернути увагу на наступне: по-перше, сейсмічна енергія утворюється за рахунок зміни пружної енергії зсуву в осередку. По-друге, осередок землетрусу достатньо локалізований і енергія випромінюваних хвиль пропорційна об’єму осередку.

Також в науковій літературі обговорюють так звані точкові моделі, дислокаційну модель, динамічну модель, «периферійну модель осередку», модель пружно-пластичного дилатаційного деформування та ін. [80, 91, 168, 160].

В роботах [73, 176] під осередком розуміється розрив суцільності породи Землі (локальна нестійкість) під дією напружень (зсуву), накопичених в процесі тектонічної деформації. Автори [176] наводять п’ять основних правил, що дозволяють, з деяким наближенням, застосовувати до осередку землетрусу поняття механіки руйнувань.

1. Осередком тектонічного землетрусу є тріщина в породі Землі.

2. Тріщина виникає в результаті напружень (зсуву), накопичених при тектонічній деформації, і призводить до повного або часткового зняття напружень на поверхні тріщини.

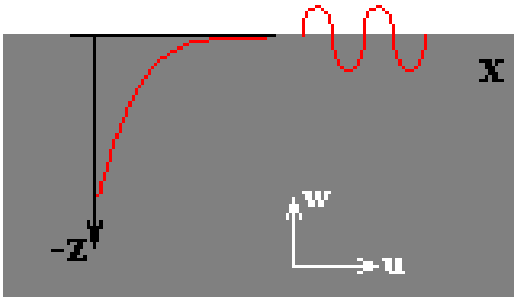
3. Тріщина виникає в невеликій області і потім розповсюджується зі швидкістю, що не перевищує швидкості поздовжніх пружних хвиль.

4. Осередку землетрусу відповідає тріщина зміщення, тобто стрибком нормальних переміщень можна знехтувати.

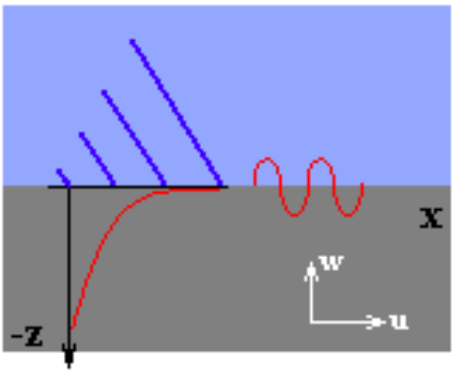
5. Порода навколо тріщини залишається лінійно-пружною.

Згодом утворена тріщина може заповнюватись глинистим розчином, утвореним в результаті природного насичення водою глинистих порід. Як наслідок в цих випадках вона починає відігравати роль поверхні розділу порід, на якій нормальні до неї напруження залишаються неперервними, водночас як в дотичних напрямах поверхні протилежних сторін тріщини можуть вільно ковзати, не викликаючи дотичних напружень.

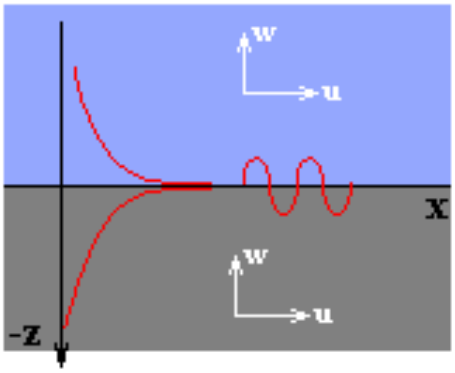
Таким чином від осередків землетрусів відходять зсувні (поперечно поляризовані) хвилі деформації, а спостережувані в природі поздовжні хвилі виникають, в результаті дифракції і перебудови зсувних хвиль на поверхнях розділу тектонічних порід з різними геофізичними властивостями. При виході на вільну земну поверхню ці хвилі перетворюються в поверхневі хвилі (рис. 1.1): хвилі Релея (рис. 1.1, а), в класичному розумінні вони розповсюджуються вздовж границі пружного напівпростору з вакуумом або достатньо розрідженим газовим середовищем; затухаючі хвилі релеєвського типу на границі твердого тіла з рідиною (рис. 1.1, б); незатухаючі хвилі з вертикальною поляризацією, біжучі по границі рідини і твердого тіла (рис. 1.1, в); хвилі Стоунлі (рис. 1.1, г), що розповсюджуються вздовж плоскої границі двох твердих тіл, модулі пружності та щільності яких не сильно відрізняються; хвилі Лява (рис. 1.1, д) – поверхневі хвилі з горизонтальною поляризацією, які розповсюджуються на границі твердого напівпростору з твердим шаром.



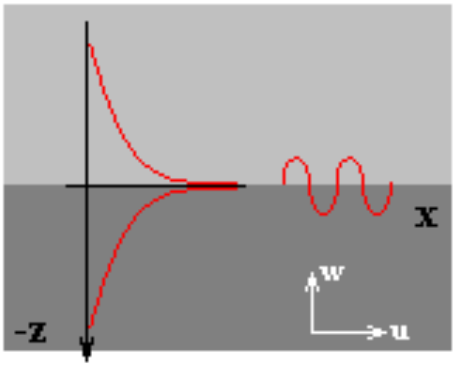
а



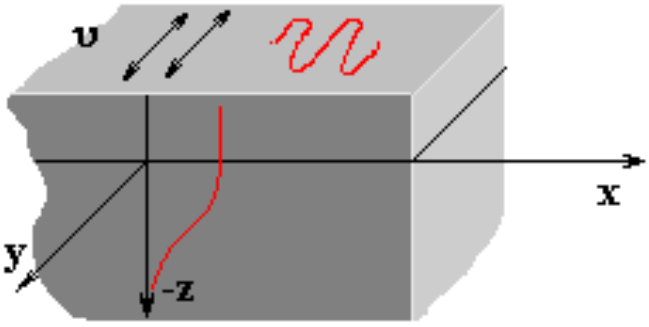
б



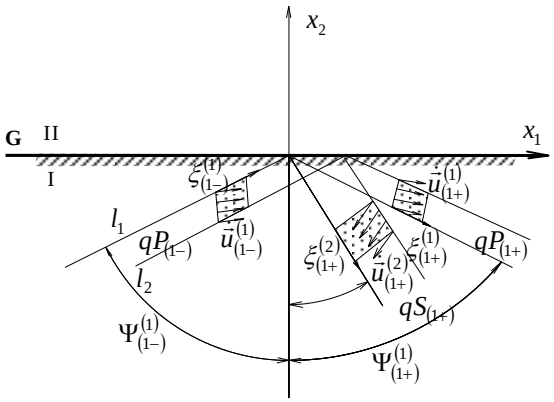
в



г



д



е

Рисунок 1.1 − Схематичне зображення поверхневих хвиль Релея (а-в), Стоунлі (г), Лява (д) та фронтів плоских розривних хвиль (е) на поверхнях пружних середовищ

Особливий практичний інтерес представляє задача з дифракції фронту плоскої розривної хвилі на вільній поверхні пружного середовища (рис. 1.1, е). В результаті взаємодії фронту з цією поверхнею, за фронтом формуються також плоскі фронти поздовжніх та поперечних розривних хвиль. Питання дослідження явищ, що супроводжують цей процес, вивчали В.І. Гуляєв, П.З.Луговий, Г.М. Іванченко та О.В. Яковенко [27].

В результаті перетворення сейсмічних хвиль на неоднорідностях тектонічних порід може змінюватись не лише їх поляризація і геометрія фронтів, а й зменшуватись або збільшуватись їх інтенсивність. Така дифракція хвиль та їх трансформування можуть призвести до того, що інтенсивність сейсмічної хвилі може приймати суттєво відмінні значення в різних зонах її фронту. Таким фактором пояснюється явище, що доволі часто руйнування, спричинені землетрусом, виявляються суттєво неоднорідними. Тому найчастіше в деякому близькому околі ділянки земної поверхні руйнуються міцні споруди сучасної побудови, в той час, як достатньо старі будівлі зберігають свою цілісність.

Можна припустити, що такий ефект найбільш помітний у випадках, коли підземні геологічні неоднорідності мають форму опуклих або увігнутих лінз. В роботах В.І. Гуляєва, П.З. Лугового і Г.М. Іванченка [41, 42] показано, що в залежності від співвідношень між значеннями акустичних жорсткостей лінзи і навколишнього середовища, вона може бути збиральною (фокусуюча) або розсіювальною для хвильових променів, тим самим суттєво змінюючи неоднорідність хвилі та її інтенсивність (рис. 1.2).

Очевидно, що коли який-небудь важливий об’єкт, розташований в околі точки фокусування хвилі тектонічної неоднорідності, подібній лінзі, то ризик його руйнування збільшується, і навпаки, збільшується його безпека в зоні розсіювання хвилі.

Оскільки до цього часу все ще не розроблені надійні методи передбачення місця і часу виникнення землетрусу, то може виявитись

ефективним підхід зниження рівня ризику руйнувань для населених масивів і промислових об’єктів за рахунок вивчення геофізичних неоднорідностей тектонічних структур в зонах їх розташування і встановлення теоретичними методами ділянок земної поверхні, на яких інтенсивності сейсмічних хвиль можуть виявитись найбільшими або найменшими внаслідок їх дифракційної перебудови.

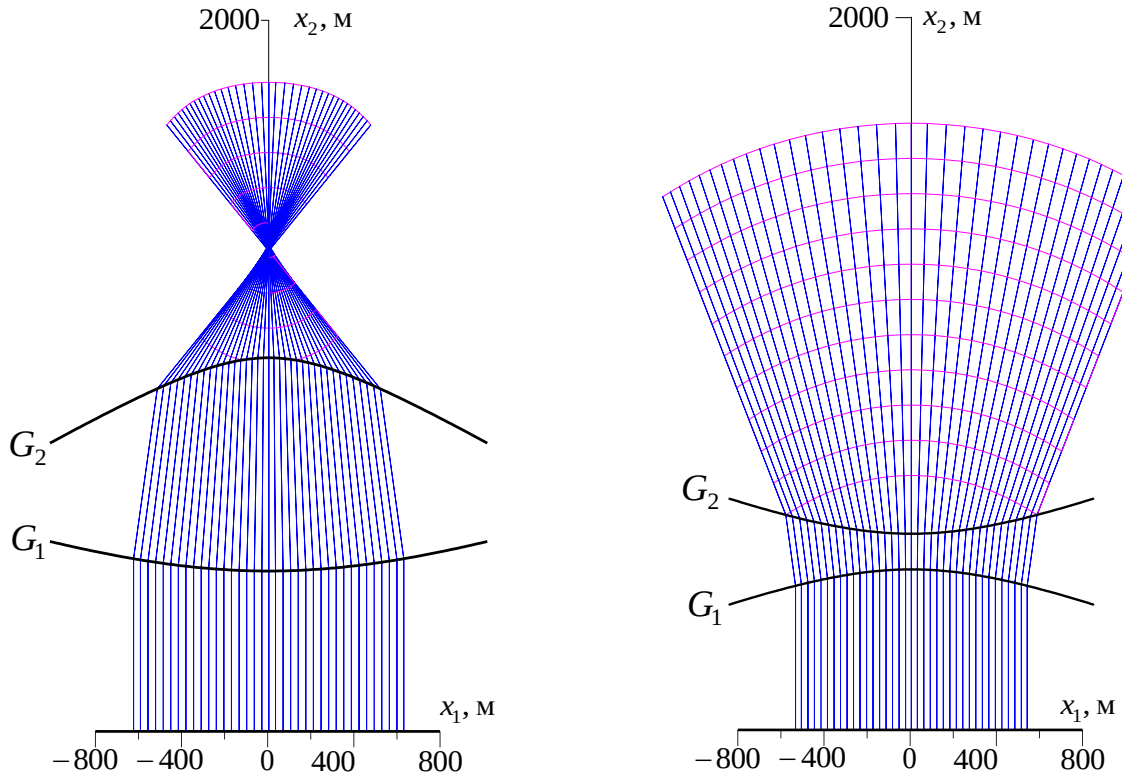


Рисунок 1.2 − Фокусування та розсіювання фронту розривної хвилі лінзоподібними пружними включеннями

Відмітимо, що ефект варіювання інтенсивності сейсмічної хвилі може відбуватись не лише на природних неоднорідностях підземних порід, але також може бути досягнутий в результаті їх цілеспрямованого відбиття різними штучними неоднорідностями, які відіграють роль екранів, для регулювання сейсмічних впливів на досліджуваний об’єкт.

1.2 Огляд теоретичних досліджень створення екранів від впливу розривних хвиль

Основний принцип забезпечення сейсмобезпеки вибухонебезпечних об’єктів (ядерних, хімічних), а також великих гідротехнічних споруд, руйнування яких носять катастрофічний характер, полягає в обов’язковому використанні всіх можливих захисних заходів [76, 151, 183, 184, 196, 198].

Теоретичні дослідження створення екранів на шляху розповсюдження хвильових впливів сейсмічного, вибухового та ударного характерів представлені в роботах як вітчизняних, так і закордонних фахівців в галузі сейсмодинаміки та сейсморозвідки.

Одним з найперших дослідників екранування сейсмічних хвиль був Barkan D.D. У 1962 була опублікована його праця «Dynamics of bases and foundations» **[**152**]**, в якій автор досліджував використання траншей та шпунтових бар’єрів для захисту фундаменту споруд. Але недостатність інформації про розповсюдження поверхневих хвиль не дали йому змогу чітко відповісти на питання ефективності таких бар’єрів.

В 1968 року R. D. Woods **[**200**]** розробив основні положення технічної теорії екранування пружних хвиль траншейним методом для ефективного захисту важливих об’єктів.

Результати розрахунків фронту поздовжньої хвилі, яка пройшла через пружний шар середовища, та особливості поширення фронту такої хвилі, представлені в роботі Н.С. Смірнової **[**189**].**

E. N. Its **[**173**]** досліджувала поширення поверхневих хвиль через вертикальні хвильові включення між однорідними нежорстко-зєднаними напівпросторами. На основі методу функцій Гріна вона розробила наближений аналітичний розв’язок для оцінки ефективності бар’єрного екранування. Така математична модель описує композитний бар’єр, який складається з комбінації шарів середовищ з різними швидкостями поширення хвиль.

Розробкою методів екранування сейсмічних хвиль займались американські вчені T. W. May та B. A. Bolt. В їх роботі [180] був вивчений ефект від розміщення бар'єрів на шляху проходження P, SV і V сейсмічних хвиль за допомогою розв'язків, отриманих методом двовимірних скінченно-елементних моделей плоских деформацій.

При цьому хвильові поля поширюються паралельно вільній поверхні пружного середовища, складеного з одного шару напівпростору. Бар'єри приймають форму відкритих траншей. Ефект згасання оцінюють з врахуванням значень в'язко-пружності середовища. Розрахунки представлені у вигляді відношення значень спектральної енергії, визначеної в точці моделі з бар'єрною складовою до значень спектральної енергії, визначеної в тій же точці, але в моделі без бар'єрного включення. Отримані спектральні коефіцієнти залежать від напрямку поширення хвиль.

Застосування бар'єрного методу розглянуто також в роботі [158]. У однорідному середовищі ряд пружних паль використовується як екрануючий бар'єр для плоских поперечних хвиль. На основі динамічних рівнянь Біо були пораховані сили інерції скелетної рами і рідини. Використовуючи ряд Фур'є-Бесселя, задача багаторазового розсіювання аналітично вирішена шляхом накладання умов неперервності на границі грунт-паля з використанням циліндричної системи координат і теореми про збереження кількості руху. Встановлено, що внутрішня проникливість насиченого ґрунту, кількість паль і відстань між палями впливають на ефективність екранування пружних хвиль. Показано наявність різниці між ефективністю захисту в насичених та пружних ґрунтах, а також помітний вплив внутрішньої проникливості насиченого ґрунту на екранування пружних хвиль.

У статтях С. В. Кузнєцова [81, 82] запропонована ідея сейсмічного бар'єрного захисту для площ, на яких містяться споруди або групи споруд від впливу сейсмічних хвиль. Їм запропоновані різні види сейсмічних бар'єрів

для різних сейсмічних хвиль, найбільш вірогідних в конкретному регіоні. Так, вертикальні бар'єри можуть захистити від релеєвських і об'ємних хвиль. Скінченно-елементний комплекс моделювання показує, що для ефективності такого бар'єру необхідно, щоб він містив шари з різко відмінними фізичними властивостями, дозволяючи «захопленню» енергії хвилі всередині деяких з шарів і глибина бар'єру повинна бути співставна або більша, ніж довжина сейсмічної хвилі. Інший тип сейсмічного бар'єру являє собою відносно тонкий поверхневий шар, який запобігає поширенню деяких типів сейсмічних хвиль. У основу таких бар'єрів покладені теорема П. Чадвіка про неможливість поширення хвиль Релея, якщо поверхня півпростору затиснена і теорема Лява, яка описує випадки відсутності хвиль Лява. Чисельне моделювання показує, що ефективність такого бар'єрного захисту досягається у випадку відповідності довжини бар'єру до довжини сейсмічної хвилі.

У 2012 році під Греноблем на спеціально відведеній для експериментів площадці з м'яким однорідним глинистим ґрунтом будівельною компанією Menared проводились випробні дослідження екранування споруд від низькочастотних коливань ґрунту. Результати даного експерименту опубліковані в роботі **[**157**]**. У ній приведені результати вимірювань для сейсмічного тесту, який відбувався за допомогою гармонічних хвиль, згенерованих монохромним вібропресованим зондом.

Автори статті звертають увагу на необхідність проведення такого масштабного експерименту з метою показати можливість практичного впровадження сейсмічних метаматеріалів, підкреслити їх важливість для використання в цивільному будівництві.

У роботі В.В. Орехова і Х. Негархарда **[**109**]** подані результати параметричних досліджень ефективності хвильових бар'єрів, представлених у вигляді траншей, які здійснюють перехоплення, розсіювання і заломлення поверхневих хвиль.

Наведений вище огляд стану проблеми управління інтенсивністю хвильових процесів та ідей екранування сейсмічних хвиль дає змогу зробити висновок, що цей напрям заснований на використанні спрощених (інженерних та експериментальних) методів і досі перебуває на початковому етапі свого розвитку.

1.3 Теоретичні аспекти проблеми розповсюдження хвиль в пружних середовищах та їх дифракції на неоднорідностях

Варто відмітити, що вивчення ефектів екранування і відбиття в неоднорідних пружних середовищах може бути проведене за допомогою методів дослідження їх дифракції. Загальні питання аналізу цих явищ в деформівних середовищах розглядаються протягом багатьох років. Зокрема вивчені питання дифракції гармонічних хвиль на неоднорідностях різної природи [3, 21, 26, 37, 101, 122, 124, 145]. Так, в роботі Б.К. Жена і Л.Ю. Лу [52] вивчені дисперсія і збудження нормальних хвиль в шаруватому півпросторі, а також розподіл енергії в цих хвилях. Для двох- та трьохшарової моделі середовища детально проаналізовані всі можливі типи нормальних хвиль, збуджених симетричним точковим джерелом, і встановлений їх зв'язок з параметрами середовища. Проведені чисельні дослідження характеристик збудження та розповсюдження таких хвиль, а також розподілу енергії по глибині для всіх типів поверхневих і захоплених хвилеводом хвиль. Причому розглянуті випадки не лише коли швидкість поперечних хвиль зростає від верхніх шарів до нижніх, але і у разі розташування низько-швидкісного шару всередині півпростору та зменшення швидкості поперечної хвилі від верхнього шару до нижнього. Помічено, що тип збудженої моди залежить від частоти джерела. Поверхнева хвиля, яка відповідає певній частоті, може перетворюватись в захоплену хвилю на іншій частоті.

Питаннями розповсюдження нестаціонарних хвиль в анізотропних середовищах займались В.С. Будаєв [16], О.Ю. Жарій **[**51**]**, А.М. Каримов **[**66**]**, А.С. Космодаміанський **[**71**],** Л.А. Молотков **[**100-104**]**, Г.І. Петрашень **[**119**]** та ін. В роботах А.П. Мойсеєнока **[**98, 99] розглянуто взаємодію плоских нестаціонарних хвиль з тонким пружним включенням при умовах гладкого контакту і у випадку повного зчеплення. Включення міститься в нескінченному тілі (матриці), яке знаходиться в умовах плоскої деформації. Передбачається, що між включенням і матрицею виконуються умови повного зчеплення. За рахунок малої товщини включення вважається, що згинні та зсувні зміщення в його довільній точці співпадають з переміщенням відповідних точок його серединної площини. Переміщення безпосередньо на серединній площині знаходяться з відповідних рівнянь теорії пластин. При формулюванні граничних умов для цих рівнянь враховані сили та моменти, діючі на границі включення зі сторони матриці.

В статті [125] досліджуються нестаціонарні хвилі прискорення в насиченому рідиною неоднорідному пористому середовищі. Вперше отримані вирази для обчислення інтенсивності і геометрії хвильових фронтів в таких середовищах з використанням математичної теорії розривів.

Розглянуто плоску задачу про розповсюдження нестаціонарних хвиль в плоскому шарі постійної товщини, заповненому однорідним лінійно-пружним ізотропним середовищем, при відсутності масових сил та нульових початкових умов [83]. Передбачається, що на одній границі шару нормальні напруження задані за допомогою дельта-функції Дірака, дотичні напруження дорівнюють нулю, а друга границя жорстко зчеплена. Для розв’язку цієї проблеми використовуються перетворення Лапласа за часом і Фур’є по поздовжній координаті. Знайдені нормальні переміщення в довільній точці шару у вигляді скінченних сум.

Протягом багатьох років ведеться вивчення динамічних процесів в анізотропних пружних середовищах. Зокрема, такі процеси досліджували:

Дж.Д. Ахенбах [11, 149], В.М. Бабич [12], Л.М. Бреховських [14], А.О. Бурєнін [19], А.О. Ватульян [22], Є.В. Глушков [35, 36], О.М. Гузь [38-40], А.С. Космодаміанський [72], В.Д. Кубенко [78, 79, 128], Г.І. Петрашень [117-119], Ю.О. Россіхін [130, 131], І.Т. Селезов [137], Х. Фелсен [143, 144], M. N. Bidgoli [153], M. D. Long, P. G. Silver [178]. Частина робіт спрямовані на розробку методів дослідження динамічних задач, наприклад, [30, 31, 126, 138]. Розроблений асимптотичний метод [110], метод сумарних та інтегральних рівнянь [121], променевий метод [123], метод просторових характеристик [133], метод скінченних елементів [105, 106]. В монографії І.Т. Селезова [136] представлені математичні методи в задачах розповсюдження та дифракції хвиль. В статті Д.М. Вишневського та В.В. Лисиці [29] використовується комбінація скінченно-різницевих схем для моделювання хвильових процесів в середовищах з анізотропними включеннями. Для врахування анізотропії використовується достатньо універсальна, але ресурсномістка схема Лебедєва, яка застосовується у відносно невеликій підобласті, що містить анізотропні формації. В основній частині моделі застосовується стандартна економічна схема на зсунутих сітках. Умови узгодження на границі між схемами будуються з умов збіжності коефіцієнтів відбиття/проходження при падінні хвилі на цю границю. Отриманий результат поєднує в собі універсальність схеми Лебедєва та ефективність стандартної схеми на зсунутих сітках.

В роботі [97] представлений аналітичний метод моделювання сейсмічних хвильових полів для широкого кола геофізичних середовищ (включаючи пружні, непружні, анізотропні, анізотропно-непружні, пористі, випадково-неоднорідні та ін.) на наддалекі відстані. Оскільки не використовуються скінченно-різницеві апроксимації, тому не виникає сіткової дисперсії при розрахунках хвильових полів для довільних моделей середовищ і баз спостережень. Аналітичне представлення розв’язків в

спектральній області дозволяє проводити аналіз повного поля частинами, наприклад, отримувати однократні хвилі.

Безпосередньо задача дифракції пружних хвиль на різних видах неоднорідностях розглянута в роботах [50, 77, 92, 94, 103, 104, 107, 111-114, 116, 129, 134, 139]. В публікації [112], використовуючи узагальнені функціонально-інваріантні розв'язки рівнянь руху, отримані і аналітично досліджені розв'язки плоскої задачі відбиття та заломлення плоских хвиль на границі розділу двох анізотропних середовищ з чотирма пружними сталими в залежності від кута падіння початкових хвиль при різних співвідношеннях пружних констант контактуючих середовищ. Встановлені діапазони кутів падіння вихідних хвиль, при яких збуджуються дійсні та комплексні вторинні хвилі. Отримані умови, які характеризують напрями векторів потоку енергії первинних та вторинних хвиль в залежності від кута падіння початкової хвилі при різних співвідношеннях пружних сталих контактуючих середовищ.

Розповсюдження пружних хвиль в композитних середовищах розглядається в публікаціях **[**114, 116**]**. Зокрема, досліджено поширення таких хвиль у шаруватих композитних стисливих матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів. Розглянуто випадки поширення фронтів хвиль перпендикулярно та вздовж поверхонь шарів. Отримані дисперсійні рівняння для квазіпоздовжніх, квазіпоперечних та чисто зсувних хвиль, а також їх довгохвильові наближення.

В роботі Л.А. Молоткова [104] наведена ефективна модель середовища, в якому пористі і пружні шари чергуються, з можливістю проковзування на межі контакту. Така модель є трьохфазною і містить дві пружні фази та одну рідку. Особливість такої моделі полягає в тому, що в ній розповсюджуються дві хвилі з «трикутними фронтами», а друга (повільна) поздовжня хвиля відсутня. В окремому випадку, коли товщина пружних шарів значно мала,

але вони залишаються бар'єрами для рідких частинок, ефективна модель стає двофазною і один з «трикутних фронтів» зникає.

В [139] запропонований алгоритм обчислення полів хвиль, які поширюються в пружних середовищах з плоскопаралельними границями поділу, оснований на сумуванні кінематично-еквівалентних хвиль. Враховуються все можливі кратні хвилі обмінного типу, що приходять до спостерігача у фіксований проміжок часу. Всередині кожної кінематичної групи виділяються динамічні аналоги.

Також проводяться дослідження задач дифракції акустичних хвиль [4-6, 65, 86, 87, 145, 146]. В [5] запропонований спосіб побудови наближених формул для дифракційного поля на поверхні сильно витягнутих тіл. Підхід заснований на високочастотному асимптотичному розкладі, побудованого на основі припущення про те, що поперечна кривина поверхні тіла асиптотично велика. Отримані старші члени розкладу дифракційного поля на сфероїді, однопорожнинному та двопорожнинному гіперболоїдах і на вузькому конусі.

В статті [65] розглядається класична задача про дифракцію хвиль на півплощині при різних граничних умовах. Запропонований спосіб полягає в застосуванні комбінації методів відокремлення змінних Фур'є і техніки сумування рядів з використанням інтегральних представлень бесселевих функцій. Отримані таким чином аналітичні розв'язки однаково ефективні як в ближній, так і в дальній зонах дифракції.

Вагомий внесок у вирішення проблем динаміки суцільних середовищ зробили українські вчені. Відомими представниками вітчизняної наукової школи є О.М. Гузь, В. Т. Грінченко, О.Ю. Жарій, О.С. Космодаміанський, В.Д. Кубенко, О.С. Лимарченко, Ю.М Подільчук, Ю.К. Рубцов, І.Т Селезов, А. Ф. Улітко. Результати їх досліджень представлені в роботах **[**37-40, 51, 71, 72, 78, 79, 90, 122-124, 128, 132, 136, 137, 142**]**.

Із загальної кількості робіт варто виділити фундаментальну монографію О.М. Гузя **[**40**]**, опубліковану 2004 року. В ній проведений

детальний аналіз стану проблем дифракції стаціонарних та нестаціонарних пружних хвиль, методів розв'язування задач дифракції. У монографії наведена значна кількість конкретних задач дифракції пружних хвиль, наприклад, дифракція пружних хвиль на циліндричних перешкодах, на тілах обертання, на тріщинах і розрізах, дифракція хвиль в багатозвя'зних тілах, обмежених круговими циліндричними поверхнями або із сферичними порожнинами, дифракція хвиль в тілах з плоскими межами і порожнинами, нестаціонарні задачі дифракції пружних хвиль на циліндричних та сферичних перешкодах. Особлива увага приділена поверхневим хвилям Релея, Лява та Стоунлі.

Актуальним проблемам сучасної теорії дифракції хвиль та методам їх розв'язання присвячена монографія І. Т. Селезова **[**136**]**, видана в 2012 р. У роботі наводяться аналітичні та чисельні методи розв'язування задач. Розглядаються проблеми теорії розсіювання гідродинамічних, електромагнітних, магнітоакустичних і пружних хвиль локальними неоднорідностями в обмежених та напівобмежених областях. Представлені результати досліджень поширення хвиль цунамі, їх генерації підводними землетрусами і дифракції несталих хвиль на радіальній неоднорідності.

Вивченню теоретичних основ дослідження лінійних процесів деформування регулярно-шаруватих суцільних середовищ присвячена робота М.О. Шульги [147]. Методом, що базується на теорії скінченно-різницевих рівнянь, вивчені закономірності розповсюдження поверхневих та об'ємних хвиль, відбиття та заломлення хвиль, нормальні хвилі в хвилеводах. Проаналізовані питання поширення хвиль в середовищі з чергуванням рідких та твердих шарів, поверхневою та внутрішньою нестійкістю шаруватих матеріалів.

Закордоном проблемою перетворення хвиль займаються V. Kahya, T. S. Ozsahin, A. Birinci, R. D. Borcherdt, G. F. Duff, E. E. Franco, J. C. Adamowski, S. Guo, A.N. Norris, D.M. Pai, R. G. Payton та ін., результати яких,

представлені в публікаціях [150, 154, 166, 167, 170-172, 177, 185-187, 190-194, 201].

Відзначимо, що в проаналізованих роботах розглядається, як правило, питання дифракції неперервних гармонічних хвиль або розривних хвиль з плоскими фронтами, які при розповсюдженні не перебудовуються. Але в природі і на практиці часто зустрічаються хвилі, наближені до розривних, з криволінійними поверхнями їх фронтів. Із поширенням вони перебудовуються і змінюють свою форму, змінюючи, безпосередньо при цьому, інтенсивність самих хвиль. Трансформування розривних хвиль з їх поширенням суттєво ускладнює задачу їх розв'язку, тому загальні закономірності їх розповсюдження залишаються мало вивченими. Для дослідження таких хвиль ефективним виявляється променевий метод.

Променевий метод, відомий як багатомірний метод ВКБ (метод Вентцеля, Крамерса, Брілюена, зазвичай називається скорочено метод ВКБ), - один з основних асимптотичних методів в теорії хвиль. Він не втрачає своєї актуальності, незважаючи на стрімкий ріст популярності числового моделювання, заснованого на розв'язку повних хвильових рівнянь. Особлива привабливість променевого методу полягає в тому, що результати розрахунків мають геометричну наочну ілюстрацію та чітку фізичну інтерпретацію [141].

До перших робіт, присвячених розробці променевого методу, можна віднести публікації J.B. Keller [174, 175], в яких зазначений метод застосовується для випадку одного скалярного хвильового рівняння. Jack K. Cohen та Robert M. Lewis [161] запропонували загальний метод для знаходження асимптотичних розв'язків задач, поставлених для лінійних рівнянь з частинними похідними, що містять члени більш низького порядку. Його основою є процедура розкладу, тобто всі функції, які з'являються в розширенні, мають задовольняти звичайні диференціальні рівняння вздовж певних кривих, так званих, променів. M.A. Grinfel'd вивчав поведінку

стрибків похідних зсувів на хвильових фронтах слабкого типу розриву і слабких поштовхів, що поширюються в нелінійних гіперпружних середовищах [171].

Основоположником променевого методу для анізотропних середовищ можна вважати В.М. Бабича. Його робота **[**12**]**, присвячена побудові короткохвильовим асимптотикам дифракційних задач. Варто відмітити значний вклад Г.І. Петрашеня та його учнів в розв'язування задач, пов'язаних з описом хвильових полів в межах нульового наближення променевого методу. Його роботи **[**117-119**]** дали поштовх практичному застосуванню теоретичних основ динаміки хвиль в анізотропних пружних середовищах для сейсмологічних досліджень, за рахунок доведення розв'язків задач до чітких алгоритмів і можливістю застосування обчислювальної техніки. Надалі задачами променевого методу займаються А.О. Бурєнін, Ю.О. Россіхін, Ю.О. Кравцов **[**74, 75**]**. В своїх роботах вони розглядаюь такі питання: променевий метод розв'язування одновимірних задач нелінійної динамічної теорії пружності з плоскими поверхнями сильних розривів **[**18**]**, променевий метод для розв'язування динамічної задачі, пов'язаної з поширенням поверхневих хвиль сильних або слабких розривів **[**188**]**, виділення поверхневих розривів променевим методом в задачах динаміки пружних середовищ **[**17**]**. Важливий вклад в розвиток променевого методу внесли українські вчені Ю.М. Подільчук та Ю.К. Рубцов **[**122-124**].**

З результатами, отриманими за останні роки сучасними вченими, можна ознайомитись в роботах **[**32, 33, 46, 68, 69, 84, 141, 195**]**. У статті К.А. Герасименко та ін. **[**32**]** запропонований метод побудови наближень розв'язків крайових задач динаміки ударного деформування у формі променевого розкладу за поверхнею розривів деформацій. Принципова особливість запропонованого наближеного методу пов'язана з врахуванням в побудові променевих розкладів розв'язку зміни кривизн поверхонь розривів деформацій і розходження променів. Променевому методу обчислення

сейсмічних об’ємних хвиль в кусково-однорідному ізотропному пружному середовищі з флюїдонасиченими шарами присвячена робота А.О. Ковтун [69]. За допомогою цього методу будується розв’язок для поля зміщень поздовжніх та поперечних хвиль у формі головного члена нестаціонарного променевого розкладу і додаткових складових наступного члена розкладу. Продовження хвильового поля через границю розділу відбувається з врахуванням відповідних умов контакту дотичних середовищ. У монографії J. Brokesova [156] детально висвітлені питання асимптотичного променевого методу із застосуванням в сейсмології. Детально проаналізовані розв’язки динамічних задач у вигляді променевих рядів, асимптотичний розклад за степеневими рядами, нульове наближення променевого методу, рівняння асимптотичної променевої теорії для нульового наближення. За допомогою променевого методу побудовано два члена асимптотики відбивної хвилі при дифракції плоскої хвилі на «тонкому» конусі з малим кутом при вершині і на їх основі встановлено умови застосування такої асимптотики для малих кутів при вершині конуса [68].

Насамкінець цього огляду зауважимо, що не дивлячись на великий об’єм наукових досліджень, виконаних по проблемам дифракції хвиль на неоднорідностях пружних середовищ, в основному, отримані результати стосуються простих випадків конфігурацій хвильових фронтів та поверхонь неоднорідностей, на яких вони дифрагують. Практично недослідженими залишаються питання перебудови та взаємодії хвильових фронтів складної геометрії як на неперервних неоднорідностях пружних середовищ, так і на розривних неоднорідностях (поверхні розділу без можливості та з можливістю їх взаємного проковзування). Підкреслимо, що неоднорідності обох типів не лише існують природнім чином в тектонічних структурах, але й можуть бути створені штучно для екранування сейсмічних хвиль. Оскільки розглянуті явища часто зустрічаються в сейсмології, тому можемо відзначити, що тема даної дисертаційної роботи спрямована на дослідження

дифракції розривних хвиль неперервними та розривними неоднорідностями анізотропних середовищ з метою вивчення ефекту їх екранування та гасіння є **актуальною.**

В нашій роботі запропонована методика для геометричної побудови поверхонь розривів польових функцій та обчислення значень цих розривів, а також їх інтенсивностей. Суть методу полягає в можливості слідкувати за перебудовою по просторовим та часовою координатами криволінійних поверхонь фронтів, на яких перші похідні від польових функцій зазнають розривів. Оскільки класичні методи математичної фізики не забезпечують повноцінного розв'язку таких задач, то найоптимальнішим виявляється застосування променевого методу, зокрема, його нульового наближення. Основа такого методу – числове інтегрування системи променевих рівнянь, представлених звичайними диференціальними рівняннями першого порядку. Суть виведення променевих рівнянь в рамках геометричної оптики [123] полягає в тому, що вони є характеристичними рівняннями для рівняння ейконала – нелінійного диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку, що описує поведінку фази плоскої хвилі в однорідному випадку. Променеві рівняння описують деяку сім'ю променевих траєкторій та еволюцію фази хвилі вздовж цих траєкторій [141].

Проблематикою розповсюдження квазіпоздовжних та квазіпоперечних пружних хвиль займались В.І. Гуляєв, Г.М. Іванченко і О.В. Яковенко. В свої роботах вони розглядали еволюцію фронтів розривних хвиль, сформованих при падінні початкової плоскої ударної хвилі на криволінійну поверхню поділу пружних трансверсально-ізотропних середовищ з різними фізичними властивостями [27, 41, 42].

Аналізуючи проведені дослідження явищ дифракції пружних хвиль на неоднорідностях різної природи і застосування отриманих результатів в області екранування хвильових впливів, можна зазначити, що значною мірою вони пов'язані з вивченням ефектів перетворення гармонічних хвиль та

використанням різноманітних інженерних підходів. Відтак, виникає необхідність розгляду задачі математичного моделювання процесів взаємодії розривних пружних хвиль з поверхнями розділу порід з відмінними механічними властивостями.

Підсумовуючи вищесказане, можна дійти висновку, що тема дисертаційної роботи, спрямована на вивчення загальних закономірностей перетворення (екранування) розривних (ударних) хвиль в пружних середовищах з неперервними та розривними неоднорідностями, є актуальною науковою задачею будівельної механіки.

В даній роботі виконані дослідження: перебудови хвильових фронтів в неоднорідних пружних середовищах для неперервних та розривних функцій зміни їх параметрів пружності вздовж просторових координат; ефекту екранування розривних (слабких ударних) хвиль однією та двома площинами розділу пружних середовищ, а також клиноподібним пружним шаром. Розглянуті випадки сполучення різних середовищ з умовами можливого проковзування та його відсутності на поверхнях контакту. Особлива увага приділена питанням екранування розривних хвиль, а також зменшення їх інтенсивностей та гасіння.

1.4 Висновки до розділу 1

1. В розділі 1 проведений аналіз публікацій з проблем поширення біжучих хвиль в пружних однорідних і неоднорідних, ізотропних і анізотропних середовищах. Обговорені хвильові сейсмічні процеси, які генеруються в тектонічних структурах з неперервними та розривними (поверхнями розділу) неоднорідностями. З метою визначення можливостей зниження інтенсивності біжучих хвиль в результаті їх перетворення в зонах зміни параметрів пружності системи, особливу увагу приділено розгляду питань перетворення та екранування цих хвиль на неперервних та розривних неоднорідностях механічних властивостей середовищ.

Показано, що постановки задач такого типу здійснювались, в основному, лише для випадків гармонічних біжучих хвиль, а їх розв’язки відбувались шляхом побудови та аналізу відповідних дисперсійних рівнянь. При цьому значна кількість публікацій присвячена питанням дифракції хвиль в зонах відмінних неоднорідних механічних властивостей систем або з суттєвою зміною геометрії граничних поверхонь.

2. Виявлено, що питанням поширення і перетворення фронтів розривних (слабких ударних) хвиль присвячена порівняно невелика кількість праць, причому, як правило, в них вивчаються ефекти дифракції та фокусування хвиль, водночас, явище екранування хвиль за рахунок відхилення їх променів та відбиття від неоднорідностей, залишились поза увагою дослідників.

3. Встановлено, що найефективнішим методом розв’язку задач перетворення розривних хвиль на неперервних та розривних неоднорідностях є нульове наближення променевого методу, придатне для моделювання перетворення їх геометрії, обчислення інтенсивностей хвиль в прифронтових зонах, а також аналізу можливостей біфуркацій хвильових явищ.

Показано, що в науковій літературі наявна достатньо мала кількість публікацій з питань цілеспрямованого екранування біжучих хвиль за рахунок відхиленнях їх променів та відбиття.

4. В результаті проведеного літературного огляду відзначено, що ефекти екранування біжучих розривних (слабких ударних) хвиль на неперервних та розривних неоднорідностях анізотропних пружних середовищ вивчені недостатньо. Тому тема дисертаційної роботи спрямована на теоретичне моделювання таких явищ є актуальною.

РОЗДІЛ 2
ПРОМЕНЕВИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ РОЗРИВНИХ ХВИЛЬ В НЕОДНОРІДНИХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ ПРУЖНИХ СЕРЕДОВИЩАХ ЗІ ЗМІННИМИ МЕХАНІЧНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

2.1 Рівняння динаміки пружного анізотропного середовища

Хоча, проблема гасіння та екранування хвиль деформацій в пружних неоднорідних середовищах широко зустрічається в різних галузях природознавства та техніки, в даній роботі вона буде розглядатись в загальному вигляді, але із можливістю застосування до геологічних структур. В силу того, що в процесі формування та еволюції ці структури піддаються дії сил гравітації і внаслідок цього набувають пружних властивостей, які залежать від орієнтації кожної виділеної елементарної площадки, вони повинні розглядатись як анізотропні пружні середовища. Наведемо основні співвідношення теорії анізотропних пружних тіл.

Умова статичної рівноваги елемента пружного середовища встановлюється рівняннями:

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial t_{ik}}{\partial x_k} + f_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{2.1}$$

де t_{ik} – компоненти тензора пружних напружень, причому $t_{ik} = t_{ki}$;

x_k - декартові координати;

f_i – компоненти вектора щільності масових сил.

Для випадку, коли елемент пружного середовища знаходиться в русі, до компонентів рівнянь (2.1) (об’ємних сил) додаються ще сили інерції і вирази набувають вигляду

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial t_{ik}}{\partial x_k}+f_i=\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\qquad (i=1,2,3), \tag{2.2}$$

де ρ – густина середовища;

u_i – компоненти вектора пружних переміщень;

t – час.

Таким чином збурений стан ідеально пружного середовища характеризується трьома координатними векторами напруження $\mathbf{t}_i$ $(i=1,2,3)$, які є функціями від x_1, x_2, x_3 та часу t.

Для обчислення компонентів (лінійного) тензора деформацій ε_{ik} суцільного середовища використаємо рівняння Коші:

$$\varepsilon_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\qquad (i,\ k=1,2,3). \tag{2.3}$$

Як відомо, закон Гука встановлює залежність між складовими напружень та переміщень. Так, для анізотропного середовища він має вигляд:

$$t_{ik}=\sum_{p,q=1}^{3}c_{ik,pq}\frac{\partial u_q}{\partial x_p}\ (i,\ k=1,2,3), \tag{2.4}$$

де коефіцієнти $c_{ik,pq}$ утворюють симетричну таблицю. Вона визначає тензор четвертого рангу відносно афінних ортогональних перетворень координат і називається тензором пружних сталих, який містить вісімдесят одну компоненту, за рахунок того, що в (2.4) міститься дев’ять рівнянь з дев’ятьма невідомими.

Так як існує додатньо-орієнтовна квадратична функція

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i,k,p,q}^{3} c_{ik,pq}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{pq} \geq 0, \tag{2.5}$$

яка характеризує щільність потенціальної енергії деформації ідеально пружного середовища, то $c_{ik,pq} = c_{pq,ik} = c_{ki,pq} = c_{ki,qp}$. А враховуючи ще й симетричність $t_{ik}=t_{ki}$ та $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$, кількість компонент тензора пружності зменшується до двадцяти одного. Задавши відповідним чином напрям осей декартової системи координат, отримаємо вісімнадцять неусувних коефіцієнтів системи.

Для наочного представлення, запишемо таблицю величин $c_{ik,pq}$ у вигляді квадратної шестирядної матриці, використовуючи відповідність між парами значків (ik) та (pq) симетричної матриці $c_{ik,pq}$ і значення значка α, що змінюється від одного до шести, за правилом [119]

$$\begin{gathered}(11)\leftrightarrow 1;\ (22)\leftrightarrow 2;\ (33)\leftrightarrow 3;\\ (23)=(32)\leftrightarrow 4;\ (31)=(13)\leftrightarrow 5;\ (12)=(21)\leftrightarrow 6.\end{gathered} \tag{2.6}$$

Крім цього, введемо позначення

$$\begin{gathered}t_{ik} = t_{\alpha}, \qquad c_{ik,pq} = c_{\alpha\beta},\\ \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{\alpha}, \qquad (\alpha = i = 1,2,3),\\ 2\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{\alpha}, \quad (i \neq k,\ \alpha = 4,5,6).\end{gathered} \tag{2.7}$$

І тоді формули (2.4) та (2.5) перепишемо у вигляді

$$W = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}^{6} c_{\alpha,\beta}\varepsilon_{\alpha}\varepsilon_{\beta} \geq 0, \tag{2.8}$$

$$\sigma_\alpha = \sum_{\beta=1}^{6} c_{\alpha,\beta}\varepsilon_\beta \qquad (\alpha = 1,2,3),$$

а тензор пружних сталих перетворюється в матрицю розмірності *6×6*

$$c_{ik,pq} = (c_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{26} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{61} & c_{62} & \dots & c_{66} \end{pmatrix}, \quad c_{\alpha,\beta} = c_{\beta,\alpha}, \tag{2.9}$$

елементи якої задовольняють умови

$$c_{11} > 0, \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix} > 0, \ |c_{\alpha\beta}| > 0, \tag{2.9}$$

та забезпечують додатність квадратичної форми *W* з (2.8).

Для ізотропного середовища вигляд *W* має залишатись незмінним для будь-якої системи координат *L*, тобто

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,k,p,q}^{3} c_{ik,pq}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{pq} = \text{інв}. \tag{2.10}$$

Отже, в довільній *L* таблиця $c_{ik,pq}$, визначається одним і тим же набором незалежних пружних параметрів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ і т.д., значення яких не змінюються

при переході від однієї L до іншої. Представляючи W у вигляді суми по параметрам, отримуємо

$$2W = \bar{a} f_1(\varepsilon) + \bar{b} f_2(\varepsilon) + \ldots, \tag{2.11}$$

де $f_k(\varepsilon)$ - квадратичні форми відносно ε_{ik}, які не залежать від пружних параметрів середовища та інваріантні відносно будь-яких афінних ортогональних перетворень координат. Існує лише дві такі інваріантні форми:

$$J_1 = \left(\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{kk} \right)^2 = \text{інв}, \qquad J_2 = \sum_{i,k=1}^{3} \varepsilon_{ik}^2 = \text{інв}. \tag{2.12}$$

Тому (2.10) запишемо у вигляді $2W = \bar{a} J_1 + \bar{b} J_2$.

Нехай $\bar{a} = \lambda$, а $\bar{b} = 2\mu$. Тоді

$$W = \frac{\lambda}{2} I_1 + \mu I_2 =$$
$$= \frac{\lambda + 2\mu}{2} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13})^2 + 2\mu \left[\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2 - (\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33}) \right] \tag{2.13}$$

Таким чином закон Гука для ізотропного пружного середовища та відповідна матриця пружних сталих набувають вигляду:

$$\begin{aligned} t_{ik} &= \lambda \sum_{q=1}^{3} \varepsilon_{qq} + 2\mu \varepsilon_{ik}, \qquad (i = k = 1, 2, 3), \\ t_{ik} &= 2\mu \varepsilon_{ik}, \qquad\qquad (i \neq k = 1, 2, 3). \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\left(C_{\alpha\beta}\right)=\begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}. \qquad (2.15)$$

Співвідношення (2.14), (2.15) є найбільш типовими для геологічних пород.

Розглянемо неоднорідне трансверсально-ізотропне середовище з віссю симетрії Ox_2. Провівши аналогічні міркування, встановимо, що

$$\begin{aligned} 2W = a_1\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\right)^2 + 2a_2\left(\varepsilon_{11}^2+\varepsilon_{12}^2+\varepsilon_{22}^2\right)+ a_0\varepsilon_{33}^2 + \\ + 2a_3\varepsilon_{33}\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\right)+ 4a_4\left(\varepsilon_{13}^2+\varepsilon_{23}^2\right), \end{aligned} \qquad (2.16)$$

де $a_0=\bar{a}$, $a_1=\bar{b}$, $a_2=\bar{c}$ і т.д. Для кращого співставлення хвильових процесів в ізотропному та трансверсально-ізотропному середовищах позначимо

$$\begin{aligned} a_0 &= \lambda+2\mu-p, \qquad & a_1 &= \lambda, \\ a_2 &= \mu, \qquad & a_3 &= \lambda-l, \qquad & a_4 &= \mu-m. \end{aligned} \qquad (2.17)$$

Тоді матриця $\left(C_{\alpha\beta}\right)$, з врахуванням рівностей (2.16) та (2.17), для трансверсально-ізотропного середовища набуде вигляду

$$\left(C_{\alpha\beta}\right)=\begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda-l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu-p & \lambda-l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda-l & \lambda-l & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu-m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu-m \end{pmatrix}, \qquad (2.18)$$

а трансверсально-ізотропне середовище буде характеризуватись п’ятьма неусувними параметрами λ, μ, l, m і p.

Закон Гука для анізотропного середовища запишемо наступним чином

$$t_{ik} = \sum_{p,q=1}^{3} c_{ik,pq} \frac{\partial u_q}{\partial x_p}, \qquad (i = k = 1, 2, 3). \tag{2.19}$$

Підставляючи (2.19) в (2.2), отримаємо рівняння руху для однорідного анізотропного середовища

$$\sum_{k,p,q=1}^{3} c_{ik,pq} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_p} - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0, \quad (i = 1, 2, 3). \tag{2.20}$$

Позначимо $\lambda_{ik,pq} = \frac{1}{\rho} c_{ik,pq}$, тоді

$$\sum_{k,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_p} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0, \quad (i = 1, 2, 3). \tag{2.21}$$

У випадку неоднорідного анізотропного середовища отримаємо складнішу систему рівнянь динаміки анізотропного пружного середовища

$$\sum_{k,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_p} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \sum_{k,p,q=1}^{3} \frac{\partial c_{ik,pq}}{\rho \partial x_k} \frac{\partial u_q}{\partial x_p} = 0, \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{2.22}$$

Співвідношення (2.21), (2.22) дають змогу описати динамічні процеси загального типу як в пружних тілах, так і в необмежених пружних середовищах. В першому випадку до цих рівнянь необхідно додати відповідні початкові та граничні умови, в другому випадку додаються лише

початкові умови. Якщо постає задача про дослідження хвильових процесів в пружному середовищі, то відповідні початкові умови повинні задати вихідний фронт біжучої хвилі або, якщо аналізується розривна біжуча хвиля, то задається генеруючий її початковий імпульс. Для моделювання такої хвилі найбільш зручним виявляється променевий метод.

2.2 Основні положення нульового наближення променевого методу аналізу поширення розривних хвиль в ізотропному пружному середовищі

2.2.1 Кінематика розповсюдження фронтів розривних (слабких ударних) хвиль в ізотропному пружному середовищі

Як вже було зазначено раніше, приведені рівняння теорії пружності можуть описувати поширення пружних хвиль довільної структури. В даній дисертації вони використовуються для аналізу хвиль, що зазнають розриви похідних від пружних переміщень. В зв’язку з цим зупинимось більш детальніше на обговоренні термінології, яка використовується для їх опису. Оскільки в літературних джерелах відсутні однозначні визначення таких типів хвиль, то наведемо найпоширенішу термінологію. Так, в монографії Д. Р. Бленда «Нелинейная динамическая теория упругости» [13] відмічено, що розрив називається слабким, якщо він існує в похідній, порядок якої дорівнює порядку найвищої похідної, що входить до основного рівняння, або перевищує цей порядок. Якщо розрив наявний в похідній нижчого порядку, розрив називається сильним. В теорії пружності переміщення u_i неперервне як в просторі, так і за часом, через що сильні розриви можуть з’являтись лише в перших похідних u_i. Якщо при переході через рухому поверхню одна або декілька компонент зазнають розриву, то така поверхня називається ударною хвилею. Ми будемо розглядати поширення ударних хвиль в пружному тілі. До матеріалу, що перетинає цю поверхню, будуть застосовані рівняння збереження кількості руху та термодинаміки.

Водночас в монографії київських вчених Ю.М. Подільчука та Ю.К. Рубцова [123], щодо проблем застосування променевого методу до задач поширення розривних хвиль в ізотропних пружних середовищах, розриви перших похідних пружних переміщень називаються слабкими ударними хвилями.

В нашій роботі ми будемо використовувати термінологію, приведену у вітчизняній науковій літературі і називати хвилі вказаного типу розривними хвилями або слабкими ударними хвилями.

Варто також зазначити, що хвильовим фронтом називається поверхня на всіх точках якої хвиля, в певний момент часу, має однакову фазу. Поширення хвилі відбувається в перпендикулярному напрямі до хвильового фронту і може розглядатись як рух хвильового фронту через середовище. В ізотропному середовищі випромінювання точкового джерела має сферичний хвильовий фронт, в анізотропному він може набувати складнішої форми.

Основна властивість всіх хвиль, незалежно від природи їх походження, полягає в тому, що в хвилях відбувається перенесення енергії без перенесення речовини (останній ефект може відбуватись лише як побічне явище). Лінія, напрям якої в кожній точці співпадає з напрямом потоку енергії отримала назву хвильового променя. В ізотропному середовищі цей напрям співпадає з напрямом нормалі до фронту. Плоскій хвилі відповідає паралельний пучок прямолінійних променів, сферичній − пучок променів, які що радіально розходяться. При деяких умовах складний розрахунок поширення хвилі можливо замінити простішим розрахунком форми променів. Цим підходом користуються в геометричній акустиці та геометричній оптиці. Такий спрощений підхід можливий у випадку, коли довжина хвилі є невеликою в порівнянні з деякими розмірами, наприклад, розмір перешкод на шляху проходження хвилі, поперечними розмірами хвильового фронту та ін.

Променевий метод є одним з найбільш ефективним алгоритмом дослідження поширення розривних хвиль в деформованих середовищах. Він

дає змогу будувати поверхню фронту, що відокремлює область середовища, яка містить хвильові збурення, від області вільної від цих збурень, а також обчислювати інтенсивності еволюціонуючих хвиль. Нижче розглянуті випадки застосування променевого методу для аналізу розповсюдження розривних (слабких ударних) хвиль в ізотропних та анізотропних середовищах.

При дослідженні слабких ударних хвиль значна увага приділяється питанням геометричної побудови поверхонь розривів польових функцій та обчисленню значень таких розривів. Ці характеристики дають найбільш повну інформацію про фронт слабкої ударної хвилі та інтенсивність імпульсу, який вона переносить, в кожній точці фронту. Тому для постановки та розв'язку таких задач важливу роль відіграють методи геометричної оптики, зокрема, нульове наближення променевого методу, що забезпечує ґрунтовний кількісний опис широкого кола хвильових явищ різної фізичної природи [123], зокрема, і пружних розривних хвиль [119].

Перші дослідження в цій області стосуються розробок методів геометричної побудови системи променів та фронтів таких хвиль. Вони базуються на принципі Гюйгенса, у відповідності з яким кожний елемент поверхні фронту, досягнутий хвилею в даний момент часу, є центром (джерелом) нових елементарних хвиль, обвідна яких буде хвильовою поверхнею (фронтом) в наступний момент часу. В однорідному ізотропному акустичному середовищі фронт кожної породженої елементарної хвилі є сферичним, тому, наприклад, в плоскому випадку задача дослідження рухомих фронтів зводиться до побудови обвідної сім'ї кіл з однаковим радіусом та центом, який лежить на початковій кривій, що являє собою геометричне місце точок початкових хвильових джерел (рис. 2.1).

При цьому постає питання про виникнення особливих (сингулярних) точок на поверхні фронту, пов'язанних з порушенням її гладкості та диференційованості.

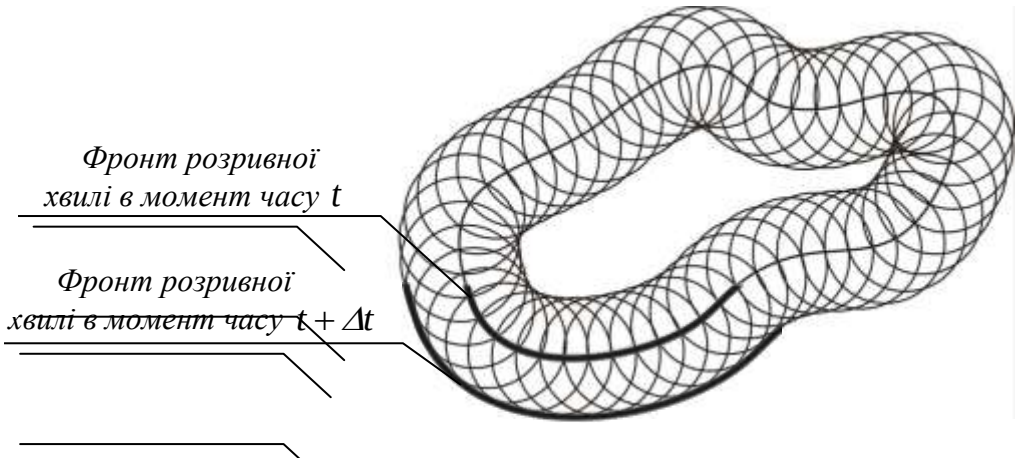


Рисунок 2.1 − Інтерпретація Х. Гюйгенса поширення фронту розривної хвилі

З огляду на те, що інтенсивності хвильових характеристик, в рамках лінійної теорії хвиль, в таких точках необмежені, то визначення місць та моментів їх виникнення склало окрему наукову дисципліну – геометричну оптику [74]. Одним із основних її напрямків є побудова обвідної системи променів, що отримали назву каустика. Особливості каустик, еволют і евольвент систем променів та фронтів детально були вивчені ще Гюйгенсом в 1654р. Але загальна теорія систем промені була побудована в другій половині двадцятого століття [7-9], котра пізніше стала одним із розділів теорії катастроф [10, 15, 34]. Це виявилось можливим під час розгляду задач про поширення фронтів в ізотропних однорідних середовищах, в яких промені прямолінійні та ортогональні фронту розривної хвилі. Однак, якщо середовище анізотропне, то промені, залишаючись прямолінійними, перестають бути ортогональними фронтам і більшість результатів, отриманих раніше в теорії променів, втрачають свою узагальненість.

При дослідженні слабких ударних хвиль найбільша увага приділяється питанням геометричної побудови поверхні поверхонь розривів польових функцій та обчисленню значень цих розривів, які дають найбільш повну інформацію про фронт слабкої ударної хвилі та інтенсивності в кожній точці фронту.

Для математичного опису руху в різних розділах фізики (акустики, теорії пружності, електродинаміки та ін.) використовують гіперболічні диференціальні рівняння. Одним із їх представником є хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial x_3^2}-\frac{1}{c^2(x_1,x_2,x_3)}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=0, \qquad (2.23)$$

де $c(x_1,x_2,x_3)$ - швидкість поширення хвилі.

В багатьох задачах природно задавати залежність хвильової функції від часу у вигляді співмножника $e^{-i\omega t}$, в якому ω – кутова частота коливань [12]:

$$W(x_1,x_2,x_3,t)=e^{-i\omega t}\varphi(x_1,x_2,x_3).$$

Функція $\varphi(x_1,x_2,x_3)$ задовольняє рівняння Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}-\frac{\omega^2}{c^2}\varphi=0. \qquad (2.24)$$

Рівняння (2.24) також має бути доповнене граничними умовами в залежності від фізичного змісту поставленої задачі.

Розглянемо хвильове рівняння, що описує розповсюдження нестаціонарних збурень та розривів (скачків) поля

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}=0, \qquad (2.25)$$

де φ – скалярна функція координат (x_1, x_2, x_3) та часу t;

c – швидкість поширення хвилі.

Для розв'язку такого рівняння використаємо геометричне наближення у вигляді ряду Тейлора в околі фронту хвилі

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(x_1, x_2, x_3) \frac{[t - \tau(x_1, x_2, x_3)]^m}{m!} . \qquad (2.26)$$

Тут функція $\tau(x_1, x_2, x_3)$ описує розповсюдження цього фронту за допомогою рівняння $t - \tau(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Підставивши ряд (2.26) в (2.25) та прирівнявши до нуля коефіцієнти при степенях $t - \tau$, отримаємо рівняння ейконала

$$(\nabla \tau)^2 = \frac{1}{c^2} \qquad (2.27)$$

та рівняння переносу нульового, першого, другого і т.д. наближень

$$\begin{gathered} 2(\nabla \tau) \cdot (\nabla \varphi_0) + \varphi_0 \nabla^2 \tau = 0 , \\ 2(\nabla \tau) \cdot (\nabla \varphi_1) + \varphi_1 \nabla^2 \tau = \nabla^2 \varphi_0 , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2(\nabla \tau) \cdot (\nabla \varphi_m) + \varphi_m \nabla^2 \tau = \nabla^2 \varphi_{m-1} . \end{gathered} \qquad (2.28)$$

Зазначимо, що найчастіше використовують нульове наближення променевого методу, тому дослідження в даній роботі будуть основані саме на нульовому наближенні променевого методу. Він дозволяє визначити найважливіші характеристики розривної хвилі, а саме, прослідкувати за трансформуванням в загальному випадку криволінійного фронту хвилі та підрахувати значення хвильової функції на фронті.

Застосуємо такий підхід для випадку однорідного ізотропного пружного середовища. Так, при відсутності об'ємних сил вектор

переміщення $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ можна виразити через скалярний Ф та векторний $\boldsymbol{\Psi}$ потенціали:

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi + \nabla \times \boldsymbol{\Psi}. \tag{2.29}$$

В свою чергу Ф та $\boldsymbol{\Psi}$ мають задовольняти відповідні хвильові рівняння

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial^2 t}, \qquad \nabla^2\boldsymbol{\Psi} = \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{\Psi}}{\partial^2 t}. \tag{2.30}$$

Тут α – швидкість поширення поздовжньої *P*-хвилі;

β – швидкість поширення поперечної *S*-хвилі в пружному середовищі. Вони визначаються співвідношеннями:

$$\alpha^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \qquad \beta^2 = \frac{\mu}{\rho},$$

де λ, μ – пружні константи Ламе;

ρ – густина середовища.

Введені потенціали Ф та $\boldsymbol{\Psi}$ можемо представити через променеві розклади виду (2.26). Тоді отримаємо

$$\begin{aligned}
\Phi(x_1, x_2, x_3, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\mathbf{x}) H(t - \tau(\mathbf{x})) \frac{[t - \tau(\mathbf{x})]^{k+2}}{(k+2)!}, \\
\boldsymbol{\Psi}(x_1, x_2, x_3, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{x}) H(t - \bar{\tau}(\mathbf{x})) \frac{[t - \bar{\tau}(\mathbf{x})]^{k+2}}{(k+2)!},
\end{aligned} \tag{2.31}$$

де $\mathbf{x}$ – радіус вектор;

$H(t)$ - східчаста функція Хевісайда, $H(t)=\begin{cases}1, & t<0\\ 0, & t>0\end{cases}$;

величини $t-\tau(\mathbf{x})$, $t-\bar{\tau}(\mathbf{x})$ визначають проміжки часу після приходу в точку спостереження фронту *P*- і *S*-хвиль, відповідно.

Так як переміщення на фронтах *P*- і *S*-хвиль мають бути неперервними, тому в розкладах (2.31) відсутні доданки нульового та першого порядків.

Підставимо променеві представлення для потенціалів Ф та $\mathbf{\Psi}$ у відповідні хвильові рівняння (2.30) та прирівняємо до нуля коефіцієнти перед однаковими степенями $t-\tau(\mathbf{x})$, $t-\bar{\tau}(\mathbf{x})$. Отримаємо рівняння ейконала

$$(\nabla\tau)^2=\frac{1}{\alpha^2}, \qquad (\nabla\bar{\tau})^2=\frac{1}{\beta^2} \tag{2.32}$$

та рівняння переносу в рекурентній формі

$$\begin{aligned} 2(\nabla\tau)\cdot(\nabla\varphi_k)+\varphi_k\nabla^2\tau&=\nabla^2\varphi_{k-1},\\ 2(\nabla\tau)\cdot(\nabla\boldsymbol{\psi}_k)+\boldsymbol{\psi}_k\nabla^2\tau&=\nabla^2\boldsymbol{\psi}_{k-1}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Рівняння (2.32) дають змогу знайти функції τ та $\bar{\tau}$, а (2.33) - φ_k, $\boldsymbol{\psi}_k$ $(k=0,1,2\ldots)$. Для визначення вектора переміщення **u** підставимо ряди (2.31) у рівність (2.29) [123]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{u}_k(t-\tau)^{k+1}}{(k+1)!}+\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\bar{\mathbf{u}}_k(t-\bar{\tau})^{k+1}}{(k+1)!}, \tag{2.34}$$

де $\mathbf{u}_k=-\varphi_k\nabla\tau+\nabla\varphi_{k-1}$ і $\bar{\mathbf{u}}_k=-(\nabla\bar{\tau})\times\boldsymbol{\psi}_k+\nabla\times\boldsymbol{\psi}_{k-1}$.

Для визначення напружень у співвідношення $\hat{t}=\mu(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla)+\lambda(\nabla\cdot\mathbf{u})\hat{I}$,

де $\hat{t}$ - тензор напружень;

$\hat{I}$ - одиничний тензор, підставимо ряд (2.34). Отримаємо

$$\hat{t}(\mathbf{x},t)=\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\hat{t}_k(t-\tau)^k}{k!}+\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\hat{\bar{t}}_k(t-\bar{\tau})^k}{k!}. \qquad (2.35)$$

Таким чином рівності (2.34) та (2.35) дають можливість визначити переміщення та напруження в околі фронту при знайдених значеннях τ, $\bar{\tau}$, φ_k та ψ_k. Отже, задача зводиться до розв'язку двох рівнянь ейконала та двох рівнянь переносу.

Рівняння ейконала є нелінійними рівняннями з частинними похідними першого порядку. Вони зводяться до системи звичайних диференціальних рівнянь [123]:

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds}=0, \qquad \frac{d\mathbf{x}}{ds}=\mathbf{p}, \qquad \frac{d\tau}{ds}=|\mathbf{p}|^2, \qquad (2.36)$$

де s - певний параметр заданий вздовж променя. Він пропорційний довжині променя, що відраховується від початкового положення хвильового фронту, співпадаючого з поверхнею порожнини; $\mathbf{p}=\nabla\tau$.

Загальним розв'язком системи є

$$\mathbf{x}=\mathbf{n}\xi+\mathbf{f}, \quad \tau=\frac{\xi}{\alpha}, \quad \nabla\tau=\frac{\mathbf{n}}{\alpha}. \qquad (2.37)$$

Тут $\mathbf{n}$ - одиничний вектор нормалі до поверхні фронту;

$\xi=s/\alpha$ - довжина променя;

$\mathbf{f}$ - рівняння поверхні в момент часу $t=0$.

Для *S*-хвилі будемо мати аналогічні співвідношення

$$\mathbf{x} = \mathbf{n}\xi + \mathbf{f}\,,\ \ \bar{\tau} = \frac{\xi}{\beta}\,,\ \nabla\bar{\tau} = \frac{\mathbf{n}}{\beta}\,. \tag{2.38}$$

Для подальшого розв'язку рівнянь (2.32) та (2.33) введемо спеціальну систему координат пов'язану з фронтами та променями. Розглянемо пучок променів з початком в деякій фіксованій точці M_0. В якості параметра σ, який визначає положення точки на промені, візьмемо ейконал τ [12]

$$\tau = \tau(M, M_0) = \int_{M_0}^{M} \frac{ds}{c(M)} = \int_{M_0}^{M} \frac{\sqrt{x_\sigma^2 + y_\sigma^2 + z_\sigma^2}}{c(M)} d\sigma\,, \tag{2.39}$$

де ds – елемент довжини дуги;

$x = x(\sigma),\ y = y(\sigma),\ z = z(\sigma)$ - крива, яка з'єднує точки M та M_0;

$$(x_\sigma, y_\sigma, z_\sigma) = \left(\frac{dx}{d\sigma}, \frac{dy}{d\sigma}, \frac{dz}{d\sigma}\right).$$

Нехай $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau)$ - параметричне рівняння променя. Довжина дотичного до променя вектора $\dfrac{1}{c(M_0)} \cdot \dfrac{d\mathbf{r}}{d\tau}\bigg|_{M_0} = \mathbf{s}_0$ дорівнює одиниці. Задавши вектор $\mathbf{s}_0$, можемо однозначно визначити промінь $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau)$, який виходить з точки M_0. Щоб в свою чергу задати $\mathbf{s}_0$, достатньо вказати два визначаючих його параметри α, β, наприклад, сферичні координати кінця вектора $\mathbf{s}_0$ на одиничній сфері.

Таким чином в околі точки M_0 отримаємо систему координат α, β, τ, а саме, задавши α, β, визначаємо промінь, задавши τ, знайдемо точку на промені. Таким чином, кожна точка $M(x, y, z)$ є однозначною функцією α, β, τ:

$$x = x(\alpha, \beta, \tau),\ y = y(\alpha, \beta, \tau),\ z = z(\alpha, \beta, \tau)$$

або у векторній формі $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha, \beta, \tau)$.

Щоб охарактеризувати промінь для плоского випадку, достатньо задати один параметр α, і тоді перехід від координат α, τ, до декартових координат у векторній формі запишеться у вигляді $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha, \tau)$.

2.2.2 Динаміка розповсюдження розривних хвиль в однорідному ізотропному пружному середовищі

Розглянемо ортогональну криволінійну променеву систему координат (ξ, γ, η). ξ - напрямлена вздовж променя, γ і η - координати на поверхні, причому γ напрямлена вздовж твірної, а η - в коловому напрямі. Тоді розв'язок рівняння переносу (2.33), при $k = 0$, можемо записати у вигляді [123]

$$2\frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{S}\right)\varphi_0 = 0, \quad 2\frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{S}\right)\psi_0 = 0, \tag{2.40}$$

де R і S – головні радіуси кривини осесиметричного хвильового фронту.

Або

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(RS\varphi_0^2\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \xi}\left(RS\psi_0^2\right) = 0.$$

Тоді

$$\varphi_0 = \pm\sqrt{\frac{c(\gamma)}{RS}}, \qquad \psi_0 = \pm\sqrt{\frac{\bar{c}(\gamma)}{RS}}, \tag{2.41}$$

де $c(\gamma)$, $\bar{c}(\gamma)$ - константи інтегрування.

Для їх визначення задамо початкові умови, припустивши, що в пружному середовищі поширення розривних хвиль ініційоване дією напружень

$$\sigma_{nn}(\gamma,t)\big|_{\xi=0}=\sum_{k=0}^{\infty}\sigma_k(0,\gamma)\frac{t^k}{k!},\qquad \sigma_{nm}(\gamma,t)\big|_{\xi=0}=\sum_{k=0}^{\infty}\bar{\sigma}_k(0,\gamma)\frac{t^k}{k!}$$

прикладених до поверхні певної порожнини $\xi=0$. Тоді константи інтегрування можна порахувати наступним чином [123]

$$c_0=\frac{\sigma_0^2(0,\gamma)}{\rho^2}R_0S_0,\qquad \bar{c}_0=\frac{\bar{\sigma}_0^2(0,\gamma)}{\rho^2}R_0S_0.$$

R_0 і S_0 - значення R і S на поверхні порожнини $\xi=0$. І тоді вирази для обчислення функцій φ_0 та ψ_0 набудуть вигляду

$$\varphi_0=\frac{\sigma_0(0,\gamma)}{\rho}\sqrt{\frac{R_0S_0}{RS}},\qquad \varphi_0=-\frac{\bar{\sigma}_0(0,\gamma)}{\rho}\sqrt{\frac{R_0S_0}{RS}}.$$

Якщо ж на поверхні $\xi=0$ задати початкові умови наступним чином

$$\varphi(\gamma,t)\big|_{\xi=0}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_k(0,\gamma)t^{k+2}}{(k+2)!},\qquad \psi(\gamma,t)\big|_{\xi=0}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\psi_k(0,\gamma)t^{k+2}}{(k+2)!},\tag{2.42}$$

то константи c_0, $\bar{c}_0$ можна визначити прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях в представленнях (2.31) і (2.42) та припускаючи в (2.42) $\xi=0$ при $t=0$.

В результаті отримаємо, що $\varphi_0(0,\gamma)=\pm\sqrt{\frac{c_0(\gamma)}{RS}}$, $\psi_0(0,\gamma)=\pm\sqrt{\frac{\bar{c}_0(\gamma)}{RS}}$.

Тоді $c_0(\gamma)=\varphi_0^2(0,\gamma)R_0S_0$, $\bar{c}_0(\gamma)=\psi_0^2(0,\gamma)R_0S_0$.

Остаточні рівності для φ_0 та ψ_0 набудуть вигляду

$$\varphi_0(\xi,\gamma)=\pm\varphi_0(0,\gamma)\sqrt{\frac{R_0S_0}{RS}}, \qquad \psi_0(\xi,\gamma)=\pm\psi_0(0,\gamma)\sqrt{\frac{R_0S_0}{RS}}. \tag{2.43}$$

Розглянемо детальніше вираз $\sqrt{\frac{R_0S_0}{RS}}$. Запишемо його у вигляді $\sqrt{\frac{(R_0\Delta\gamma)(S_0\Delta\eta)}{(R\Delta\gamma)(S\Delta\eta)}}$. Так як відомо, що $(R_0\Delta\gamma)(S_0\Delta\eta)=\Delta\Sigma_0$ - площа поперечного перерізу променевої трубки в момент часу t_0, а $(R\Delta\gamma)(S\Delta\eta)=\Delta\Sigma$ - площа перерізу в момент t, то $\sqrt{\frac{R_0S_0}{RS}}=\sqrt{\frac{\Delta\Sigma_0}{\Delta\Sigma}}$. З іншого боку, якщо розглянути дуже тонку променеву трубку з малим $\Delta\gamma$ і $\Delta\eta$, то тоді площа поперечного перерізу буде рівною

$$\Delta\Sigma=\left|\boldsymbol{\rho}_1\cdot\left[\boldsymbol{\rho}_2\times\boldsymbol{\rho}_2\right]\right|\Delta\gamma\Delta\eta,$$

де $\boldsymbol{\rho}_k$ - координатні вектори променевої системи координат $\xi\gamma\eta$;

$\boldsymbol{\rho}_1=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial x_k}{\partial\xi}\mathbf{i}_k$, $\boldsymbol{\rho}_2=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial x_k}{\partial\gamma}\mathbf{i}_k$, $\boldsymbol{\rho}_3=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial x_k}{\partial\eta}\mathbf{i}_k$; причому $\boldsymbol{\rho}_1=\boldsymbol{\xi}$ співпадає з напрямом променевої швидкості, а $\boldsymbol{\rho}_2$ та $\boldsymbol{\rho}_3$ лежать в дотичних до хвильового фронту $\xi=const$ площинах.

Тоді мішаний добуток векторів $\boldsymbol{\rho}_1$, $\boldsymbol{\rho}_2$, $\boldsymbol{\rho}_3$ визначає якобіан переходу від променевих координат до декартових, тобто

$$\boldsymbol{\rho}_1 \cdot [\boldsymbol{\rho}_2 \times \boldsymbol{\rho}_2] = \begin{vmatrix} \partial x_1/\partial\xi & \partial x_2/\partial\xi & \partial x_3/\partial\xi \\ \partial x_1/\partial\gamma & \partial x_2/\partial\gamma & \partial x_3/\partial\gamma \\ \partial x_1/\partial\eta & \partial x_2/\partial\eta & \partial x_3/\partial\eta \end{vmatrix} = J(\xi,\gamma,\eta).$$

В результаті цього отримаємо, що

$$\Delta\Sigma = J(\xi,\gamma,\eta) \equiv \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi,\gamma,\eta)},$$

$$\Delta\Sigma_0 = J_0(\xi,\gamma,\eta).$$

Таким чином відношення $\sqrt{\frac{R_0 S_0}{RS}} = \sqrt{\frac{\Delta\Sigma_0}{\Delta\Sigma}}$ зводиться до $\sqrt{\frac{R_0 S_0}{RS}} = \sqrt{\frac{J_0(\xi,\gamma,\eta)}{J(\xi,\gamma,\eta)}}$.

З теорії геометричної оптики відомо, що величина $L = \frac{J(\xi,\gamma,\eta)}{J_0(\xi,\gamma,\eta)}$ називається геометричним розходженням променів. З цього випливає, що $\sqrt{\frac{R_0 S_0}{RS}} = \sqrt{\frac{1}{L}}$, тобто $\sqrt{\frac{R_0 S_0}{RS}}$ рівне величині, оберненій кореню квадратному геометричного розходження L [74]. А рівності (2.43) набудуть вигляду

$$\varphi_0(\xi,\gamma) = \pm\varphi_0(0,\gamma)\sqrt{\frac{1}{L}}, \quad \psi_0(\xi,\gamma) = \pm\psi_0(0,\gamma)\sqrt{\frac{1}{L}}. \qquad (2.43')$$

Отже, знаючи величину геометричного розходження променів і початкові значення $\varphi_0(0,\gamma)$, $\psi_0(0,\gamma)$ шуканих функцій, можна за допомогою рівностей (2.43′) порахувати значення цих величин в будь-якій точці ξ променя.

Підкреслимо, що в пружних однорідних середовищах швидкості і напрями поширення поздовжніх та поперечних хвиль однакові, а самі промені є прямолінійними. Це в значній мірі полегшує постановку та розв’язок задачі.

2.3 Основні положення нульового наближення променевого методу аналізу поширення розривних хвиль в анізотропному неоднорідному пружному середовищі.

2.3.1 Кінематика розповсюдження фронтів розривних (слабких ударних) хвиль в анізотропному неоднорідному пружному середовищі

Розглянемо довільне анізотропне пружне середовище. Розв’язок хвильового рівняння (2.22) побудуємо у вигляді плоскої монохроматичної хвилі $\mathbf{u} = \mathbf{A}e^{ik(\mathbf{nr}-vt)}$ з хвильовим числом k і фазовою швидкістю v, фронтами якої є поверхні постійних фаз $\mathbf{nr} - vt = const$, які рухаються зі швидкістю $\mathbf{v} = \mathrm{v}\mathbf{n}$ та локально перпендикулярні орту $\mathbf{n}$. Зазначимо, що фазовою швидкістю хвилі є швидкість поширення певної фази нескінченної синусоїдної (монохроматичної) хвилі. Фазова швидкість входить, зокрема, в формулу закону заломлення. Однак на практиці маємо справу не з монохроматичними хвилями, для яких важливим є лише поняття фазової швидкості, а з обмеженими. Будь яка обмежена хвиля може бути представлена у вигляді накладання більшого (точніше, нескінченно великого) числа монохроматичних хвиль різної частоти. Якщо фазові швидкості хвиль всіх частот однакові, то з тією ж швидкістю поширюються і вся сукупність або група хвиль. Якщо ж ці швидкості неоднакові, то виникає дисперсія, і питання швидкості поширення хвилі ускладнюється. Якщо обмежена хвиля складається з хвиль, частоти яких незначно відрізняються, то така хвиля (так званий хвильовий пакет) поширюється з певною швидкістю, яка називається груповою швидкістю. Зокрема груповою ж швидкістю відбувається перенос

хвильової енергії. В нашому випадку середовище є недиспергуючим, тому ефект групового пакета відсутній.

Тоді поверхню розриву поля пружних зміщень в анізотропному середовищі можна задати рівнянням

$$\tau(x_1, x_2, x_3) - t = 0, \tag{2.44}$$

причому функція τ має задовольняти диференціальне рівняння з частинними похідними першого порядку

$$\sum_{i,k,p,q}^{3} \lambda_{ik,pq} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} = 1, \tag{2.45}$$

де $p_k = \partial\tau/\partial x_k = n_k / \mathrm{v}^{(r)}(\mathbf{n})$, $\lambda_{ik,pq} = \lambda_{ik,pq}(x_1, x_2, x_3)$ - складові тензора відносних пружних сталих, що залежать від розглядуваної точки (x_k) середовища, а функції $A_q^{(r)} \equiv A_q^{(r)}(p, x_k)$ визначаються відповідно до типу r випромінювальної хвилі. Хвиля з найбільшою фазовою швидкістю називається квазіпоздовжною і має номер $r = 1$. Дві інші, $r = 2,3$ - квазіпоперечними, їх фронти завжди відстають від фронту квазіпоздовжної хвилі. Рівняння (2.44) є узагальненим рівнянням ейконала для анізотропного середовища. Його розв'язок зводиться до розв'язку характеристичної системи звичайних диференціальних рівнянь, доповненої відповідно підібраними початковими умовами

$$\frac{dx_m}{d\tau} = \xi_m, \qquad \frac{dp_m}{d\tau} = \eta_m, \qquad (m = 1, 2, 3), \tag{2.46}$$

де

$$\xi_m \equiv \xi_m^{(r)}(\mathbf{n}, x_k) = \sum_{i,p,q}^{3} \lambda_{im,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \qquad (2.47)$$

$$\eta_m \equiv \eta_m^{(r)}(\mathbf{n}, x_k) = -\frac{1}{2} \sum_{i,k,p,q}^{3} \frac{\partial \lambda_{ik,pq}}{\partial x_m} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}. \qquad (2.48)$$

$\xi_m^{(r)}(\mathbf{n}, x_k)$ - променева швидкість, порахована для точки (x_k) і орта нормалі **n** до фронту хвилі.

Таким чином рівняння (2.47) описує рух точки перетину променя з фронтом, причому ξ_m і $x_m^{(r)}$ є нелінійними функціями і промені вздовж яких переноситься енергія поля викривляються. Особливістю явища розповсюдження фронтів розривних хвиль в неоднорідних пружних середовищах є те, що в залежності від напрямку руху навіть фронт початково плоскої хвилі може викривлятися по мірі зміщення. Але, найбільш яскраво процеси трансформування фронтів проявляються на криволінійних замкнутих фронтових поверхнях. Також варто відмітити, що під час поширення розривної хвилі в неоднорідному трансверсально-ізотропному середовищі зі змінними механічними параметрами поляризація її не змінюється, відбувається лише поворот вектора поляризації хвилі і жодним чином не виникають хвилі іншої поляризації.

Доповнимо систему (2.46) початковими умовами.

$$x_m\Big|_{\tau=0} = x_m^0, \qquad p_m\Big|_{\tau=0} = p_m^0 \equiv \frac{n_m^0}{\mathrm{v}_r^0}, \qquad (m = 1, 2, 3) \qquad (2.49)$$

і тоді система диференціальних рівнянь (2.47), (2.48) буде мати єдиний розв’язок

$$x_m = x_m(\tau, \alpha, \beta), \quad p_m = p_m(\tau, \alpha, \beta), \quad (m = 1, 2, 3). \qquad (2.50)$$

Зазначимо, що такий розв'язок є неперервним разом із частинними похідними першого порядку по змінним τ, α і β, а в загальному випадку система $\tau\alpha\beta$ є не ортогональною, на відміну ві ортогональної системи $\xi\gamma\eta$, що використовується в теорії пружності ізотропних середовищ.

Для того, щоб знайти вектор поляризації **A** хвилі та фазову швидкість v, $\mathbf{v}=\mathrm{v}\mathbf{n}$, що характеризує швидкість поширення фронту в напрямку нормалі до його поверхні, для обраного напряму **n** потрібно розв'язати однорідну систему алгебраїчних рівнянь [123]

$$\sum_{k,p,q}^{3}\lambda_{ik,pq}n_k n_p A_q^{(r)}=\mathrm{v}_r^2\,A_i^{(r)},\qquad (i=1,2,3). \tag{2.51}$$

Умовою розв'язності такої системи, прирівнявши до нуля її визначник

$$\left|\sum_{k,p,q}^{3}\lambda_{ik,pq}n_k n_p-\mathrm{v}_i^2\,\delta_{iq}\right|=0, \tag{2.52}$$

є алгебраїчне рівнянням третього степеня відносно v^2, з трьома додатними коренями $\mathrm{v}_r^2=\mathrm{v}_r^2(\mathbf{n}),\ (r=1,2,3)$. У відомих в природі випадках пружної анізотропії корінь v_1^2, відповідної квазіпоздовжньої хвилі $\mathbf{u}=\mathbf{A}e^{ik(\mathbf{nr}-vt)}$, завжди задовольняє рівність $\mathrm{v}_1^2(\mathbf{n})=\mathrm{v}_r^2(\mathbf{n}),\ (r=2,3)$. Між двома іншими коренями, що відповідають квазіпоперечним хвилям, можуть виконуватись співвідношення

$$\mathrm{v}_2^2(\mathbf{n})\geq\mathrm{v}_3^2(\mathbf{n})\ \text{або}\ \mathrm{v}_2^2(\mathbf{n})<\mathrm{v}_3^2(\mathbf{n}),$$

причому знак рівності у випадку анізотропних середовищ можливий лише при значеннях **n**, які відповідають деяким дискретним лініям на одиничній сфері кінців ортів нормалей **n**, які мають спільний початок.

Зазначені властивості характерні для моделі середовища в якому значення механічних параметрів не залежать від напряму в одній площині, яка називається площиною ізотропії. Перпендикуляр до цієї площини є віссю симетрії. Таку модель називають поперечно-ізотропним середовищем або трансверсально-ізотропним середовищем, як це прийнято в даній дисертації. Вона характеризується п’ятьма незалежними параметрами пружності і часто використовується на практиці для опису хвильових процесів в земних породах. Підкреслимо, що завдяки цьому сейсмічні промені не ортогональні хвильовим фронтам, а променева швидкість напряму переносу енергії, відрізняється від нормальної (фазової) швидкості в напрямах перпендикулярних поверхням фронту. При цьому також порушуються прості співвідношення між напрямами зміщення частинок середовища та напрямом поширення хвилі, тобто ускладнюються закони поляризації.

Підставляючи в систему (2.51) замість v^2 кожне із значень коренів $\mathrm{v}_r^2(\mathbf{n})$ рівняння (2.52) отримаємо однозначно розв’язні алгебраїчні системи рівнянь з яких визначаються складові $A_i^{(r)} = A_i^{(r)}(\mathbf{n})$ векторів поляризації $\mathbf{A}^{(r)}$ квазіпоздовжньої $(r=1)$ та квазіпоперечних $(r=2,3)$ хвиль, підпорядковані умові нормування $\sum_{i=1}^{3}\left[A_i^{(r)}\right]^2 = 1$. При цьому, відповідні одному і тому ж значенню $\mathbf{n}$, вектори $\mathbf{A}^{(r)}$ при різних значеннях r виявляються взаємно ортогональними, так, що виконуються більш загальні умови ортогональності та нормування

$$\sum_{i=1}^{3} A_i^{(r)}(\mathbf{n}) A_i^{(s)}(\mathbf{n}) = \delta_{rs}.$$

На рис. 2.2 зображена схема розташування векторів поляризації $\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{n})$, $\mathbf{A}^{(2)}(\mathbf{n})$, $\mathbf{A}^{(3)}(\mathbf{n})$, що відповідають обраному вектору нормалі $\mathbf{n}$.

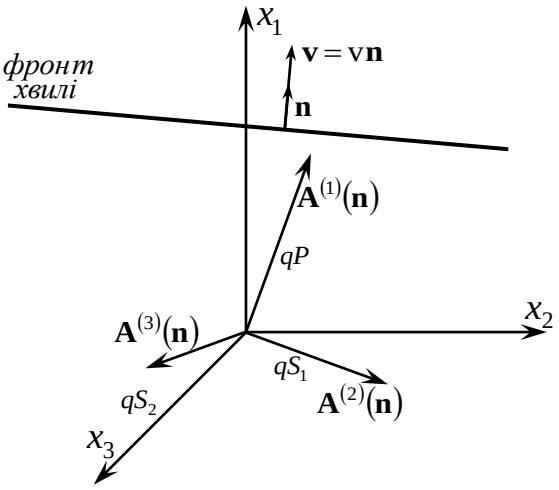


Рисунок 2.2 – Схема розташування векторів поляризації розривної хвилі

Зауважимо, що з метою уникнення перескоку з однієї квазіпоперечної хвилі на іншу необхідно нумерацію другого та третього коренів рівняння (2.52) виконувати так, щоб величини $\mathrm{v}_2(\mathbf{n})$, $A_i^{(2)}(\mathbf{n})$ і $\mathrm{v}_3(\mathbf{n})$, $A_i^{(3)}(\mathbf{n})$ змінювались неперервно (разом з похідними) при зміні напряму **n**. В результаті цього з'являється можливість визначення типу хвилі значенням індексу $r=1,2,3.$

Таким чином для побудови сітки променів розривної хвилі виберемо послідовність $\mathbf{n}_s$ векторів нормалі, кожен з яких визначає напрями фазових швидкостей хвиль заданої поляризації. Для кожного обраного напряму **s** знайдемо значення компонентів тензора пружних сталих (2.18) та величини відповідних фазових швидкостей і складових векторів поляризації. Далі чисельно інтегруючи рівняння (2.47), (2.48) методом Рунге-Кутта четвертого порядку отримуємо координати x_k шуканих точок променів.

Зазначимо, що як і у випадку ізотропного середовища, так і – анізотропного, застосування променевого методу призводить до введення нової (променевої) системи координат. Для анізотропного випадку – система координат $\tau\alpha\beta$, одна з координатних поверхонь яких $\tau=const$ є поверхнею

фронту ударної хвилі. Перехід від декартової $(x_1, x_2, x_3,)$ системи до променевої (τ, α, β) відбувається за допомогою якобіана

$$J(\tau,\alpha,\beta)=\frac{\partial(x_1,x_2,x_3,)}{\partial(\tau,\alpha,\beta)}=\begin{vmatrix}\partial x_1/\partial\tau & \partial x_2/\partial\tau & \partial x_3/\partial\tau\\ \partial x_1/\partial\alpha & \partial x_2/\partial\alpha & \partial x_3/\partial\alpha\\ \partial x_1/\partial\beta & \partial x_2/\partial\beta & \partial x_3/\partial\beta\end{vmatrix}. \qquad (2.53)$$

Поверхні, на яких якобіан перетворюється в нуль, називаються каустичними, а точки виродження якобіана є біфуркаційними. На таких поверхнях рівняння пучка променів $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\tau,\alpha,\beta)$ немає однозначного розв'язку в променевій системі координат $\tau\alpha\beta$, при цьому промені нескінченно зближуються і на фронтах виникають сингулярності.

2.3.2 Динаміка розповсюдження розривних хвиль в анізотропних неоднорідних пружних середовищах.

Отримані співвідношення (2.47) і (2.48) розв'язку рівняння ейконала (2.44) дають змогу визначити інтенсивність хвилі в околі фронту. В даній роботі в якості основного параметра, що характеризує інтенсивність ударної хвилі на її фронті, будемо вважати швидкість $\dot{\mathbf{u}}$ ($\dot{\mathbf{v}}$ - для *qS*-хвилі) руху елемента середовища в його околі.

Представимо розклад компонентів вектора переміщень $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t)$, який є розв'язком рівняння (2.22), у вигляді променевих рядів:

$$u_i=\sum_{n=0}^{\infty}V_i^n(\mathbf{x})\frac{[t-\tau(\mathbf{x})]^{n+1}}{(n+1)!}H(t-\tau(\mathbf{x})),\ (i=1,2,3). \qquad (2.54)$$

Підставивши ряд (2.54) в (2.22), при $n=0$, отримаємо однорідну систему рівнянь для визначення компонент вектора V_i^0 [119]

$$\sum_{k,p,q}^{3}\lambda_{ik,pq}p_k p_p V_q^0 - V_i^0 = 0, \qquad (i=1,2,3) \tag{2.55}$$

та неоднорідну, при $n=1$

$$\sum_{k,p,q}^{3}\lambda_{ik,pq}p_k p_p V_q^1 - V_i^1 = \frac{1}{\rho}\sum_{k,p,q}^{3}\left\{c_{ik,pq}p_k\frac{\partial V_q^0}{\partial x_p} + \frac{\partial\left(c_{ik,pq}p_p V_q^0\right)}{\partial x_k}\right\} = 0, (i=1,2,3) \tag{2.56}$$

Система рівнянь (2.55) співпадає з системою рівнянь (2.41), умова розв'язності (2.52) якої призводить до трьох різних диференціальних рівнянь з частинними похідними (2.45) (при $(r=1,2,3)$) для функцій $\tau(x_1,x_2,x_3)\equiv\tau^{(r)}(x_1,x_2,x_3)$. Співставлення системи (2.55) із системою (2.51) призводить до співвідношення

$$V_i^0 = \varphi(x_1,x_2,x_3)A_i^{(r)}(\mathbf{n},x_k), \qquad (i=1,2,3), \tag{2.57}$$

де $A_i^{(r)}(\mathbf{n},x_k)$ - нормований розв'язок системи (2.51);

φ – невідома функція координат точок фронту.

Так як функція $\tau(x_1,x_2,x_3)$ із (2.44) вже визначена (з умови (2.52)), то система (2.56) виявляється неоднорідною алгебраїчною системою рівнянь відносно V_i^1 з визначником рівнем нулю. Умова розв'язності такої системи зводиться до ортогональності вектора із правої частини (2.56) власному вектору однорідної системи, в даному випадку вектору поляризації $\mathbf{A}^{(r)}$ з

компонентами із (2.57). Якщо в праву частину (2.56) замість V_i^0 підставити їх значення з (2.57), то тоді вираз (2.56) запишемо у вигляді

$$\sum_{i,k,p,q}^{3} A_i^{(r)} \left\{ c_{ik,pq} p_k \frac{\partial\left(\varphi A_q^{(r)}\right)}{\partial x_p} + \frac{\partial\left(c_{ik,pq} p_p \varphi A_q^{(r)}\right)}{\partial x_k} \right\} = 0. \quad (2.58)$$

Перейшовши від диференціювання по x_k до диференціювання за напрямом променя , тобто по τ, умову (2.58) запишемо в наступному вигляді [119]

$$2\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \varphi \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \varphi\rho \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{dx_k}{d\tau} = 0. \quad (2.59)$$

Для отримання остаточного виразу для φ (через геометричне розходження променів) скористаємось формулою

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{1}{J} \frac{\partial x_k}{\partial \tau} \right] = 0, \quad (2.60)$$

де, як вже зазначалось раніше, $J(\tau, \alpha, \beta)$ - якобіан переходу від променевих координат до декартових.

Перетворимо (2.60)

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{1}{J} \frac{\partial x_k}{\partial \tau} \right] = \frac{1}{J} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{1}{J}\right) = \frac{1}{J^2} \frac{\partial J}{\partial \tau}. \quad (2.61)$$

Тоді (2.59) зможемо записати у вигляді

$$\frac{1}{J\varphi}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\rho J\varphi^2\right)=0. \qquad (2.62)$$

Звідки

$$\varphi=\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}\,\frac{c_0(\alpha,\beta)}{\sqrt{|J(\tau,\alpha,\beta)|}}, \qquad (2.63)$$

де $c_0(\alpha,\beta)$ - невідома функція, залежна від початкових умов задачі.

Отже, на основі формул (2.59), (2.57), (2.62), отримуємо компоненти поля зміщень в прифронтовій зоні, на основі нульового наближення променевого методу,

$$u_i^{(r)}=\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}\,\frac{c_0(\alpha,\beta)\mathbf{A}_i^{(r)}(\tau,\alpha,\beta)}{\sqrt{|J(\tau,\alpha,\beta)|}}[t-\tau(\mathbf{x})]H(t-\tau(\mathbf{x})), \qquad (2.64)$$
$$(i,r=1,2,3).$$

Тоді для визначення стрибка швидкості переміщення частинок середовища при переході через фронт ударної хвилі буде справедлива рівність

$$\dot{u}_i^{(r)}=\frac{\partial u_i^{(r)}}{\partial t}=\frac{c_0(\alpha,\beta)\mathbf{A}_i^{(r)}(\tau,\alpha,\beta)}{\sqrt{|J(\tau,\alpha,\beta)|}},\quad (i,r=1,2,3). \qquad (2.65)$$

Визначимо невідому функція $c_0(\alpha,\beta)$. Для цього запишемо рівність (2.65) при $\tau=0$

$$\dot{u}_i^{(r)}(0,\alpha,\beta)=\frac{c_0(\alpha,\beta)\mathbf{A}_i^{(r)}(0,\alpha,\beta)}{\sqrt{|J_0(0,\alpha,\beta)|}},\quad (i,r=1,2,3). \qquad (2.66)$$

З цієї рівності випливає, що

$$c_0(\alpha,\beta)=\frac{\dot{u}_i^{(r)}(0,\alpha,\beta)\sqrt{|J(0,\alpha,\beta)|}}{\mathbf{A}_i^{(r)}(0,\alpha,\beta)},\quad (i,r=1,2,3).$$

Тоді

$$\dot{u}_i^{(r)}(0,\alpha,\beta)=\frac{\dot{u}_i^{(r)}(0,\alpha,\beta)\sqrt{|J_0(0,\alpha,\beta)|}\mathbf{A}_i^{(r)}(\tau,\alpha,\beta)}{\mathbf{A}_i^{(r)}(0,\alpha,\beta)\sqrt{|J(\tau,\alpha,\beta)|}},(i,r=1,2,3). \quad (2.67)$$

Враховуючи поняття геометричного розходження променів $L=\frac{J(\tau,\alpha,\beta)}{J_0(0,\alpha,\beta)}$, отримаємо

$$\dot{u}_i^{(r)}(0,\alpha,\beta)=\frac{\dot{u}_i^{(r)}(0,\alpha,\beta)\mathbf{A}_i^{(r)}(\tau,\alpha,\beta)}{\mathbf{A}_i^{(r)}(0,\alpha,\beta)}\cdot\sqrt{\frac{1}{L}},(i,r=1,2,3). \quad (2.68)$$

Таким чином отримали співвідношення для визначення величин розривів відповідних функцій на фронтах розривних хвиль. Для них зберігається зміст рівностей (2.43), (2.43′), які використовуються в теорії ізотропних пружних середовищ для вираження поточних значень величин розриву відповідних функцій через їх початкові значення за допомогою поняття геометричного розходження променів.

Відмітимо також ще раз, що задача дослідження розривних хвиль в анізотропних пружних середовищах значно ускладнюється, оскільки в цьому випадку існує три типи різних квазіпоздовжніх та квазіпоперечних пружних хвиль які поширюються з різними швидкостями вздовж кожного променевого напряму. Для однорідних середовищ такий напрям залишається прямолінійним, а у випадку неоднорідного середовища ці промені

викривляються, що призводить до суттєвої перебудови поверхні фронту розривної хвилі та до появи на ньому різних геометричних сингулярностей оскільки в цих точках значення хвильових функцій прямують до нескінченності. Тому задача аналізу розповсюдження розривних хвиль в анізотропних неоднорідних пружних середовищах пов’язані зі значними математичними та механічними труднощами.

2.4 Висновки до розділу 2

1. В розділі 2 викладена методика аналізу ефектів перетворення розривних хвиль на неоднорідностях пружних трансверсально-ізотропних середовищ на основі нульового наближення променевого методу.

2. На основі променевого методу розроблена математична модель і побудовані основні співвідношення кінематики та динаміки поширення розривних хвиль в ізотропних та трансверсально-ізотропних пружних середовищах з неперервними та шарувато-розривними неоднорідностями їх механічних параметрів.

3. Запропонована методика комп’ютерної реалізації розробленого підходу. Показано, що завдяки використанню променевого методу, поверхні геометричних фронтів, які трансформуються, співпадають з поверхнями розривів полів деформацій та напружень пружного середовища і тому цей метод є найефективнішим засобом моделювання перетворення таких хвиль в неоднорідних структурах.

РОЗДІЛ 3
ПОСЛАБЛЕННЯ ТА ЗБІЛЬШЕННЯ ІНТЕНСИВНОСТІ РОЗРИВНИХ ХВИЛЬ В НЕОДНОРІДНИХ ПРУЖНИХ СЕРЕДОВИЩАХ ЗІ ЗМІННИМИ МЕХАНІЧНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Як було відмічено раніше, метою даної роботи є дослідження ефектів екранування розривних хвиль, зокрема, стосовно задач поширення в неоднорідних гірських породах сейсмічних хвиль, спровокованих вибухами, а також гірськими ударами. При цьому, в загальному випадку, можемо спостерігати неоднорідності порід двох типів. В першому випадку пружні характеристики тектонічних середовищ (густина і компоненти тензора пружних сталих) можуть бути неперервними функціями просторово-часових змінних x_1,x_2,x_3. При поширенні розривних хвиль в такому середовищі, промені викривляються згідно рівнянь

$$\frac{dx_m}{d\tau} = \sum_{i,p,q}^{3} \lambda_{im,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \qquad (m = 1, 2, 3)$$
$$\frac{dp_m}{d\tau} = -\frac{1}{2} \sum_{i,k,p,q}^{3} \frac{\partial \lambda_{ik,pq}}{\partial x_m} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \tag{3.1}$$

а хвильові фронти зазнають додаткової трансформації. Оскільки викривлення променів призводить до їх геометричної розбіжності чи збіжності, то цей ефект виявляється пов’язаним зі збільшенням чи зменшенням інтенсивності хвиль на їх фронтах. Таку дифракцію на неоднорідностях, пов’язану зі збільшенням її інтенсивності, можна інтерпретувати як екранування розривної хвилі в зонах середовищ в яких промені відхиляються внаслідок їх викривлення на неоднорідностях, інтенсивність хвиль при цьому падає.

Неоднорідності другого типу деформованого середовища можуть бути обумовлені розривним характером змін механічних властивостей середовища. Такі неоднорідності зустрічаються, наприклад, коли гірська

порода є комбінацією двох або більше пружних середовищ з різними механічними властивостями, які контактують на певних поверхнях розділу. В цьому випадку параметри пружності системи є функціями, які зазнають розривів на поверхнях розділу. В даному розділі вивчаються загальні закономірності перетворення променів та фронтів на неоднорідностях першого типу. Досліджуються ефекти, пов'язані з такими перетвореннями, зменшення інтенсивності хвиль під час їх поширення (тобто екранування).

Питання екранування пружних хвиль в деформованих середовищах другого типу розглядаються в розділі 4.

3.1 Трансформування променів і фронтів в неоднорідних пружних середовищах зі змінними параметрами анізотропії.

Нагадаємо, що в трансверально-ізотропних середовищах існує лише одна вісь симетрії нескінченно високого порядку (надалі вважатимемо вісь Ox_3 віссю симетрії), тобто така вісь, що при повороті середовища навколо неї на довільний кут φ середовище збігається саме з собою. Із-за існування цієї осі всі закономірності при поширенні хвиль достатньо вивчати в будь-якій одній площині, яка проходить через вісь симетрії, наприклад, в площині x_1Ox_3. Внаслідок зазначеної симетрії зміна орта нормалей $\mathbf{n}(\theta)$ в площині x_1Ox_3 (коли напрям **n** фіксується кутом θ, відраховуючи його від осі Ox_3) вектори $\xi^{(r)}(\theta)$ променевих швидкостей хвиль всіх трьох типів $(r=1,2,3)$ також лежать в площині x_1Ox_3. Що ж стосується векторів поляризації $\mathbf{A}^{(r)}(\theta)$ плоских хвиль, то два з них, а саме $\mathbf{A}^{(1)}$ і $\mathbf{A}^{(2)}$, відповідних квазіпоздовжньої та квазіпоперечної $r=2$ хвиль, лежать в площині x_1Ox_3, а третій вектор $\mathbf{A}^{(3)}$, що відповідає квазіпоперечній $r=3$ хвилі, ортогональний цій площині. Динамічні властивості неоднорідного трансверсально-ізотропного пружного середовища визначаються п'ятьма функціями λ, μ, l, m, p його пружних

характеристик і функцією ρ її густини. Криві R_r векторів рефракції та l_r променевих швидкостей при різних значеннях r суттєво відрізняються один від одного як за формою, так за характером залежності від пружних сталих. Криві R_1 і l_1 квазіпоздовжньої хвилі завжди опуклі і залежать від всіх п'яти сталих λ, μ, l, m, p середовища. Що ж стосується кривих R_2 і l_2 квазіпоперечної $r=2$ хвилі, то вони мають більш складну форму, яка є дуже чутливою до змін параметрів середовища. В залежності від значень пружних параметрів розрізняють три типи особливостей, яких можуть набувати криві R_2 і l_2. Ці особливості прийнято пов'язувати з появою у кривих січних, які мають чотири спільні точки з R_2 або дотичних, що мають дві точки дотику з R_2. При цьому розподіл за типами відбувається в залежності від того, чи паралельні такі дотичні до осі Ox_1 або Ox_3, чи є прямими виду $x_3=\pm kx_1$, $0<k<\infty$. Особливості кривих l_2 променевих швидкостей пов'язані з появою в інтервалі кутів $\theta_1<\theta<\theta_2$, між двома найближчими точками дотику прямої $x_3=\pm kx_1$ з кривою R_2 такої точки $\theta=\vartheta$, в якій перетинаються гілки кривої l_2, внаслідок чого утворюється петля-лакуна. Необхідними і достатніми умовами утворення особливостей I-го, II-го та III-го типів є виконання нерівностей [119]

$$\begin{aligned}
&(\lambda+\mu-m-l)^2>(\lambda+2\mu)(\lambda+\mu+m-p),\\
&(\lambda+\mu-m-l)^2>(\lambda+2\mu-p)(\lambda+\mu+m),\\
&(\lambda+\mu-m-l)^2<(\lambda+\mu+m-p)(\lambda+\mu+m).
\end{aligned}\qquad (3.2)$$

Тензор пружних сталих трансверально-ізотропного пружного середовища задається таблицею

$$\left(C_{\alpha\beta}\right)=\begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda-l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu-p & \lambda-l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda-l & \lambda-l & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu-m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu-m \end{pmatrix}. \qquad (3.2)$$

Як вже зазначалось раніше, компоненти матриці пружних сталих $\left(C_{\alpha\beta}\right)$ повинні задовольняти умови

$$c_{11}>0,\ \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}>0,\ldots,\ \left|c_{\alpha\beta}\right|>0, \qquad (3.3)$$

$$(\lambda+\mu-l)^2<(\lambda+2\mu-p)(\lambda+\mu), \qquad (3.4)$$

які забезпечують додатну визначеність квадратичної форми потенціальної енергії (2.5) елемента пружного середовища в точці. Не виконання умов (3.3), (3.4) призводить до появи комплексних коренів в (2.52), що суперечить змісту задачі, оскільки величини швидкості $\mathrm{v}^{(r)}$ поширення хвиль можуть бути лише дійсними числами. На практиці такі ефекти можуть бути виникати в пружному середовищі з так званою штучною анізотропією, викликаної преднапруженням середовища. Тоді в області, де умови (3.3), (3.4) не виконуються, середовище стає нестабільним і пружні хвилі в ньому не поширюються.

3.1.1 Випадок зміни елементів тензора пружних сталих за законом квадратичної функції

Динамічні властивості неоднорідного трансверсально-ізотропного пружного середовища визначаються п’ятьма функціями λ, μ, l, m, p його пружних характеристик і функцією ρ його густини. Аналіз особливостей

розривних хвиль при різноманітних поєднаннях різних типів цих функцій представляється неоглядним завданням. Тому нижче представлені результати розрахунків лише для найпростіших випадків, у яких параметри анізотропії l, m або p модулюються елементарними функціями вздовж однієї з осей. В роботі Г.М. Іванченко [63] розглянуто найпростіший закон зміни пружних параметрів – лінійний. Ним показано, що неоднорідність механічних властивостей пружного середовища призводить до суттєвої перебудови системи променів і фронтів. При цьому промені набувають суттєвої кривизни, а на поверхнях фронтів утворюються геометричні особливості – каустики, де промені фокусуються, внаслідок чого інтенсивність поля необмежено зростає. В нашій роботі досліджуються більш складніші випадки зміни цих величин.

Розглянемо випадок в якому властивості анізотропного пружного середовища змінюються вздовж координати x_3. Такі ситуації можуть виникати в реальних геологічних умовах внаслідок впливу різних причин (віку породи, тектонічних напружень, глибини залягання породи та ін.). З часом відбувається зміна властивостей порід та збільшення сейсмічних швидкостей зі збільшенням глибини. Такі пружні середовища називаються градієнтними. Водночас з цим ефектом можуть збільшуватись і властивості анізотропії середовища. В загальному випадку її можна розглядати як граничний стан шарувато-неоднорідного середовища при необмеженому збільшенні кількості шарів з відмінними пружними властивостям. В ньому поздовжні та поперечні хвилі вже є залежними, оскільки вони віднині не існують в чистому вигляді. При невеликих значеннях градієнтів швидкостей хвиль, коли відносні зміни пружних властивостей здійснюють незначний вплив на відстань довжини гармонічної хвилі, середовище називають слабоградієнтним. В цьому випадку швидкості квазіпоздовжніх та квазіпоперечних хвиль є повільно змінними функціями координат і тому їх можна вважати майже незалежними. Однак в нашій роботі задача

розв’язується в загальній постановці. Тому зв'язок між *qP*- і *qS*-хвилями враховується автоматично.

Першим розглянемо випадок зміни пружних параметрів за законом квадратичної функції та проаналізуємо як зміна фізичних властивостей середовища може знижувати або підвищувати можливість збільшення або зменшення (екранування) інтенсивності хвилі за рахунок викривлення і відхилення хвильових променів.

Для розв’язку поставленої задачі надалі в роботі приймемо, що джерелом поширення хвиль є сферична порожнина малого діаметра. Однак для полегшення розрахунків вважатимемо її точкою оскільки її розміри є значно меншими за геометричні параметри фронтів. На основі наведених в розділі 2 теоретичних відомостей побудуємо сітку променів та фронтів в залежності від зміни параметрів анізотропії. Фізичні властивості середовища задамо наступним чином: λ=3,4·10^9 Па, μ=1,36·10^{10} Па, ρ=2760 кг/м^3, $m=m_0\mu$, $l=l_0\lambda$, $p=p_0(\lambda+2\mu)$. Розв’язувальну систему (3.1) чисельно проінтегруємо методом Рунге–Кута. Прослідкуємо за трансформацією променів та фронтів при зміні параметра l за законом квадратичної функції: $l = l_0\lambda = \left(l^0 + k_l x_3^2\right)\lambda$. При цьому матриця $\left(C_{\alpha\beta}\right)$ набуде вигляду

$$\left(C_{\alpha\beta}\right)=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

де

$$A=\begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda-l \\ \lambda & \lambda+2\mu-p & \lambda-l \\ \lambda-l & \lambda-l & \lambda+2\mu \end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda - \left(l^0 + k_l x_3^2\right)\lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu - p & \lambda - \left(l^0 + k_l x_3^2\right)\lambda \\ \lambda - \left(l^0 + k_l x_3^2\right)\lambda & \lambda - \left(l^0 + k_l x_3^2\right)\lambda & \lambda + 2\mu \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \mu - m & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu - m \end{pmatrix}.$$

Тобто чотири її елементи стали змінними. На рис. 3.1 і рис. 3.2 у площині x_1Ox_3 зображені сітки променів і фронтів для квазіпоздовжньої і квазіпоперечної розривних хвиль, ініційованих миттєвим прикладанням до поверхні сферичної порожнини рівномірно розподіленого нормального тиску. Відзначимо, що у зв'язку з набуттям рядом середовищ анізотропії фізичних властивостей під час прикладання нормального тиску до вільної поверхні в загальному випадку від неї відходить не тільки квазіпоздовжня, а й квазіпоперечна хвиля. Форми перерізів їхніх фронтів відображені на рис. 3.1 та рис. 3.2 відповідно. При розрахунках l, m, p задавались такими: $l = \left(0{,}3 + 1 \cdot 10^{-8} x_3^2\right)\lambda$, m=0,1μ, p=0,5(λ+2μ). На рис. 3.1, в напрямі зменшення значення параметра l, спостерігаємо відхилення променів та їх згущення вздовж прямої $x_3 = -15000$. Таким чином із зміною неоднорідності середовища інтенсивність хвилі спадає та простежується ефект екранування. Якщо розглянути рис. 3.2 в збільшеному масштабі, то можемо виділити зону підвищеної збіжності сім'ї променів (рис. 3.3) та зону, де промені цієї сім'ї розбігаються (рис. 3.4). В першому випадку інтенсивність імпульсу, який переносить хвиля, значно збільшується; а в другому випадку, навпаки, промені відхиляються та розбігаються. Тому така зона для цієї сім'ї променів може розглядатись як зона їх відбиття та екранування.

Відмітимо, що в динамічній теорії пружності хвилю, яка має в градієнтному середовищі криволінійні промені, називається рефрагованою.

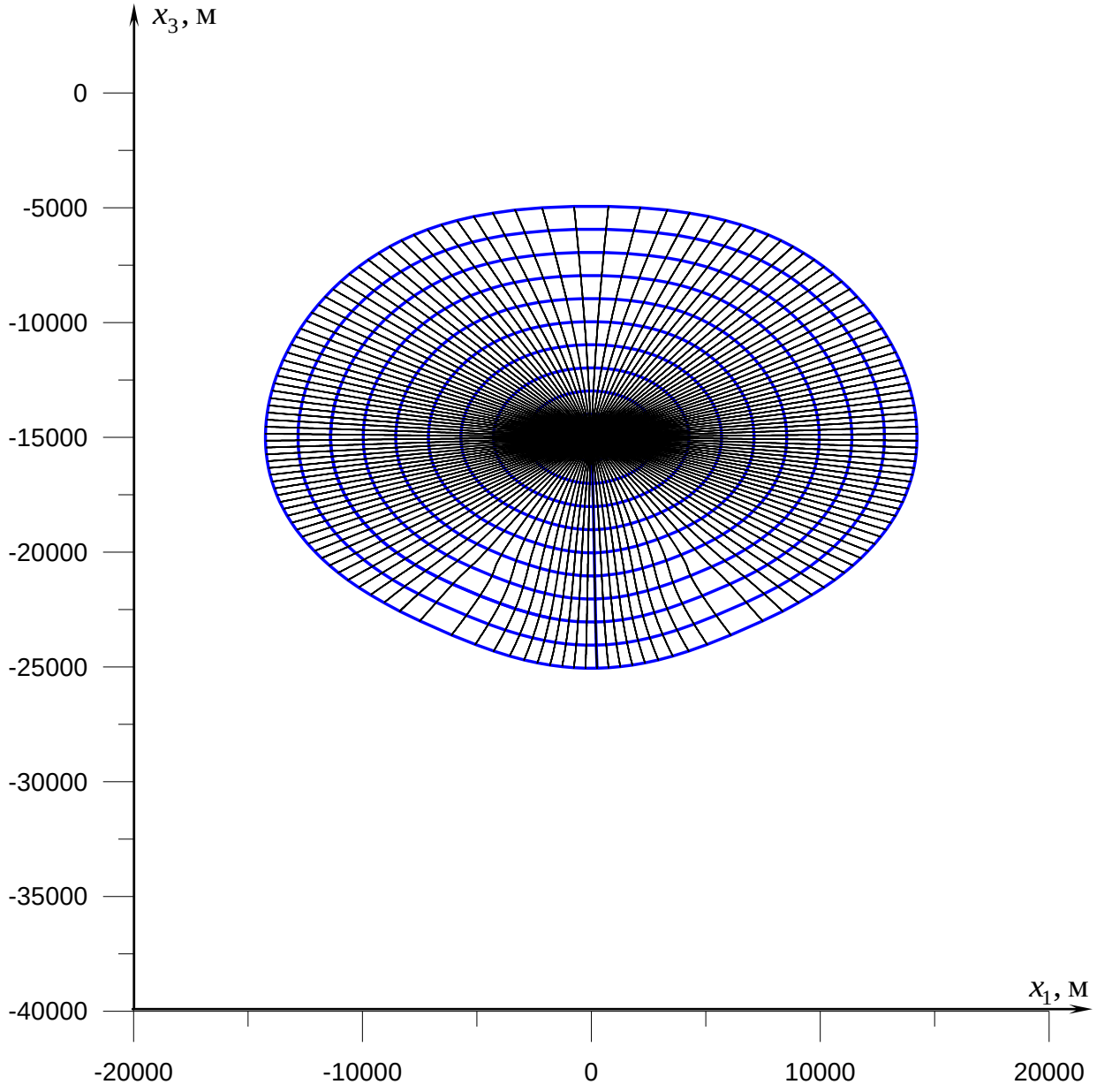


Рисунок 3.1 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої qP -хвилі при зміні параметра $l=\left(0{,}3+1\cdot10^{-8}x_3^2\right)\lambda$ та значеннях $m=0{,}1\mu$ і $p=0{,}5(\lambda+2\mu)$

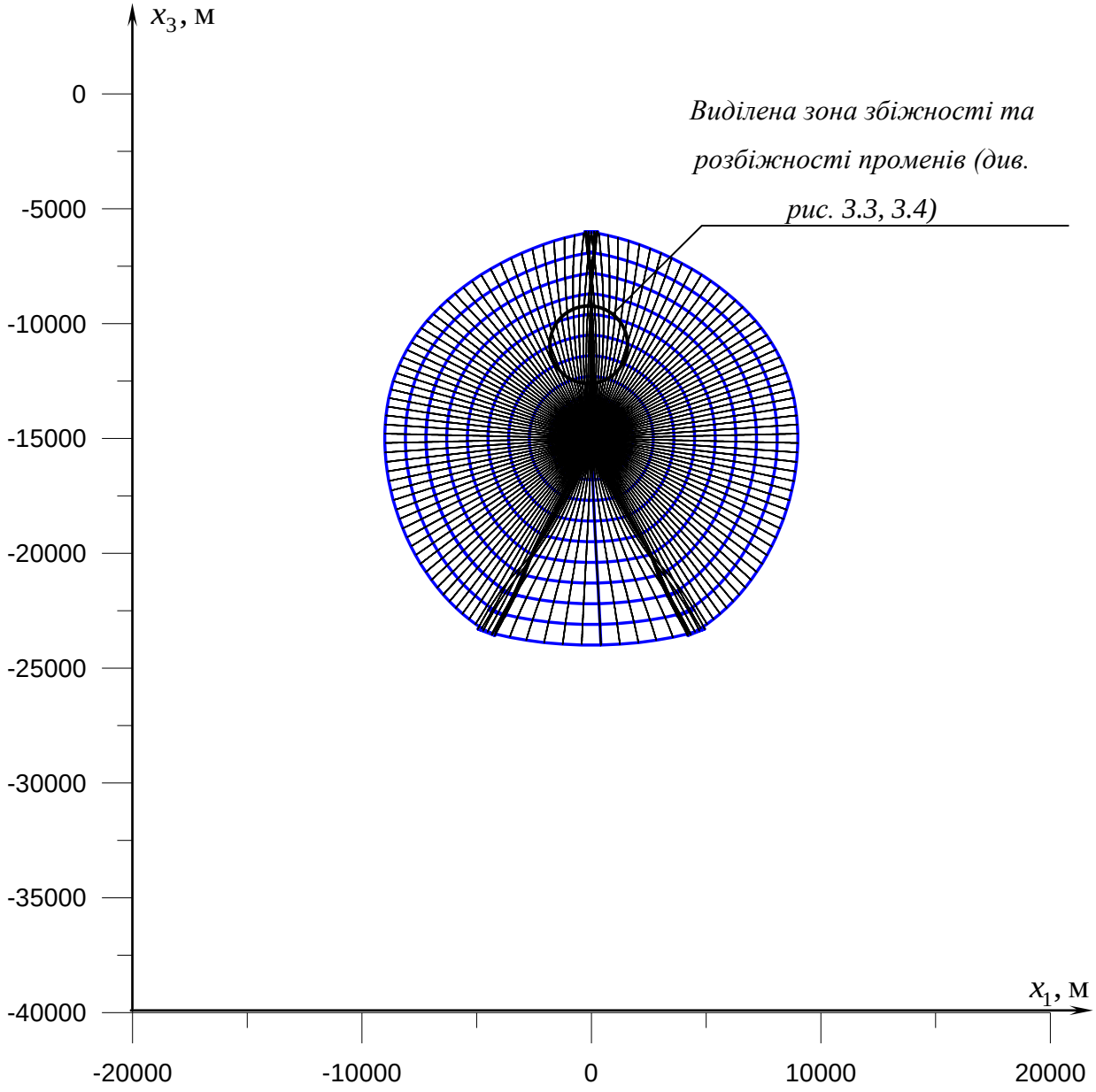


Рисунок 3.2 − Система променів та фронтів квазіпоперечної qS - хвилі при зміні параметра $l=\left(0{,}3+1\cdot10^{-8}x_3^2\right)\lambda$ та значеннях $m=0{,}1\mu$ і $p=0{,}5\left(\lambda+2\mu\right)$

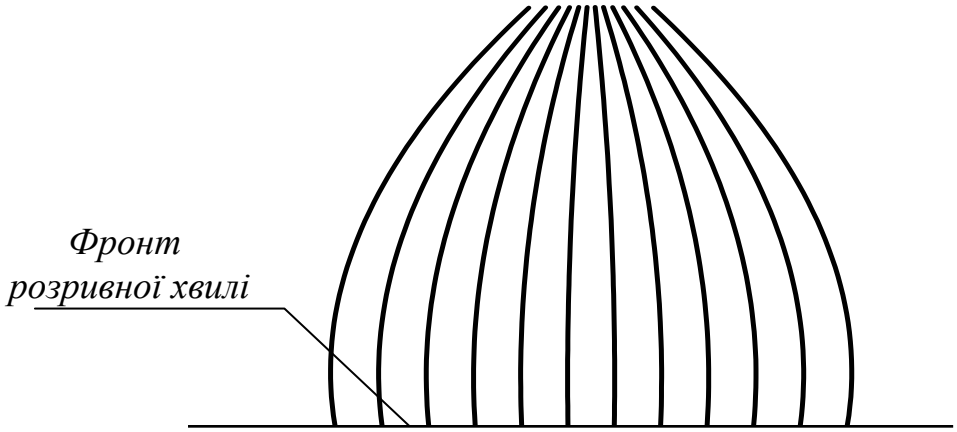


Рисунок 3.3 − Зона геометричної збіжності променів та збільшення інтенсивності *S* -хвилі

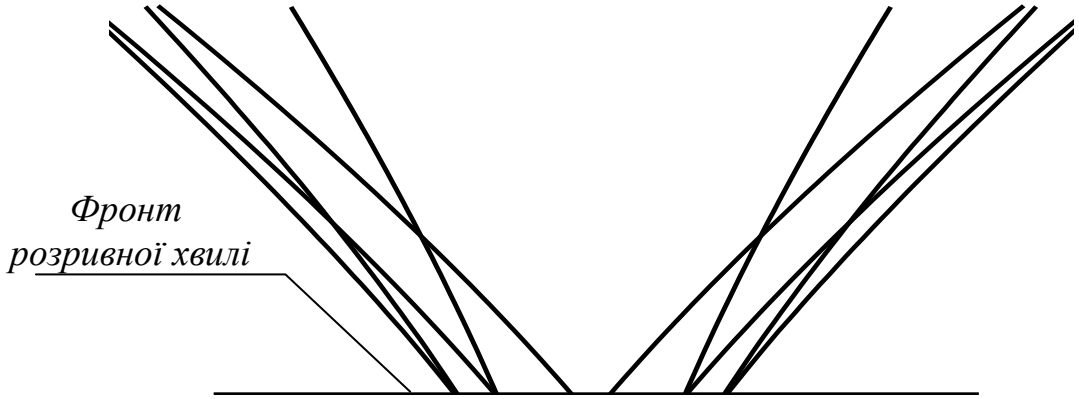


Рисунок 3.4 − Зона геометричної розбіжності (часткового екранування) *S* -хвилі

Її важливою особливістю є те, що при додатному градієнті швидкості (тобто при $\frac{d\mathbf{v}}{dx_3} > 0$) вона повертається до вихідної поверхні (див. рис. 3.4, 3.15).

При набутті градієнтом швидкості від'ємних значень змінюється знак кривини рефрагуючої хвилі і промені набувають опуклої вгору форми. В цьому випадку, який називається інверсією швидкості, хвиля не повертається до початкової поверхні і її промені, зі збільшенням глибини, збігаються до вертикального напряму. Цей ефект виразно помітний на прикладі представленому на рис. 3.15.

Як вже було зазначено раніше в підпункті. 2.3.1, перетворення розривної хвилі в неоднорідному трансверсально-ізотропному пружному середовищі зі змінними механічними параметрами супроводжується лише поворотом вектора поляризації, а не зміною його типу та виникненням новоляризованої хвилі.

Змінюючи вихідні дані для *l, m, p,* а всі інші фізичні характеристики середовища залишимо незмінними, отримаємо нові системи променів та фронтів поширення пружних хвиль. Нехай $l = \left(0{,}5 + 1\cdot 10^{-8} x_3^2\right)\lambda$, m=0,3μ, p=0,1$(\lambda+2\mu)$ (рис. 3.5). На рис. 3.5, а спостерігаємо незначне викривлення променів квазіпоздовжньої хвилі, а фронти *qS*-хвилі помітно перебудовуються і на них утворюються біфуркаційні особливості типу ластівчин хвіст. Якщо надати параметрам анізотропії від'ємних значень, наприклад, $l = \left(-0{,}3 + 1\cdot 10^{-8} x_3^2\right)\lambda$, m=–0,1μ, p=–0,5$(\lambda+2\mu)$, то також спостерігатимемо значну перебудову променів квазіпоперечної хвилі (рис. 3.6, б) з утворенням сингулярностей і видовженням вздовж осі симетрії Ox_3 фронтів *qP*-хвилі. Аналогічні ефекти спостерігаються і при $l = \left(-0{,}5 + 1\cdot 10^{-8} x_3^2\right)\lambda$, m=–0,1μ, p=–0,3$(\lambda+2\mu)$ (рис. 3.7) та $l = \left(0{,}1 + 1\cdot 10^{-8} x_3^2\right)\lambda$, m=0,3μ, p=0,5$(\lambda+2\mu)$ (рис. 3.8). Лише в останньому випадку відбувається видовження фронту *qP*-хвилі вздовж осі Ox_1

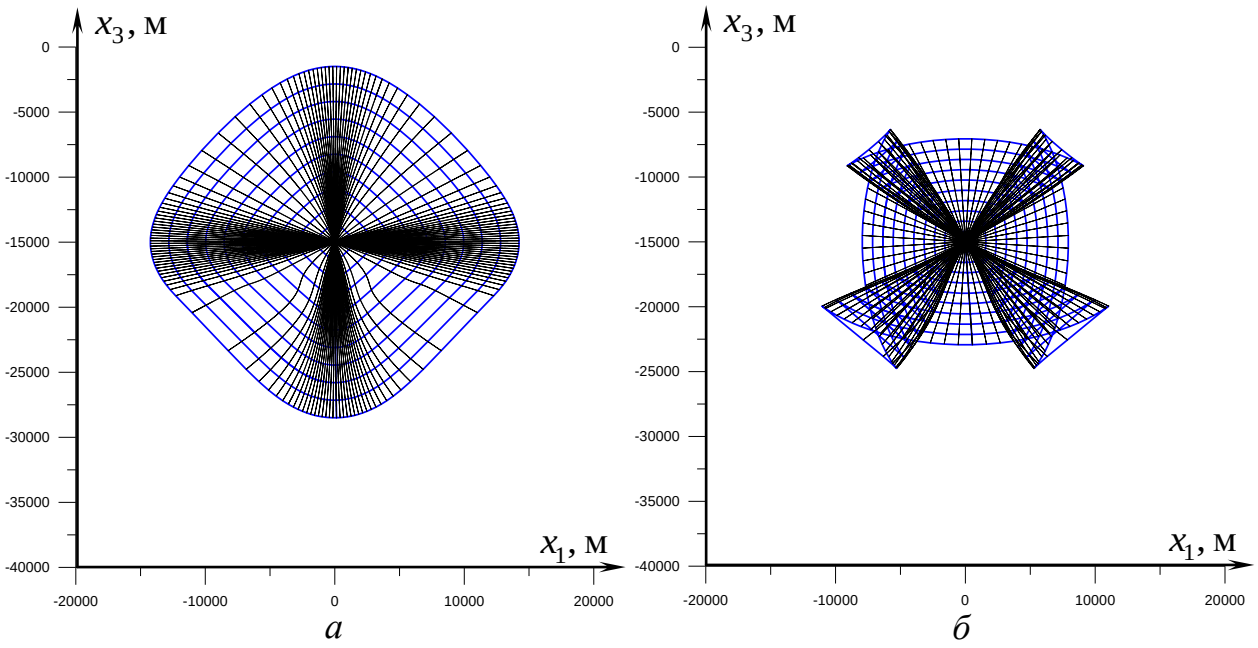


Рисунок 3.5 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $l=\left(0{,}5+1\cdot10^{-8}x_3^2\right)\lambda$ та значеннях $m=0{,}3\mu$ і $p=0{,}1\left(\lambda+2\mu\right)$

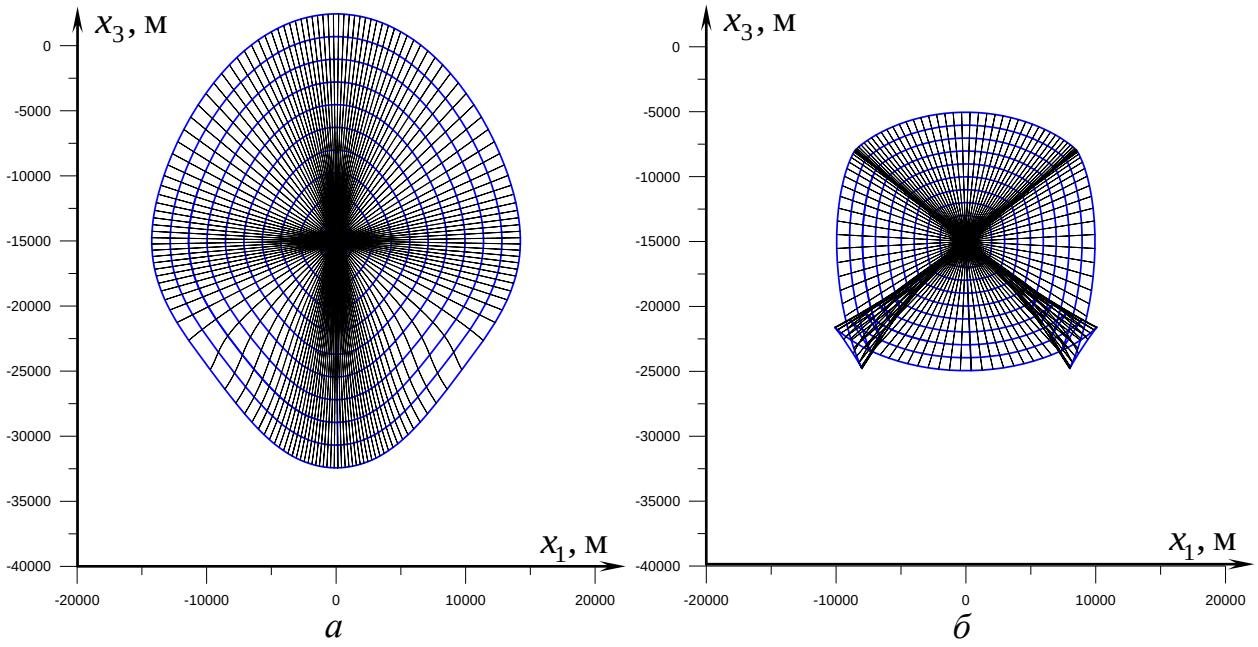


Рисунок 3.6 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $l=\left(-0{,}3+1\cdot10^{-8}x_3^2\right)\lambda$, та значеннях $m=-0{,}1\mu$, $p=-0{,}5\left(\lambda+2\mu\right)$

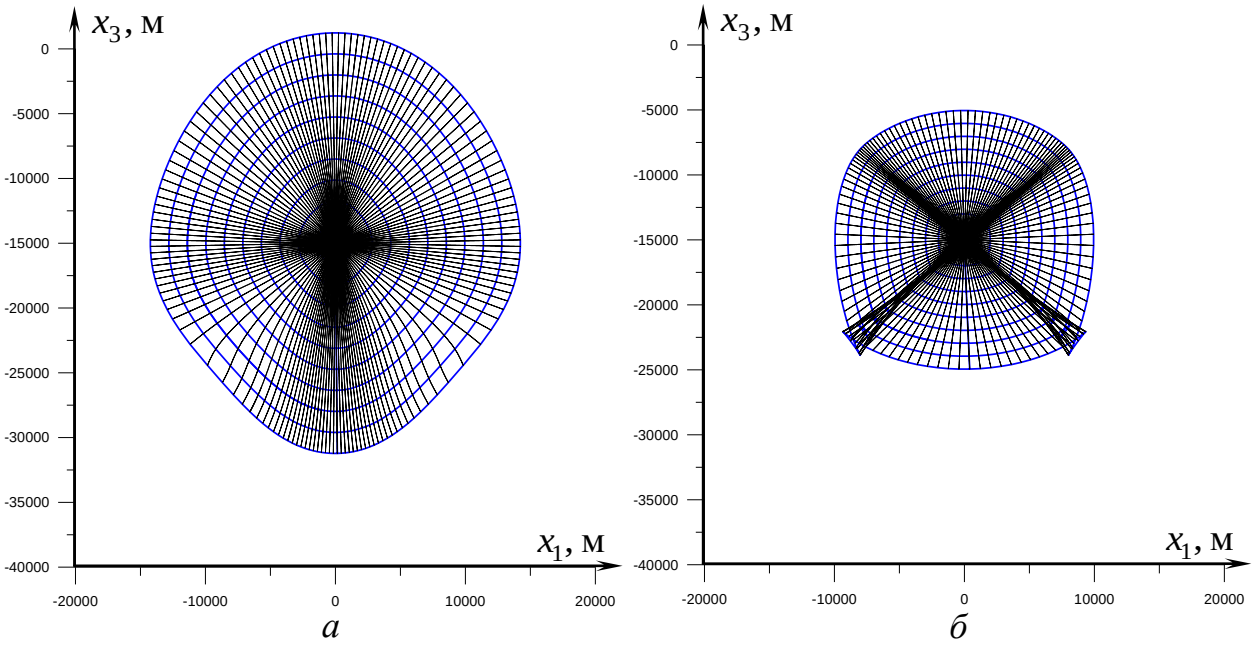


Рисунок 3.7 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $l=\left(-0{,}5+1\cdot10^{-8}x_3^2\right)\lambda$ та значеннях $m=-0{,}1\mu$, $p=-0{,}3(\lambda+2\mu)$

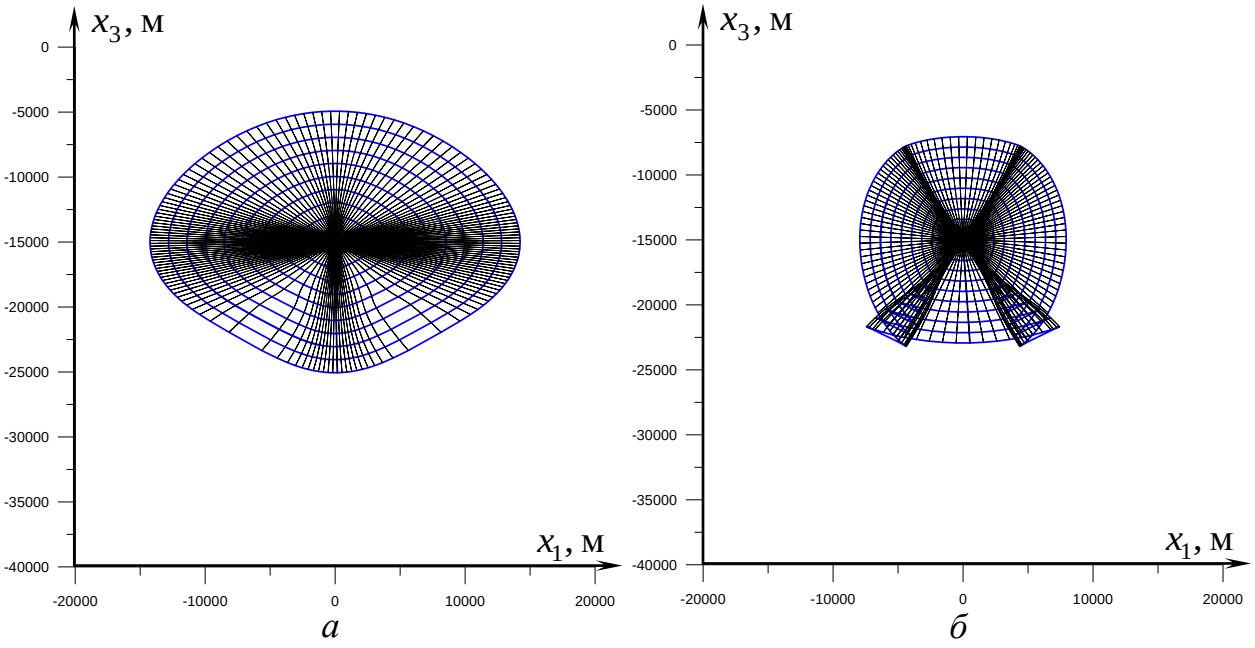


Рисунок 3.8 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $l=\left(0{,}1+1\cdot10^{-8}x_3^2\right)\lambda$ та значеннях $m=0{,}3\mu$, $p=0{,}5(\lambda+2\mu)$

та поступове відхилення променів при зменшенні параметра *l*.

Привертають на себе увагу геометричні особливості променевих кривих квазіпоперечної хвилі на рис. 3.5, б. Вони характеризуються наявністю обвідної для сім'ї променів, яка називається каустикою (тобто «жгучою», так як відповідає необмеженій концентрації світлової енергії в анізотропній геометричній оптиці). В теорії розривних хвиль каустики також пов'язані з необмеженим зростанням потенціальної енергії пружної деформації, яка однак властива лише для ідеально пружних середовищ. В реальних деформованих середовищах ця енергія виявляється обмеженою, оскільки необхідно враховувати її розсіювання в результаті нелінійних ефектів деформування та пружно пластичних деформацій. Необхідно також враховувати, що кожна точка каустики є джерелами нових квазіпоздовжніх та квазіпоперечних хвиль фронти яких відходять від них зі своїми швидкостями.

Математичні аспекти теорії утворення каустик, їх розсіювання та розсипання розглянуті в монографіях В.І. Арнольда [7-10]. Вони вивчаються також в роботі R.G. Payton [187].

Найчастіше властивості неоднорідності середовища проявляються зі зміною параметра *m*, який входить до двох діагональних елементів матриці (3.2). Нехай *m* змінюється за законом $m = m_0\mu = \left(m^0 + k_m x_3^2\right)\mu$. Тоді елементи матриці (3.5) зміняться наступним чином

$$A = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda - l \\ \lambda & \lambda + 2\mu - p & \lambda - l \\ \lambda - l & \lambda - l & \lambda + 2\mu \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \mu - m & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu - m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu - \left(m^0 + k_m x_3^2\right)\mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu - \left(m^0 + k_m x_3^2\right)\mu \end{pmatrix}$$

.

Рис. 3.9 та рис. 3.10 ілюструють трансформацію хвиль, якщо $m=\left(-0{,}5+1\cdot10^{-9}x_3^2\right)\mu$ та $l=-0{,}3\lambda$, $p=-0{,}1(\lambda+2\mu)$ і $m=\left(0{,}3+1\cdot10^{-9}x_3^2\right)\mu$ та $l=0{,}5\lambda$, $p=0{,}1(\lambda+2\mu)$. При такому варіюванні параметрів також спостерігається значне викривлення променів квазіпоперечних хвиль, поява зон їх геометричної збіжності і розбіжності та, пов'язаних з ними ділянок, збільшення та зменшення інтенсивності хвилі, а також утворення геометричних особливостей. Так, наприклад, збільшуючи масштаб в рис. 3.9, можемо виділити зони збіжності (рис. 3.11) та геометричної розбіжності променів (рис. 3.12). На останньому малюнку чітко прослідковується значне відхилення променів та зменшення інтенсивності хвилі.

Вплив неоднорідності на розповсюдження пружних хвиль проявляється очевидніше, якщо коефіцієнту k_m надати від'ємного значення. Так, нехай $k_m=-5\cdot10^{-6}$ м$^{-2}$, а $m^0=0{,}1$, $l_0=0{,}3$ і $p_0=0{,}5$. Тоді на рис. 3.13 спостерігається яскраво виражена асиметрія фронтів уздовж осі Ox_3 як для квазіпоздовжньої хвилі, так і для кавзіпоперечної. І для такого випадку ефект екранування *qS*-хвилі є найбільш помітним. Так, на рис. 3.14 зображені форми променів та фронтів цієї хвилі при поступовому її поширенні від джерела збурення. Можемо спостерігати тенденцію відхилення від горизонтальної площини $x_3=0$ при поширенні хвилі в додатному напрямі осі Ox_3 і переміщення всього її фронту в від'ємному напрямі цієї осі. Зазначена особливість найбільш помітна на рис. 3.14,і. В такому випадку хвильовий фронт не досягає площини $x_3=0$ і таким чином вона представляє собою екран та зменшує інтенсивність імпульсу, який переноситься розривною хвилею.

Якщо ж детальніше розглянути поздовжню хвилю, представлену на рис. 3.13, і при умові збільшення значення параметра *m*, то, як показано на рис. 3.15, для неї також наявна суттєва розбіжність променів та перерозподіл енергії в протилежному напрямі до поверхні $x_3=0$. Таким чином, можемо зробити висновок про те, що при поширенні *qP*-хвилі в напрямі збільшення

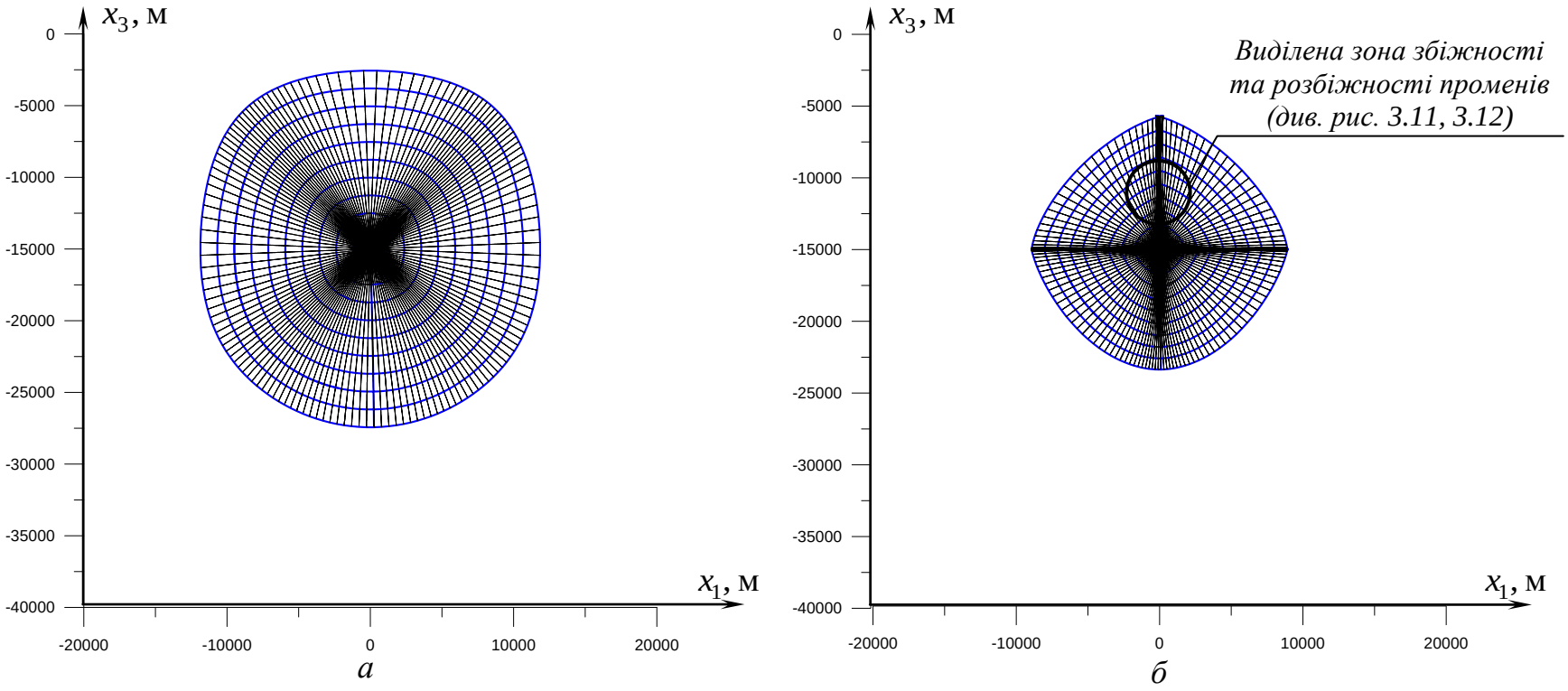


Рисунок 3.9 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $m=\left(-0{,}5+1\cdot10^{-9}x_3^2\right)\mu$ та значеннях $l=-0{,}3\lambda$, $p=-0{,}1(\lambda+2\mu)$

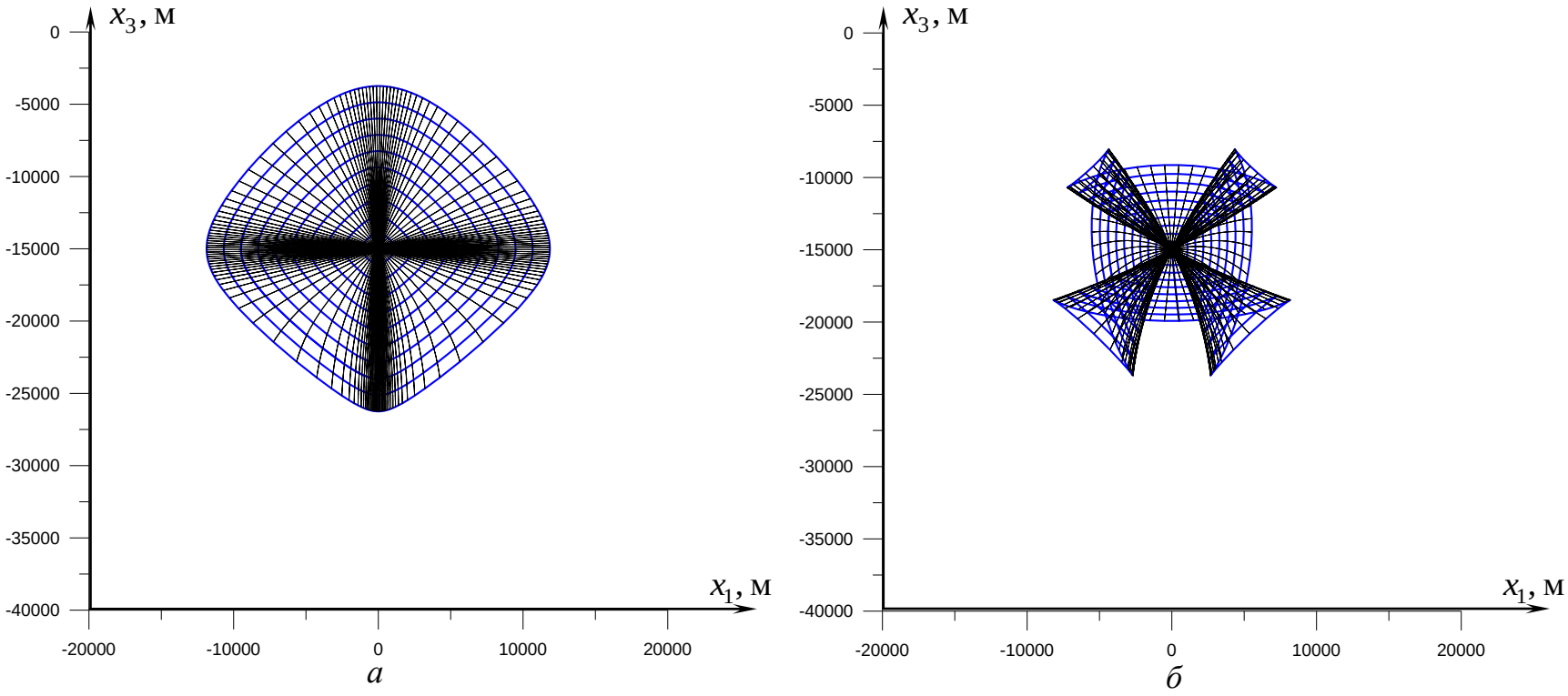


Рисунок 3.10 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $m=\left(0{,}3+1\cdot10^{-9}x_3^2\right)\mu$ та значеннях $l=0{,}5\lambda$, $p=0{,}1\left(\lambda+2\mu\right)$

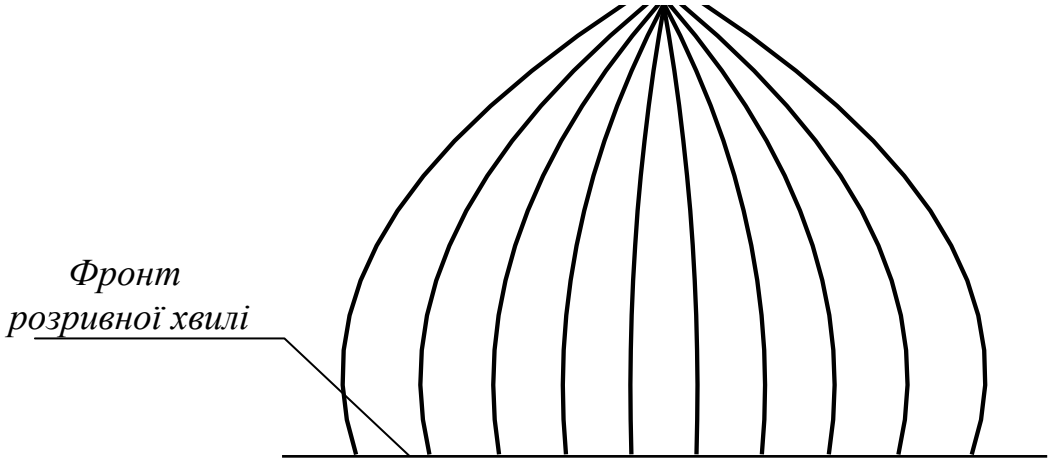


Рисунок 3.11 – Зона геометричної збіжності променів та збільшення інтенсивності S-хвилі (випадок зменшення значення параметра m)

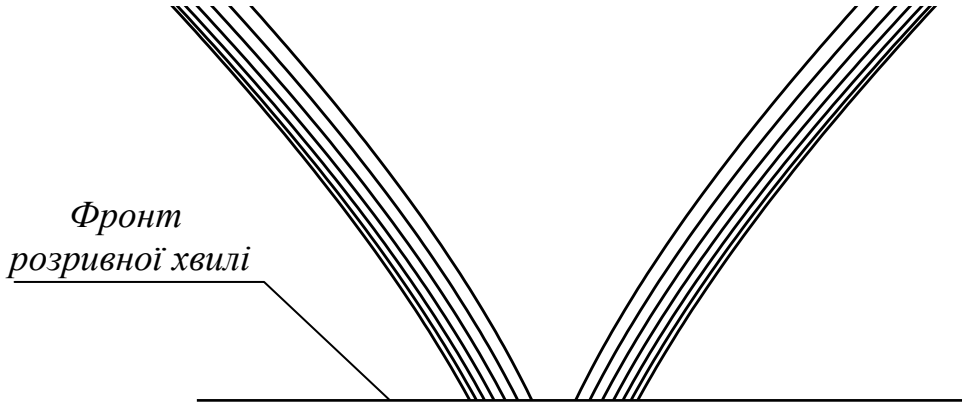


Рисунок 3.12 – Зона геометричної розбіжності (часткового екранування) S-хвилі (випадок зменшення значення параметра m)

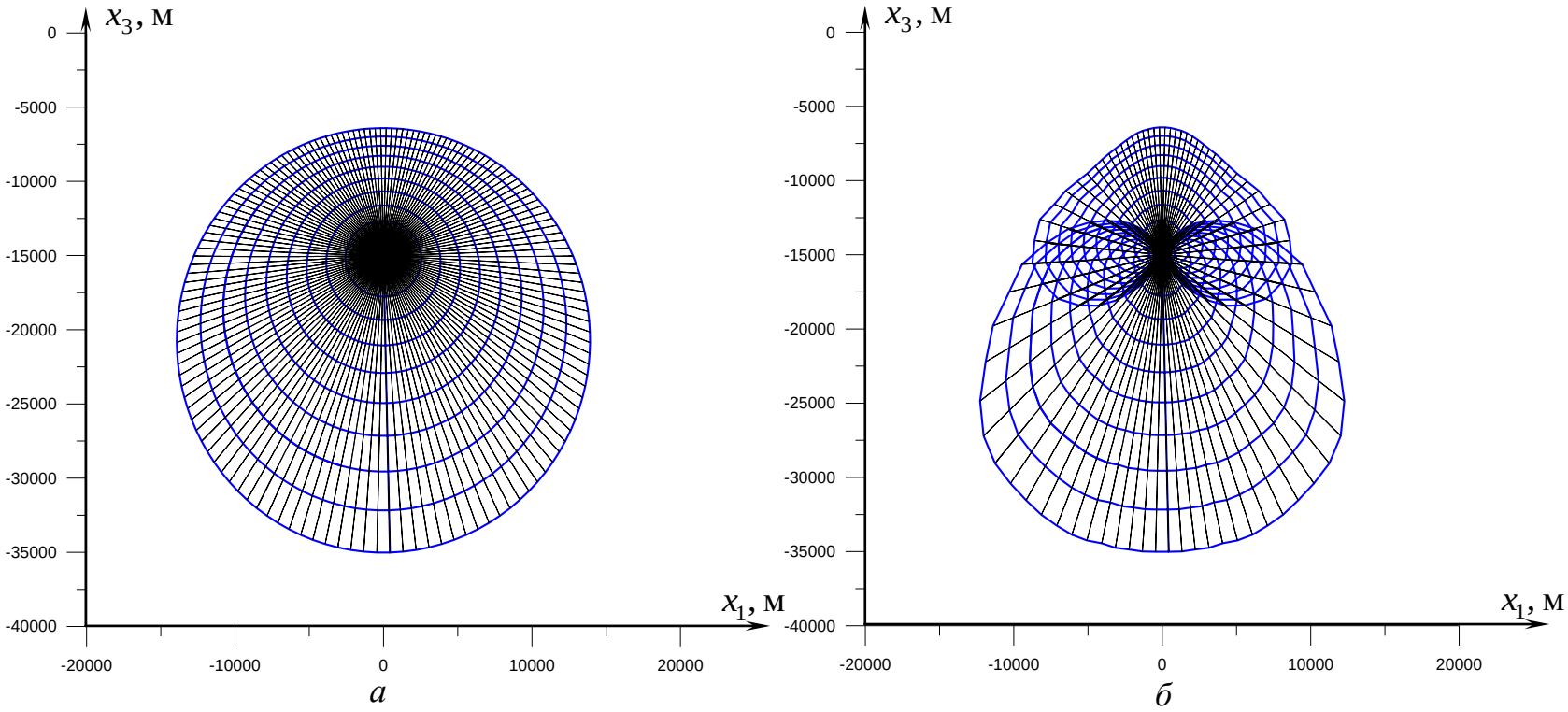


Рисунок 3.13 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $m=\left(0{,}1-5\cdot10^{-6}x_3^2\right)\mu$ та значеннях $l=0{,}3\lambda$, $p=0{,}5\left(\lambda+2\mu\right)$

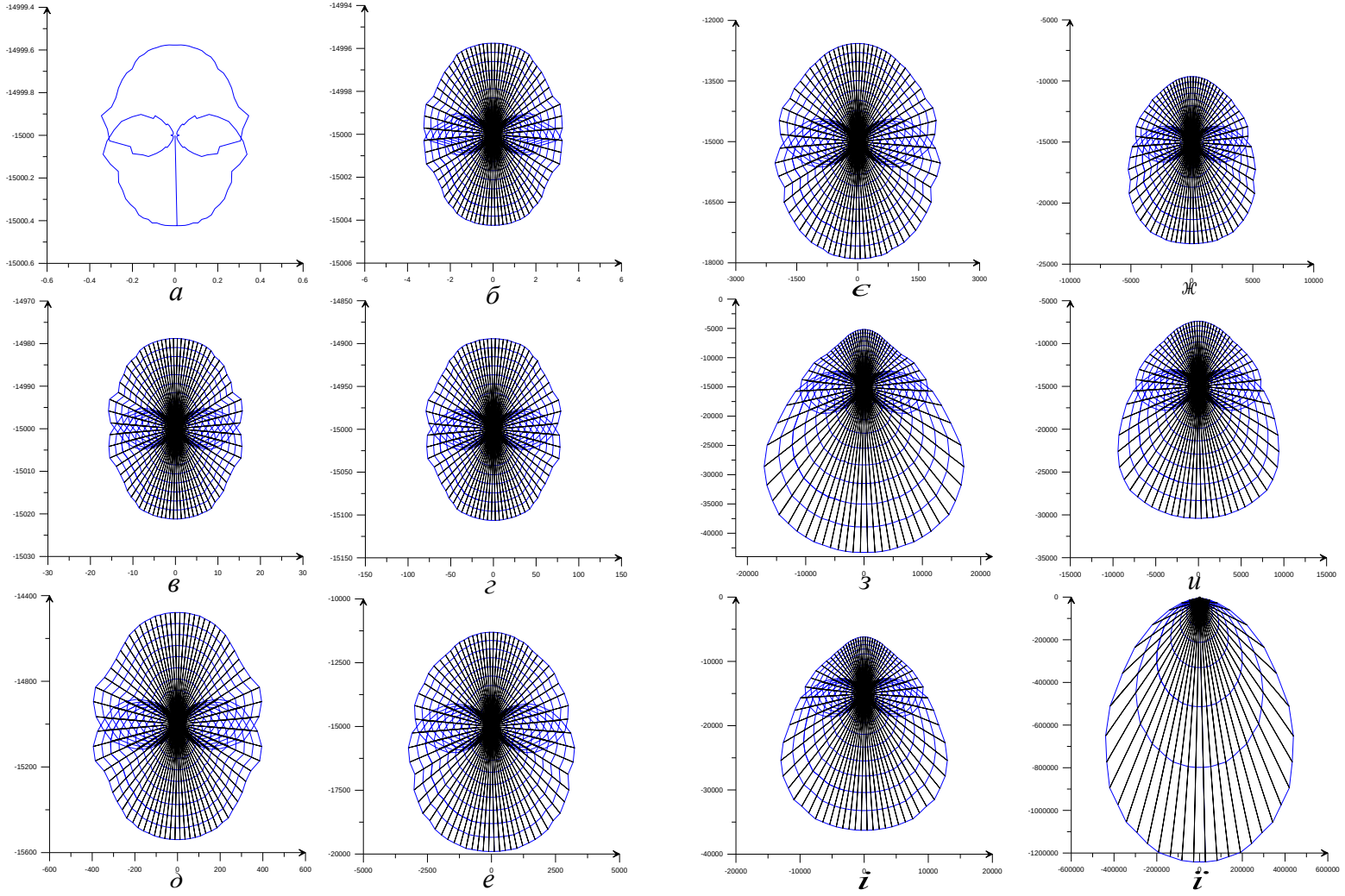


Рисунок 3.14 – Перетворення променів та фронтів qS -хвилі для випадку $m=\left(0{,}1-5\cdot10^{-6}x_3^2\right)\mu$, $l_0=0{,}3$, $p_0=0{,}5$

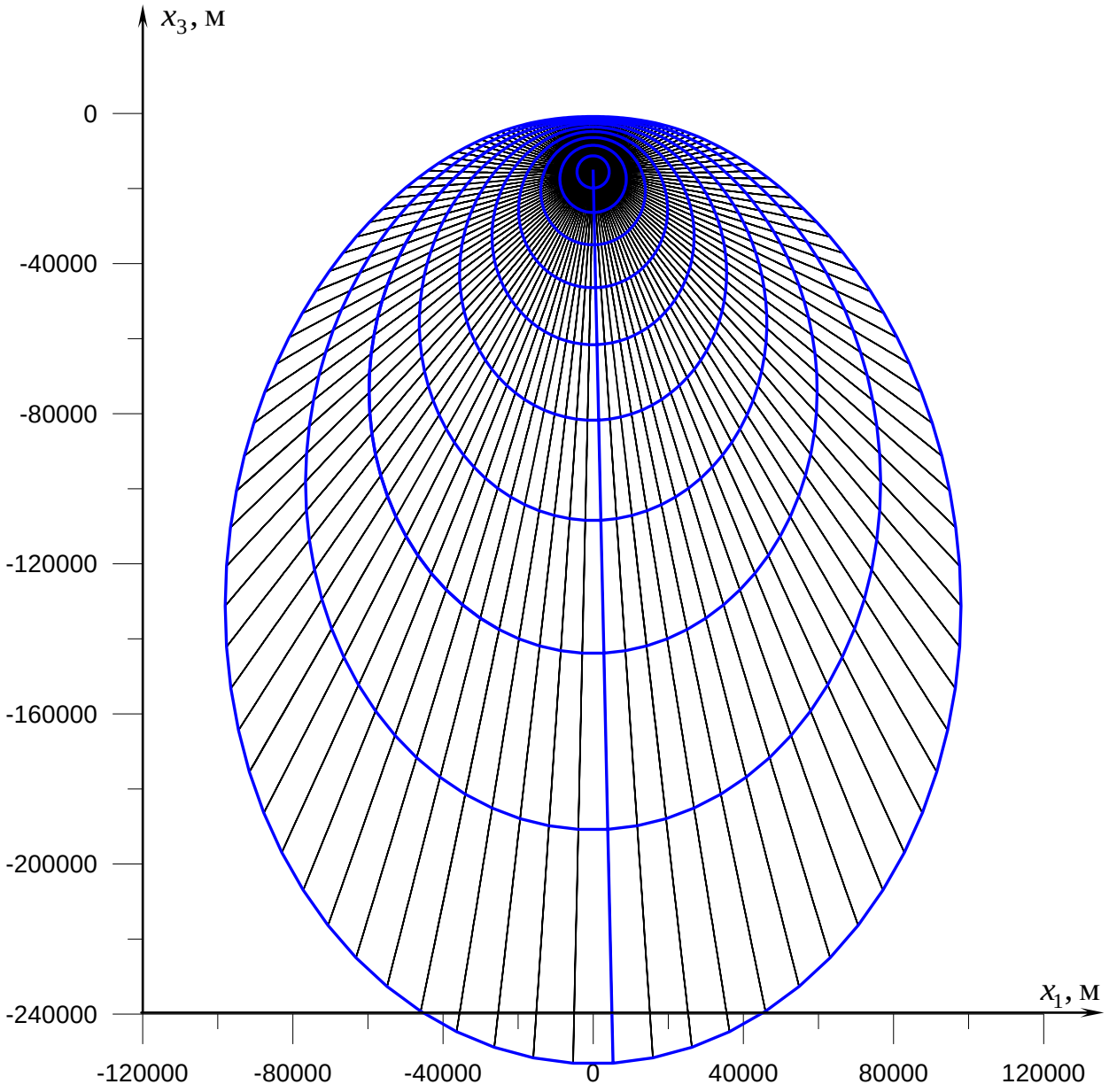


Рисунок 3.15 – Кінцева форма трансформування системи променів та фронтів qP-хвилі для випадку $m=\left(0{,}1-5\cdot10^{-6}x_3^2\right)\mu$, $l_0=0{,}3$, $p_0=0{,}5$.

параметра m промені відхиляються від поверхні $x_3 = 0$, що рівноцінно екрануванню хвилі від такої зони. Аналогічні ефекти спостерігаємо і при $m^0 = -0{,}5$, $l_0 = -0{,}1$ і $p_0 = -0{,}3$ (рис. 3.16).

Істотне трансформування фронтів спостерігається й при зміні параметра p за законом $p = p_0(\lambda + 2\mu) = \left(p^0 + k_p x_3^2\right)(\lambda + 2\mu)$, де $k_p = -1 \cdot 10^{-8}$ м$^{-2}$. Зазначимо, що хоча параметр p і входить лише в один діагональний коефіцієнт матриці (3.2), але його зміна суттєво впливає на виконання умови (3.3) забезпечення додатної визначеності квадратичної форми потенціальної енергії (2.5) елемента пружного середовища.

Також проаналізувавши нерівність (3.4), бачимо, що хоча параметри m і p і належать елементам головної діагоналі матриці (3.2), але зміна параметра m не впливає на виконання умови (3.4).

На рис. 3.17-3.20 зображені сітки променів та фронтів при наступних варіаціях змінних l, m і p: рис. 3.17 – $l = 0{,}1\lambda$, $m = 0{,}5\mu$, $p = \left(0{,}3 - 1 \cdot 10^{-8} x_3^2\right)(\lambda + 2\mu)$; рис. 3.18 - $l = -0{,}3\lambda$, $m = -0{,}1\mu$, $p = \left(-0{,}5 - 1 \cdot 10^{-8} x_3^2\right)(\lambda + 2\mu)$; рис. 3.19 - $l = -0{,}5\lambda$, $m = -0{,}3\mu$, $p = \left(-0{,}1 - 1 \cdot 10^{-8} x_3^2\right)(\lambda + 2\mu)$; рис. 3.20 - $l = -0{,}1\lambda$, $m = -0{,}5\mu$, $p = \left(-0{,}3 - 1 \cdot 10^{-8} x_3^2\right)(\lambda + 2\mu)$. У всіх наведених випадках спостерігаємо ефекти викривлення променів та загальну асиметрію криволінійного контуру фронту уздовж осі Ox_3. Відмітимо, що для *qP*-хвиль прослідковується загальна тенденція зменшення швидкості поширення хвиль вздовж додатного напряму осі Ox_3, тому при подальшому збільшенні значення l промені поступово відхиляються від поверхні $x_3 = 0$. Аналогічні ефекти вже спостерігались у випадку зміни $m = \left(0{,}1 - 5 \cdot 10^{-6} x_3^2\right)\mu$.

Підкреслимо також, що у всіх розглянутих прикладах поширення хвиль в градієнтних середовищах присутні властиві їм ефекти зміни напрямів рефрагуючих променів в напрямах збільшення або зменшення швидкостей

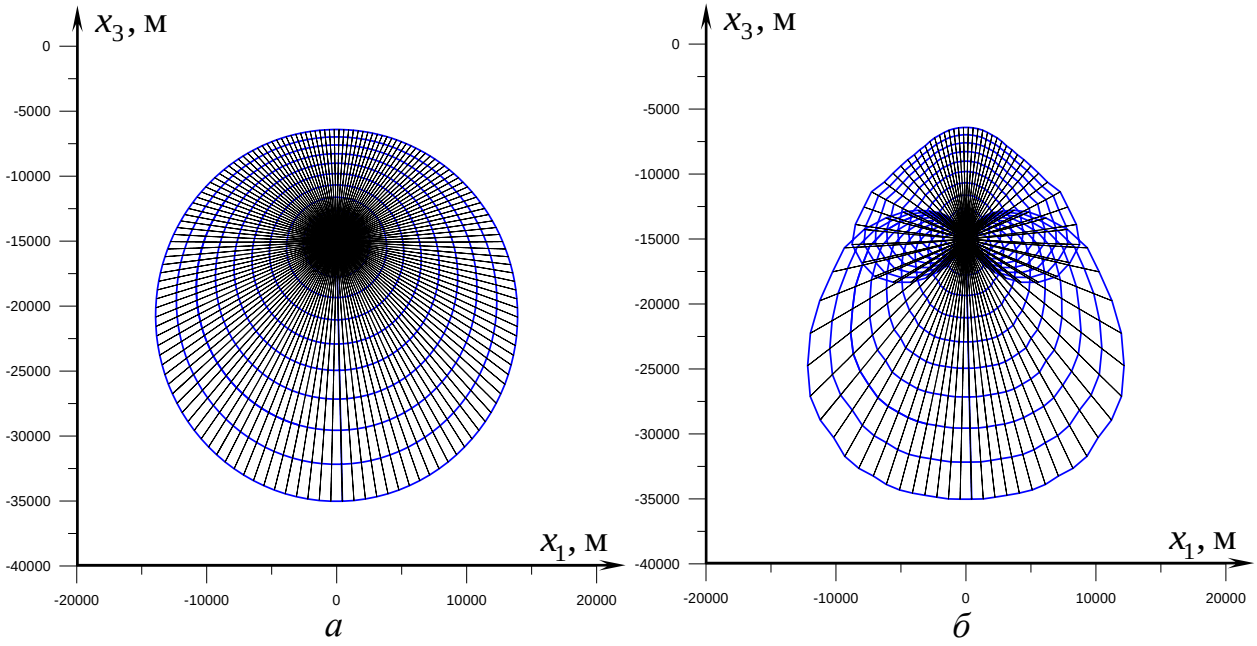


Рисунок 3.16 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $m=\left(-0{,}5-5\cdot10^{-6}x_3^2\right)\mu$ та значеннях $l=-0{,}1\lambda$, $p=-0{,}3\left(\lambda+2\mu\right)$

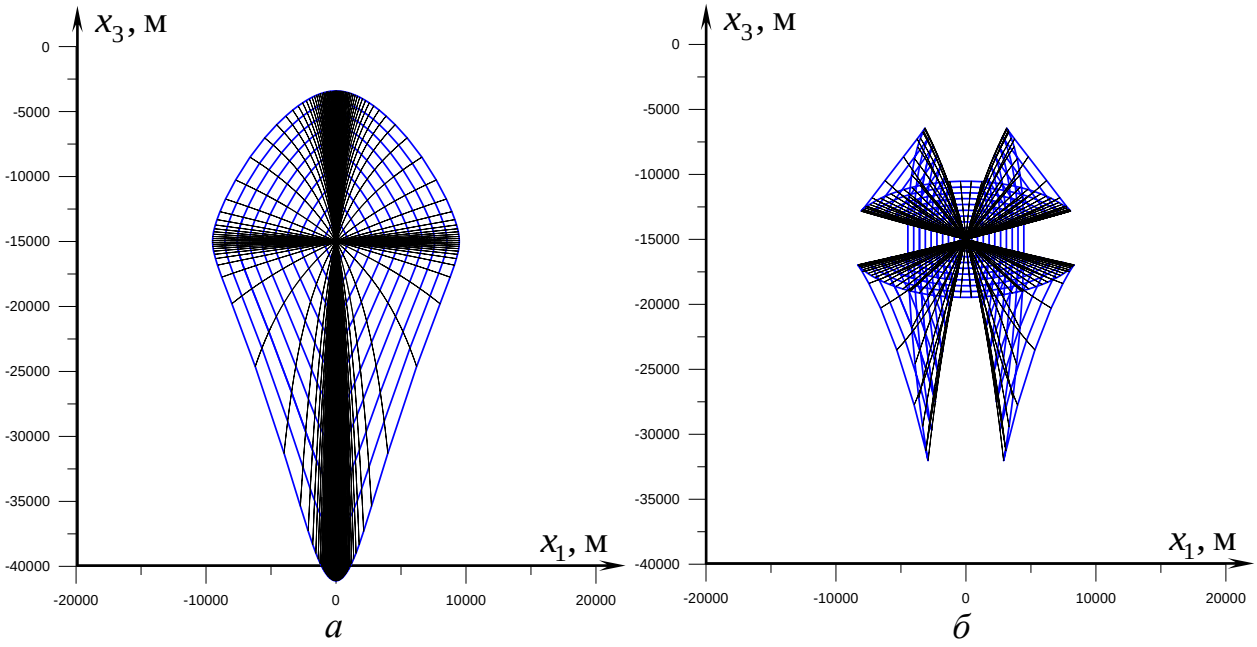


Рисунок 3.17 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $p=\left(0{,}3-1\cdot10^{-8}x_3^2\right)\left(\lambda+2\mu\right)$ та значеннях $l=0{,}1\lambda$, $m=0{,}5\mu$

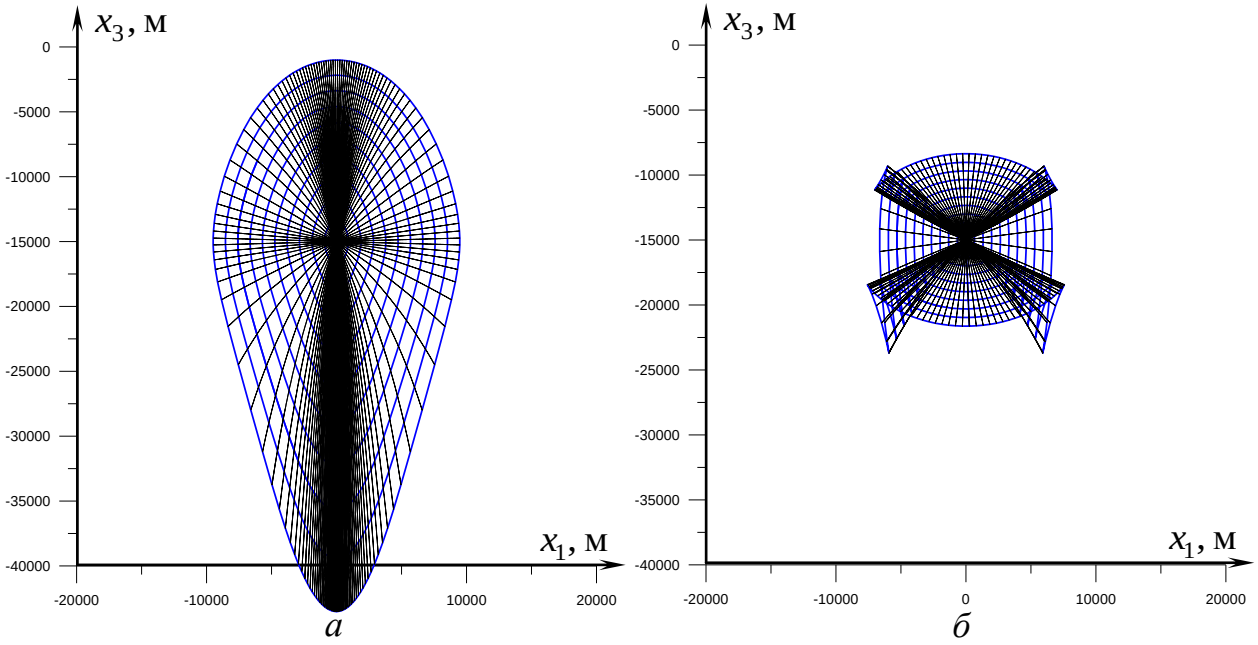


Рисунок 3.18 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $p=\left(-0{,}5-1\cdot10^{-8}x_3^2\right)(\lambda+2\mu)$ та значеннях $l=-0{,}3\lambda$, $m=-0{,}1\mu$

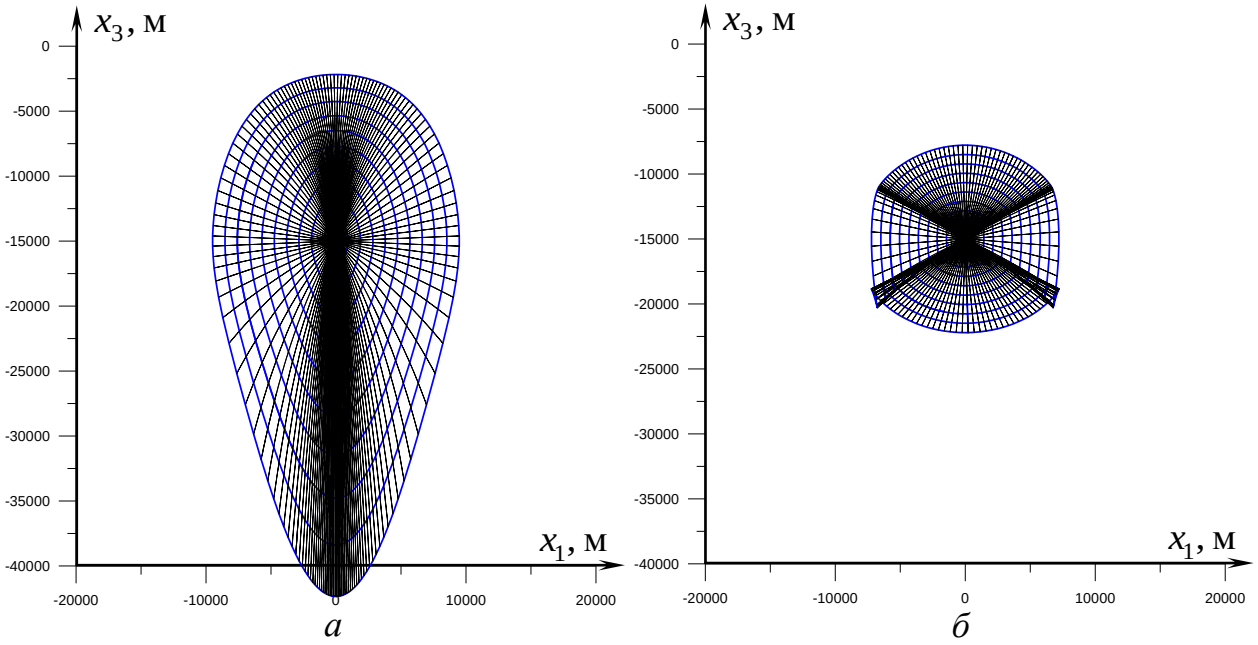


Рисунок 3.19 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $p=\left(-0{,}1-1\cdot10^{-8}x_3^2\right)(\lambda+2\mu)$ та значеннях $l=-0{,}5\lambda$, $m=-0{,}3\mu$

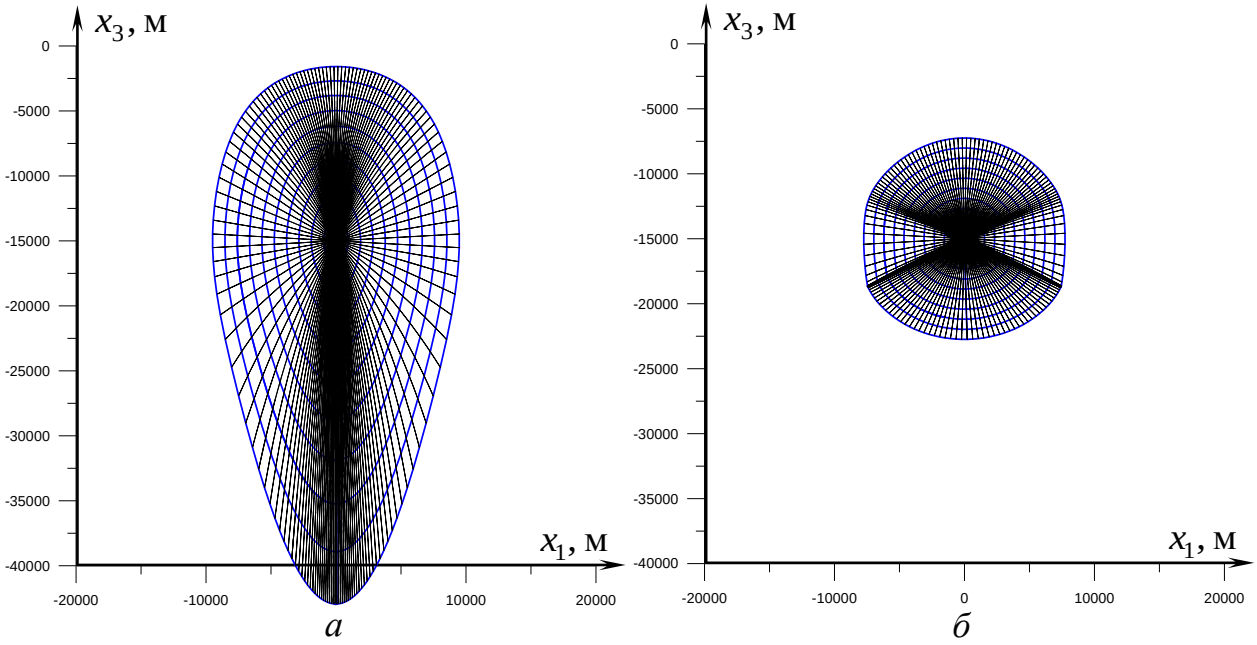


Рисунок 3.20 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $p=\left(-0{,}3-1\cdot10^{-8}x_3^2\right)(\lambda+2\mu)$ та значеннях $l=-0{,}1\lambda$, $m=-0{,}5\mu$

поширення хвиль. Так, на рис. 3.15, 3.17,а − 3.20,а помітно, що рефрагуючі промені повертаються до горизонтальної площини джерела їх збурення під час розповсюдження вгору. І навпаки, зазнають інверсію, тобто збігаються до вертикалі, при поширенні хвилі вниз.

Насамкінець цього пункту зазначимо, що представлені системи променів і фронтів дозволяють оцінити характер зміни напружень під час поширення поверхні їх розриву. Очевидно, що в зонах згущення променів відбувається концентрація напружень, в зонах розходження – їх зменшення. Зазначимо, що подібні дослідження проводились і для $k_l=1\cdot10^{-8}$ м$^{-2}$, але наявність таких вихідних даних провокує появу комплексних коренів при розв’язанні рівняння (2.52).

3.1.2 Випадок зміни елементів тензора пружних сталих за законом тригонометричної функції

Дослідимо ефект перетворення сітки променів та фронтів розривних хвиль в неоднорідному трансверсально-ізотропному пружному середовищі при зміні елементів тензора пружних сталих за тригонометричним законом. Аналогічно випадку представленому в п. 3.1.1, фізичні властивості пружного середовища задамо наступним чином λ=3,4·10^9 Па, μ=1,36·10^{10} Па, ρ=2760 кг/м^3, $m=m_0\mu$, $l=l_0\lambda$, $p=p_0(\lambda+2\mu)$. При цьому джерело збурення розривних хвиль має координати $x_1=0$, $x_3=-15000$ м. Нехай серед основних характеристик середовища параметр l змінюється за законом

$$l=l_0\lambda=\left(l^0+\tau_l\cos\left(k_l x_3\right)\right)\lambda. \qquad (3.6)$$

Тоді елемент A матриці (3.5) набуде вигляду:

$$A=\begin{pmatrix}\lambda+2\mu & \lambda & \lambda-l\\ \lambda & \lambda+2\mu-p & \lambda-l\\ \lambda-l & \lambda-l & \lambda+2\mu\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda+2\mu & \lambda & \lambda-\left(l^0+\tau\cos\left(k_l x_3\right)\right)\lambda\\ \lambda & \lambda+2\mu-p & \lambda-\left(l^0+\tau\cos\left(k_l x_3\right)\right)\lambda\\ \lambda-\left(l^0+\tau\cos\left(k_l x_3\right)\right)\lambda & \lambda-\left(l^0+\tau\cos\left(k_l x_3\right)\right)\lambda & \lambda+2\mu\end{pmatrix}.$$

Припустимо, що $l=\left(0{,}5+1{,}5\cos\left(5\cdot10^{-4}x_3\right)\right)\lambda$, m_0=0,3, p_0=0,1. На рис. 3.21 зображені форми перерізів фронтів *qP*- та *qS*-хвиль, ініційованих миттєвим прикладанням до поверхні сферичної порожнини рівномірно розподіленого нормального тиску. Як і у випадку зміни параметра анізотропії l за законом квадратичної функції прослідковано тенденцію збіжності променів квазіпоздовжньої *qP*-хвилі уздовж осі симетрії Ox_3 та утворення геометричних особливостей на поверхні фронту квазіпоперечної *qS*-хвилі.

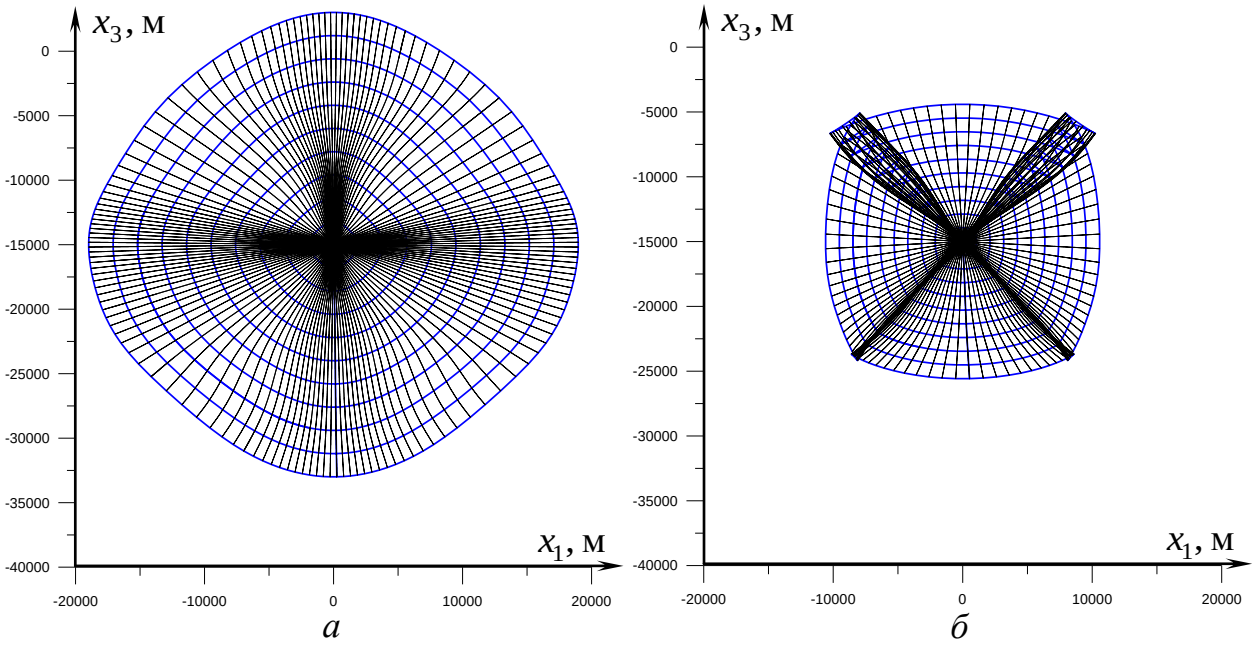


Рисунок 3.21 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $l=\left(0{,}5+1{,}5\cos\left(5\cdot10^{-4}x_3\right)\right)\lambda$ та значеннях $m=0{,}3\mu$, $p=0{,}1\left(\lambda+2\mu\right)$

Наочніше зазначені особливості спостерігаються на рис. 3.22 при значеннях l^0=0,3, m_0=0,5, p_0=0,1. Якщо ж коефіцієнтам m_0, p_0 та доданку l^0 надати від'ємних значень, то можемо виділити два види поширення хвиль. Так, до першого різновиду відносяться випадки при яких фронти *qP*-хвиль витягуються вздовж осі Ox_3. Це спостерігається при l^0=–0,3, m_0=–0,1, p_0=–0,5 (рис. 3.23) та l^0=–0,1, m_0=–0,3, p_0=–0,5 (рис. 3.24). Що ж стосується особливостей поширення хвиль другого виду, то тут фронти симетрично поширюються відносно $x_1=0$ та $x_3=-15000$, а при наближенні до площини $x_3=0$ промені все більше і більше відхиляються. Таким явищем знову підтверджуються екрануючі властивості неоднорідного пружного середовища за рахунок викривлення хвильових променів на неоднорідностях його механічних властивостей. Системи променів та фронтів другого виду зображені на рис. 3.25 (l^0=–0,5, m_0=–0,3, p_0=–0,1), рис. 3.26 (l^0=–0,1, m_0=–0,5, p_0=–0,3), рис. 3.27 (l^0=–0,3, m_0=–0,5, p_0=–0,1).

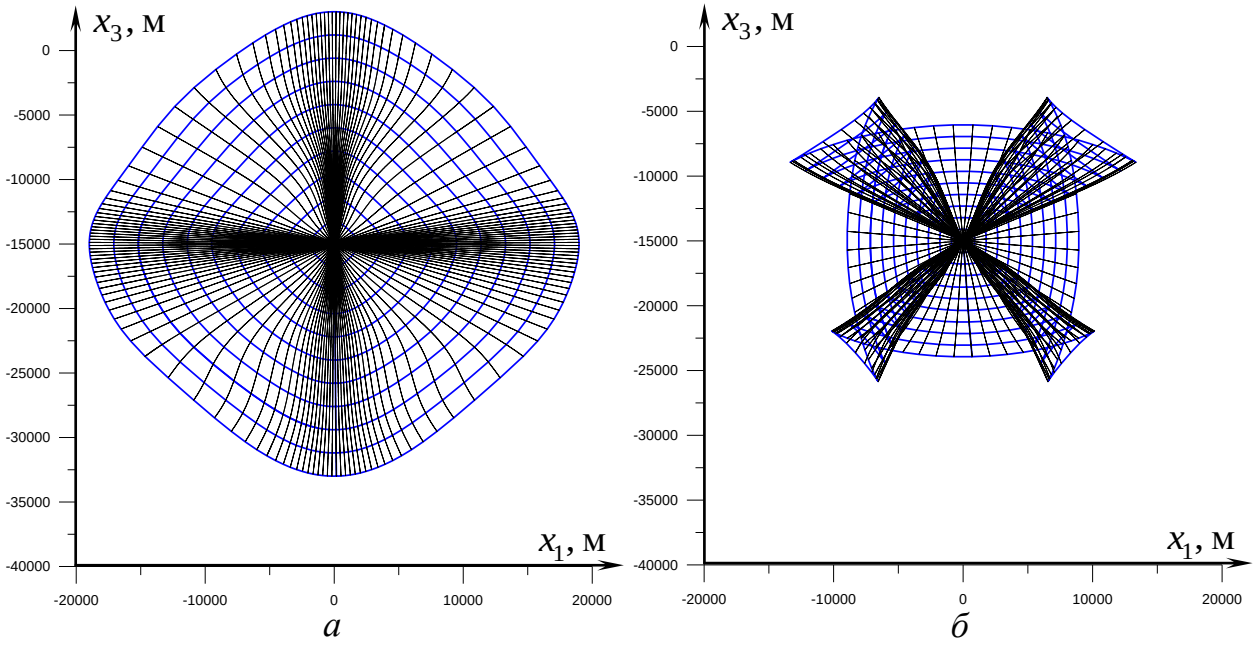


Рисунок 3.22 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $l=\left(0{,}3+1{,}5\cos\left(5\cdot10^{-4}x_3\right)\right)\lambda$ та значеннях $m=0{,}5\mu$, $p=0{,}1\left(\lambda+2\mu\right)$

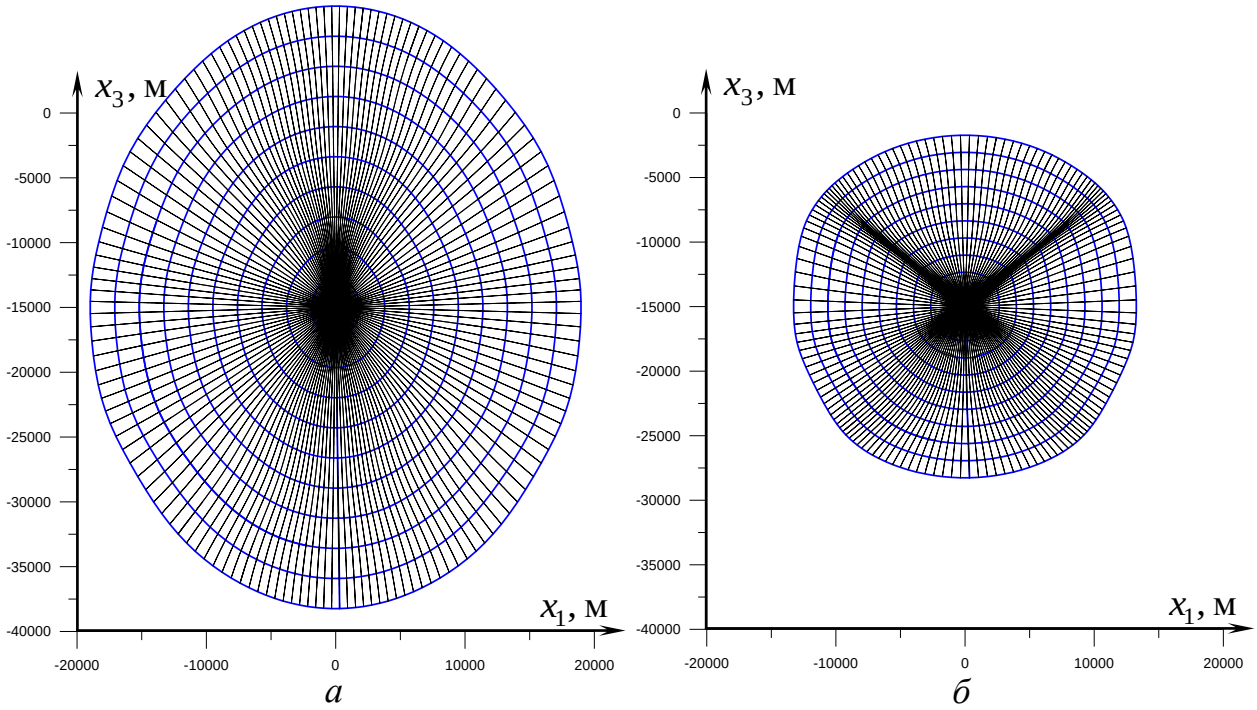


Рисунок 3.23 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $l=\left(-0{,}3+1{,}5\cos\left(5\cdot10^{-4}x_3\right)\right)\lambda$ та значеннях $m=-0{,}1\mu$, $p=-0{,}5\left(\lambda+2\mu\right)$

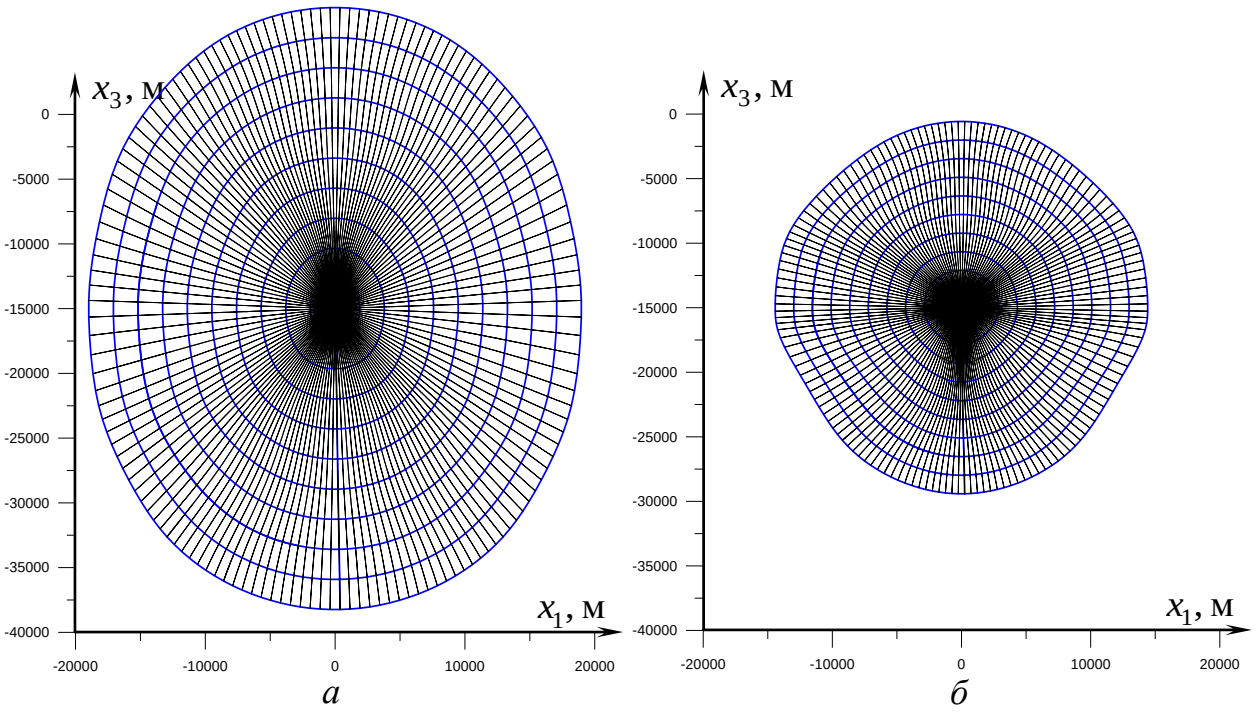


Рисунок 3.24 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $l=\left(-0{,}1+1{,}5\cos\left(5\cdot10^{-4}x_3\right)\right)\lambda$ та значеннях $m=-0{,}3\mu$, $p=-0{,}5\left(\lambda+2\mu\right)$

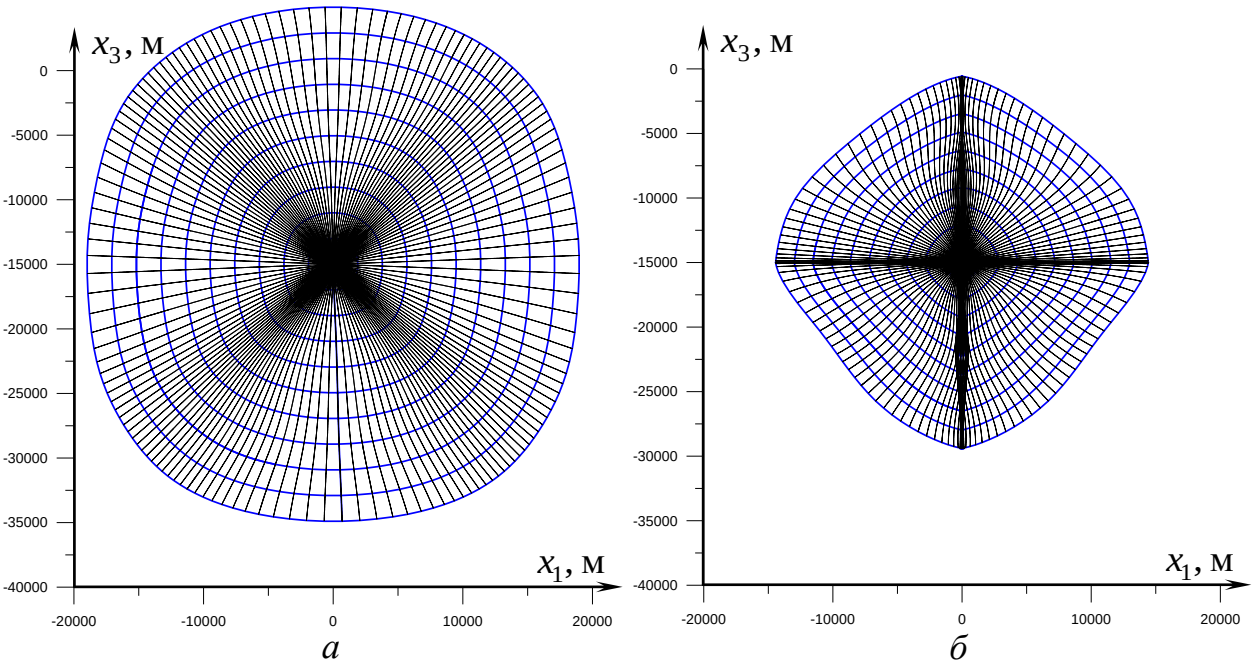


Рисунок 3.25 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $l=\left(-0{,}5+1{,}5\cos\left(5\cdot10^{-4}x_3\right)\right)\lambda$ та значеннях $m=-0{,}3\mu$, $p=-0{,}1\left(\lambda+2\mu\right)$

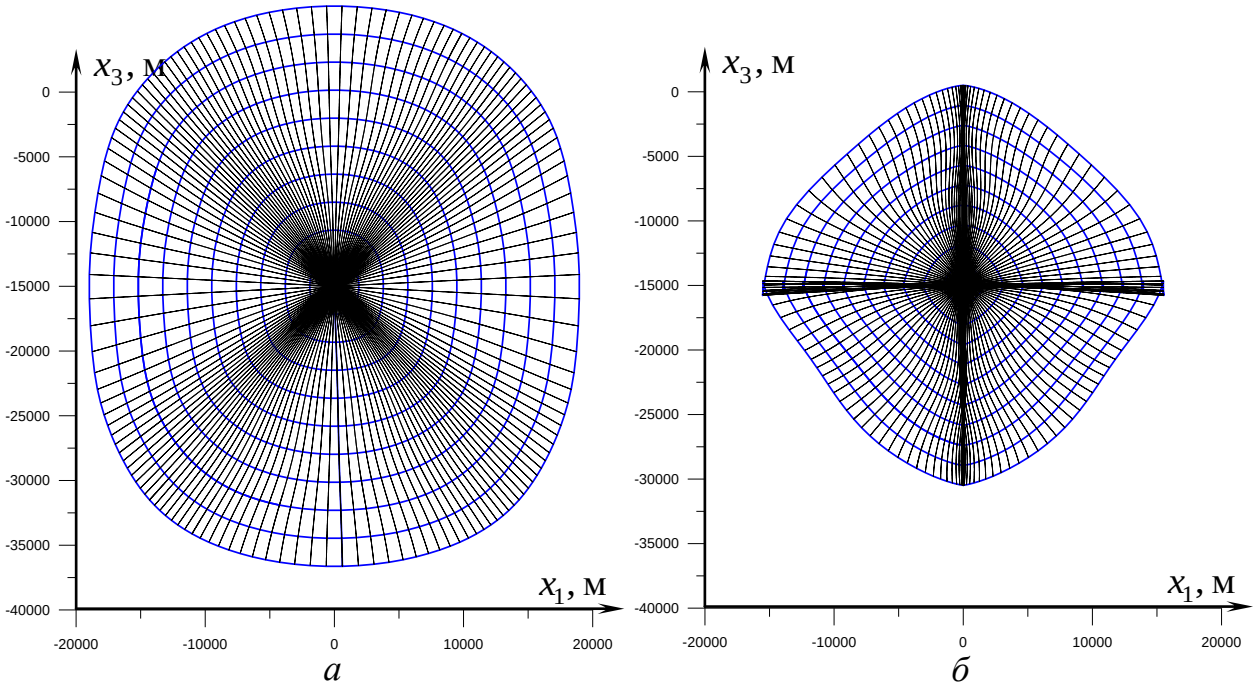


Рисунок 3.26 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $l=\left(-0{,}1+1{,}5\cos\left(5\cdot10^{-4}x_3\right)\right)\lambda$ та значеннях $m=-0{,}5\mu$, $p=-0{,}3\left(\lambda+2\mu\right)$

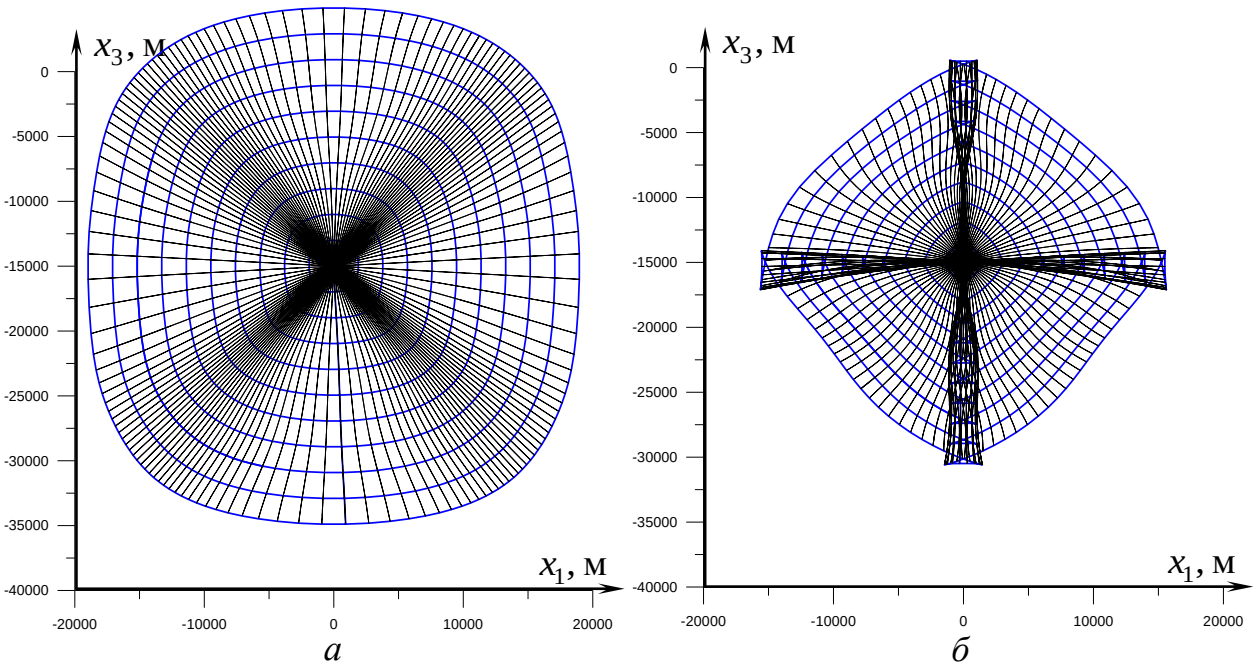


Рисунок 3.27 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $l=\left(-0{,}3+1{,}5\cos\left(5\cdot10^{-4}x_3\right)\right)\lambda$ та значеннях $m=-0{,}5\mu$, $p=-0{,}1\left(\lambda+2\mu\right)$

Для подальшого дослідження цього явища в законі зміни l залишимо незмінним значення коефіцієнта $\tau_l = 1{,}5$, а k_l збільшимо до $k_l = 1 \cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$, тим самим зменшимо період тригонометричної функції. Для такого випадку, при l^0=0,3, m_0=0,5, p_0=0,1 сітку променів та фронтів *qP*- і *qS*-хвиль зображено на рис. 3.28. Помічаємо, що промені *qP*-хвилі зберігають свою криволінійність та збіжність до прямої $x_1 = 0$.

Варіюючи значеннями параметрів l^0, m_0, p_0 при незмінних $k_l = 1 \cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$ та $\tau_l = 1{,}5$, отримаємо відповідно на рис. 3.29-3.31 графічні зображення поширення хвиль. Так, рис. 3.29 відповідає даним l^0=–0,5, m_0=–0,3, p_0=–0,1, рис. 3.30 - l^0=–0,1, m_0=–0,5, p_0=–0,3, а рис. 3.31 - l^0=–0,3, m_0=–0,5, p_0=–0,1. Що стосується особливостей променів квазіпоздовжніх хвиль то вони нічим не відрізняються від випадків, коли коефіцієнт k_l був рівним $k_l = 5 \cdot 10^{-4}$ м$^{-1}$. Однак варто відмітити складнішу геометрію променів квазіпоперечних хвиль та утворення каустик на поверхнях їх фронтів (рис. 3.29,б, рис. 3.30,б, рис. 3.31,б). Якщо ж надати коефіцієнту τ_l від'ємного значення $\tau_l = -1.5$, а k_l залишити рівним $1 \cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$, то така зміна вихідних даних якісно не вплине на особливості поширення розривних хвиль. Підтвердженням цього факту є зображення сітки променів та фронтів на рис. 3.32, 3.33.

Нехай тепер у виразі (3.6) для l коефіцієнт $k_l = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ м$^{-1}$, тобто ще зменшимо період тригонометричної функції $\cos(k_l x_3)$. В цьому випадку на сітці променів та фронтів (рис. 3.34,а та рис. 3.35,а) можливо спостерігати яскраво виражену збіжність променів в додатному і від'ємному напрямках як осі Ox_3, так і Ox_1. При від'ємних значеннях l^0, m_0, p_0 промені *qP*-хвиль стають більш прямолінійними, а криві променевих швидкостей квазіпоперечних хвиль, як було вже зазначено вище, мають складнішу геометрію в порівнянні з формами променів квазіпоздовжних хвиль та є дуже чутливими до змін параметрів середовища (рис. 3.36-3.3.39).

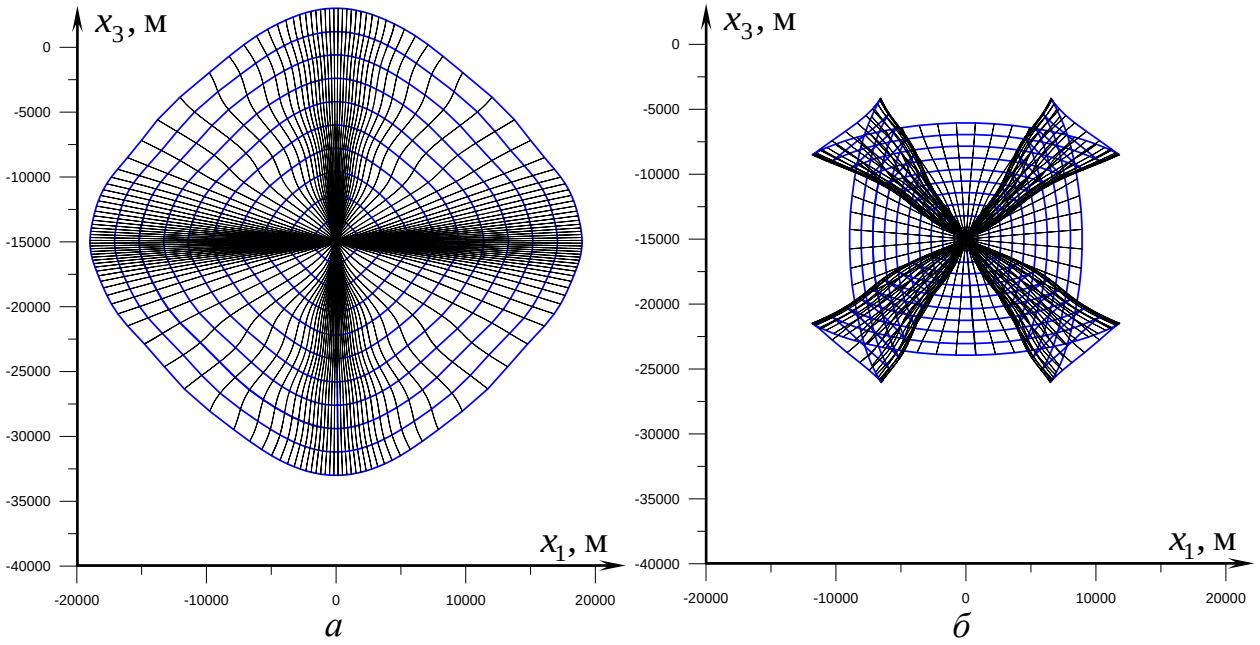


Рисунок 3.28 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $l=\left(0{,}3+1{,}5\cos\left(1\cdot10^{-3}x_3\right)\right)\lambda$ та значеннях $m=0{,}5\mu$, $p=0{,}1\left(\lambda+2\mu\right)$

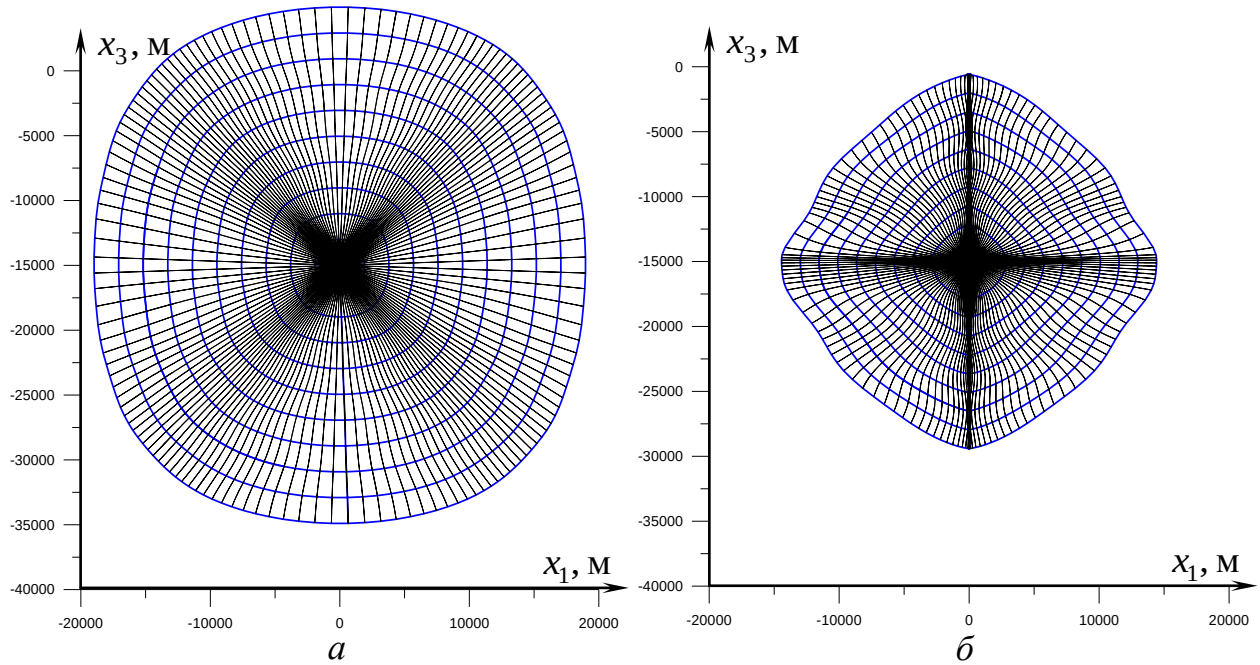
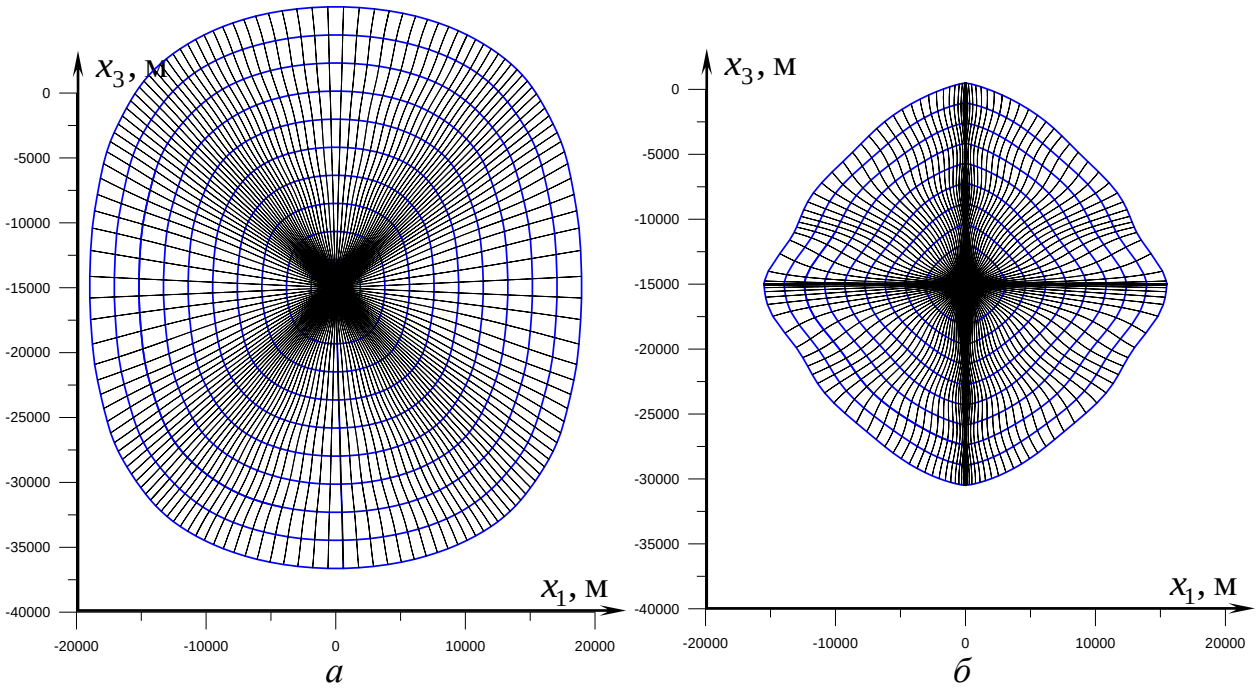
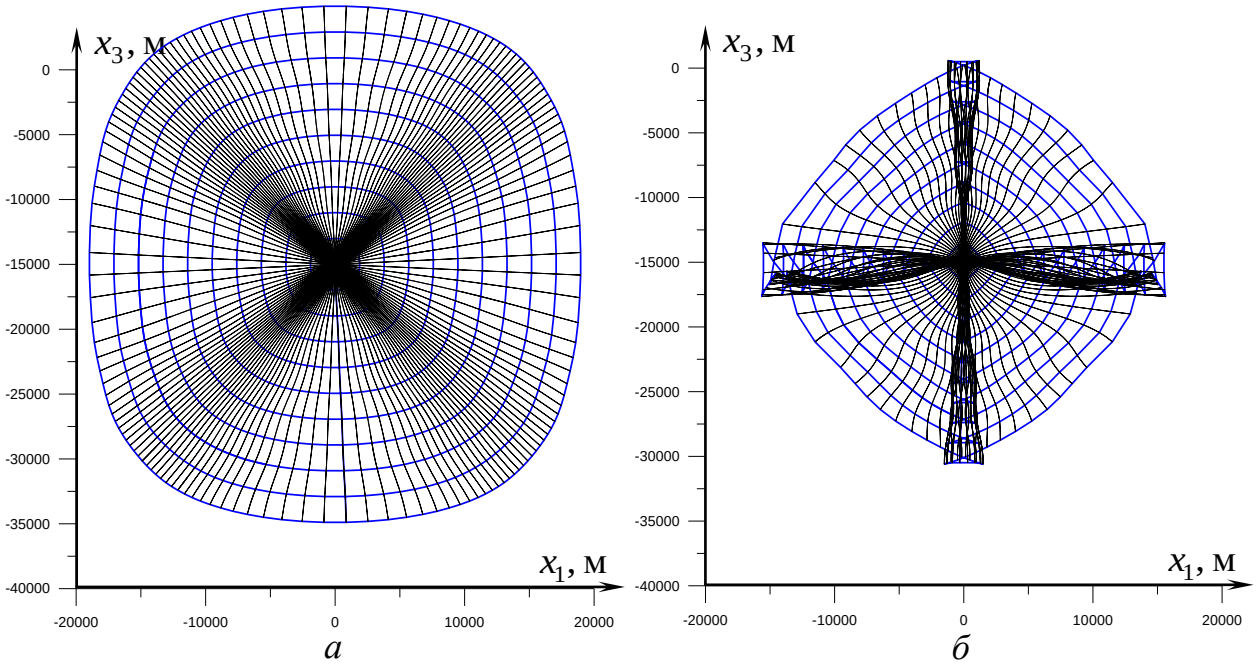


Рисунок 3.29 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $l=\left(-0{,}5+1{,}5\cos\left(1\cdot10^{-3}x_3\right)\right)\lambda$ та значеннях $m=-0{,}3\mu$, $p=-0{,}1\left(\lambda+2\mu\right)$



а *б*

Рисунок 3.30 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $l=\left(-0{,}1+1{,}5\cos\left(1\cdot10^{-3}x_3\right)\right)\lambda$ та значеннях $m=-0{,}5\mu$, $p=-0{,}3\left(\lambda+2\mu\right)$



а *б*

Рисунок 3.31 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $l=\left(-0{,}3+1{,}5\cos\left(1\cdot10^{-3}x_3\right)\right)\lambda$ та значеннях $m=-0{,}5\mu$, $p=-0{,}1\left(\lambda+2\mu\right)$

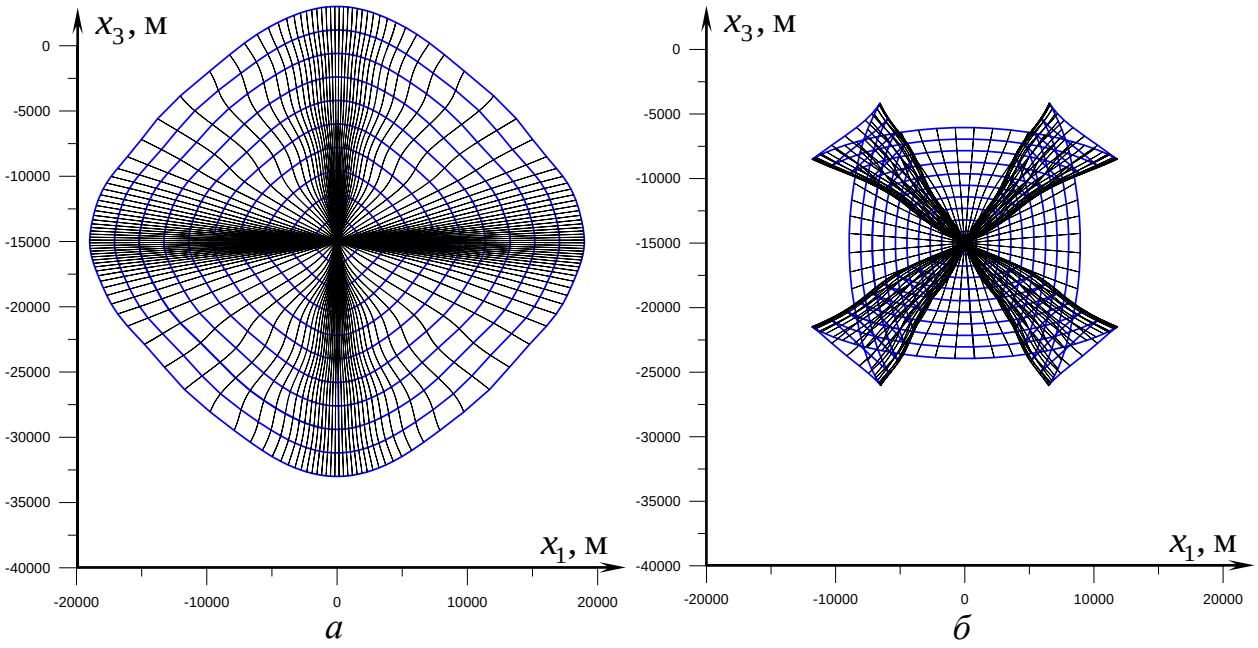


Рисунок 3.32 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $l=\left(0{,}3-1{,}5\cos\left(1\cdot10^{-3}x_3\right)\right)\lambda$ та значеннях $m=0{,}5\mu$, $p=0{,}1\left(\lambda+2\mu\right)$

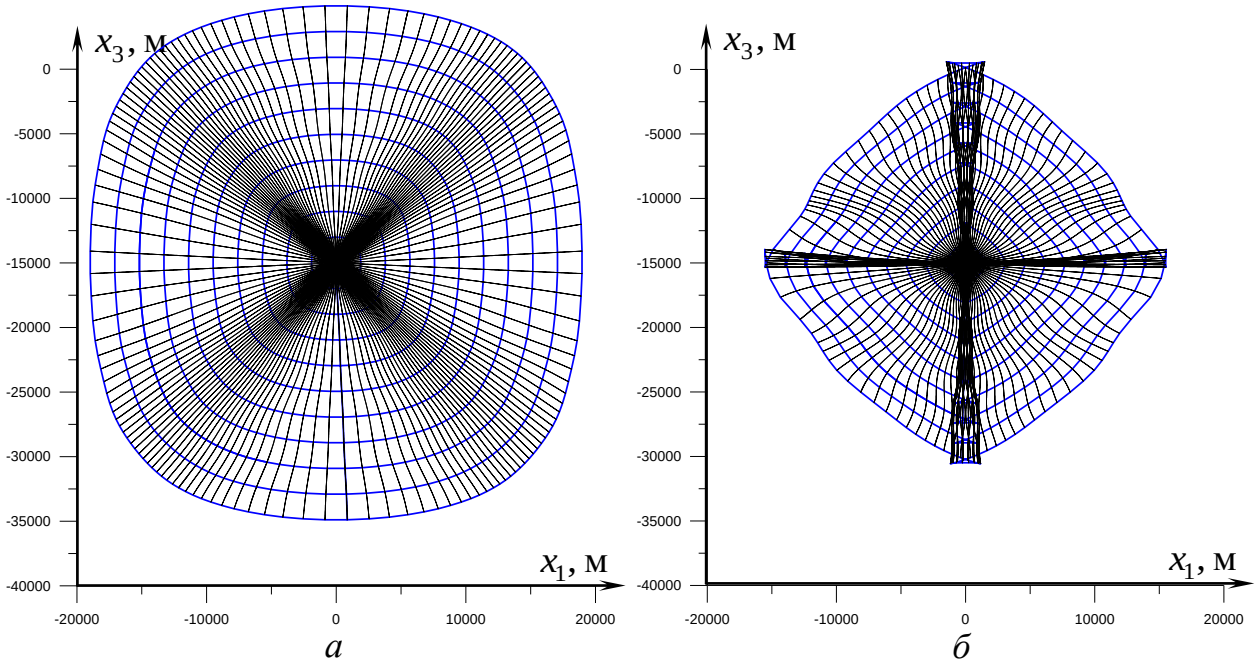
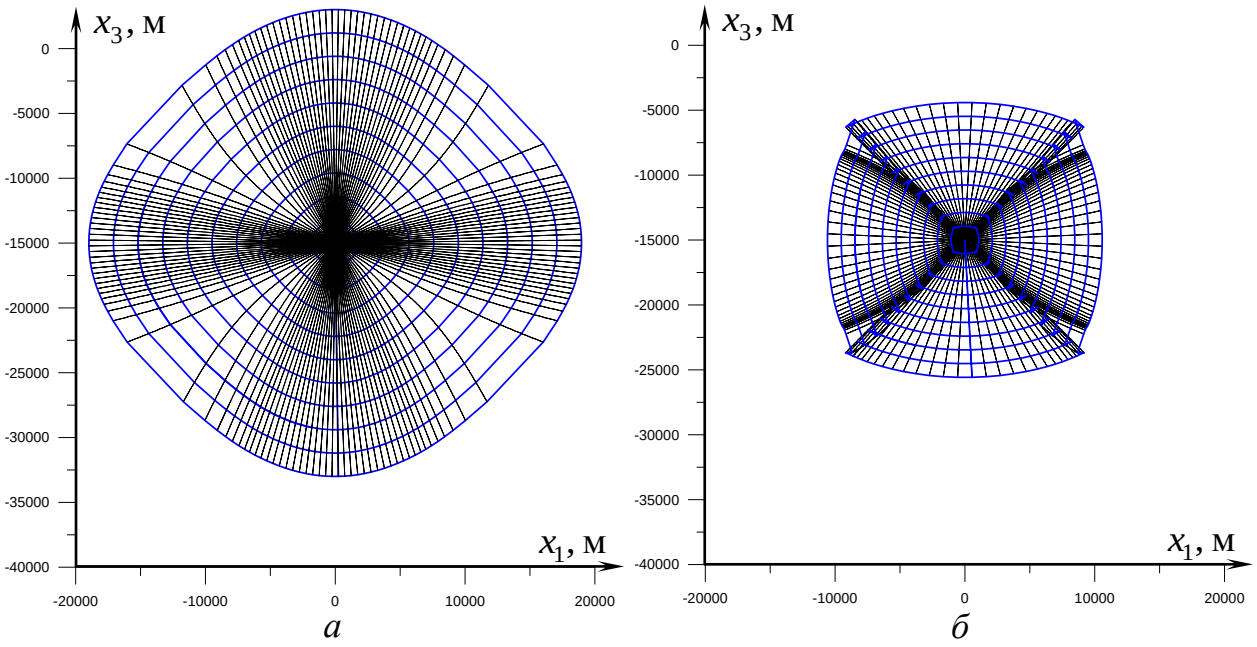
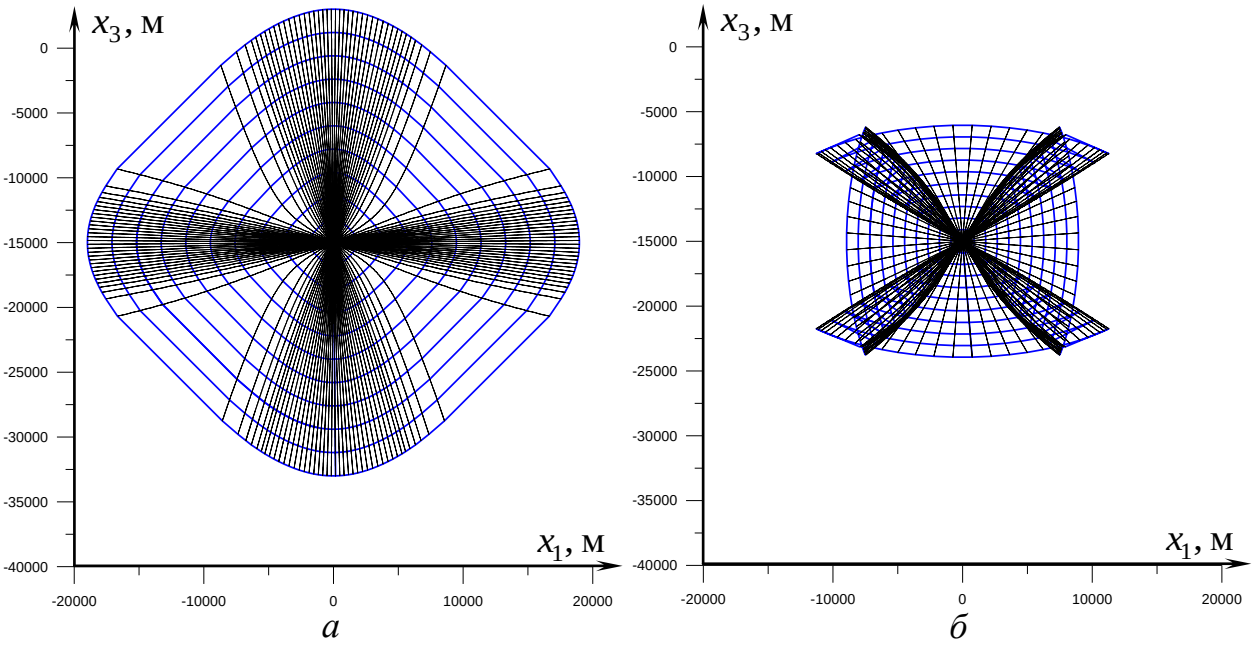


Рисунок 3.33 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $l=\left(-0{,}3-1{,}5\cos\left(1\cdot10^{-3}x_3\right)\right)\lambda$ та значеннях $m=-0{,}5\mu$, $p=-0{,}1\left(\lambda+2\mu\right)$



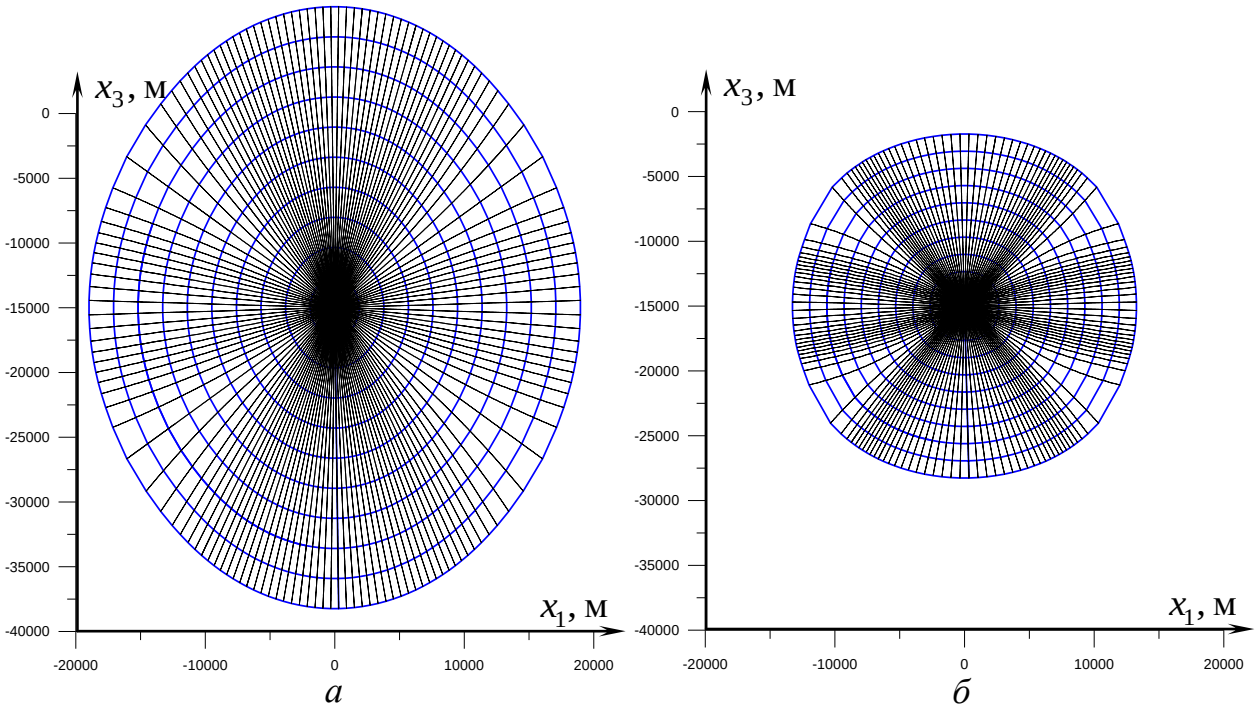
а *б*

Рисунок 3.34 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $l=\left(0{,}5+1{,}5\cos\left(2{,}5\cdot10^{-2}x_3\right)\right)\lambda$ та значеннях $m=0{,}3\mu$, $p=0{,}1(\lambda+2\mu)$



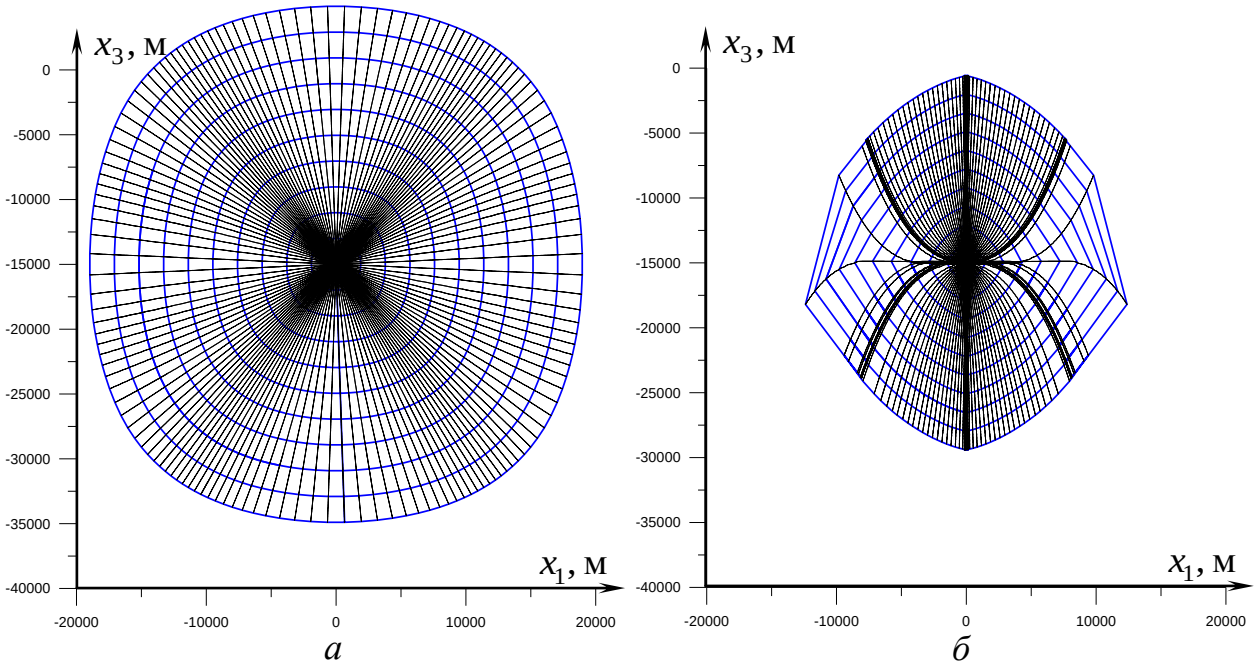
а *б*

Рисунок 3.35 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $l=\left(0{,}3+1{,}5\cos\left(2{,}5\cdot10^{-2}x_3\right)\right)\lambda$ та значеннях $m=0{,}5\mu$, $p=0{,}1(\lambda+2\mu)$



а *б*

Рисунок 3.36 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $l=\left(-0{,}3+1{,}5\cos\left(2{,}5\cdot10^{-2}x_3\right)\right)\lambda$ та значеннях $m=-0{,}1\mu$, $p=-0{,}5\left(\lambda+2\mu\right)$



а *б*

Рисунок 3.37 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $l=\left(-0{,}5+1{,}5\cos\left(2{,}5\cdot10^{-2}x_3\right)\right)\lambda$ та значеннях $m=-0{,}3\mu$, $p=-0{,}1\left(\lambda+2\mu\right)$

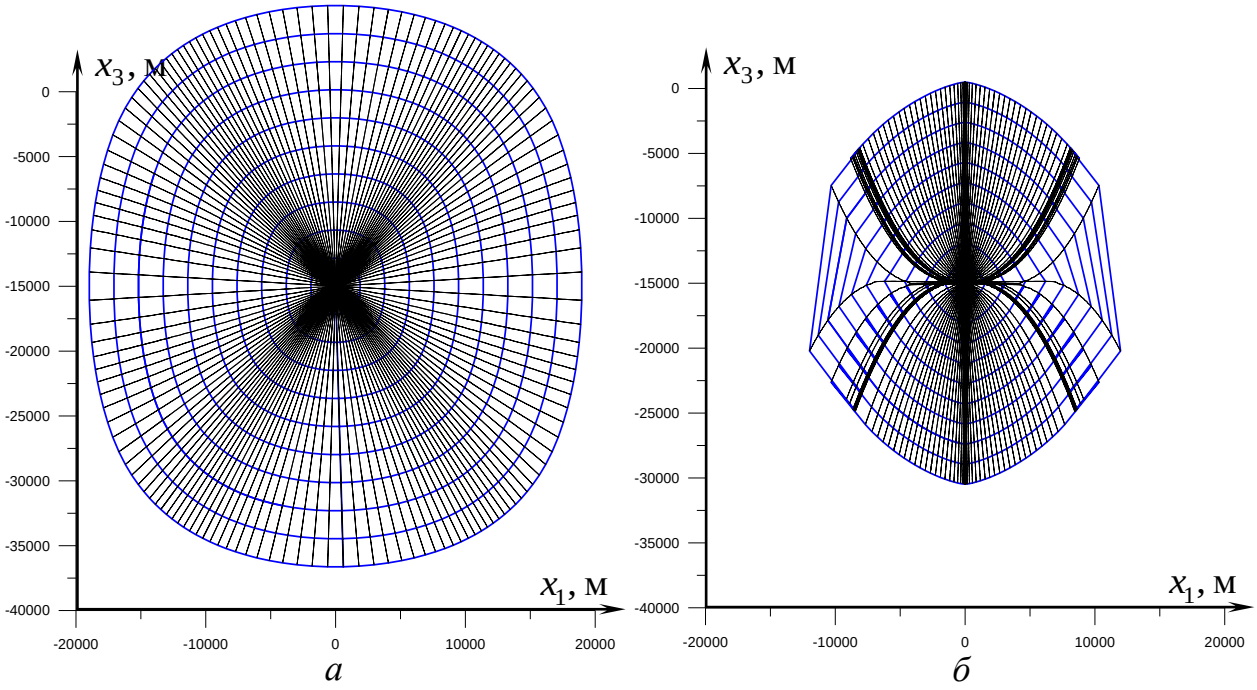


Рисунок 3.38 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $l=\left(-0{,}1+1{,}5\cos\left(2{,}5\cdot10^{-2}x_3\right)\right)\lambda$ та значеннях $m=-0{,}5\mu$, $p=-0{,}3\left(\lambda+2\mu\right)$

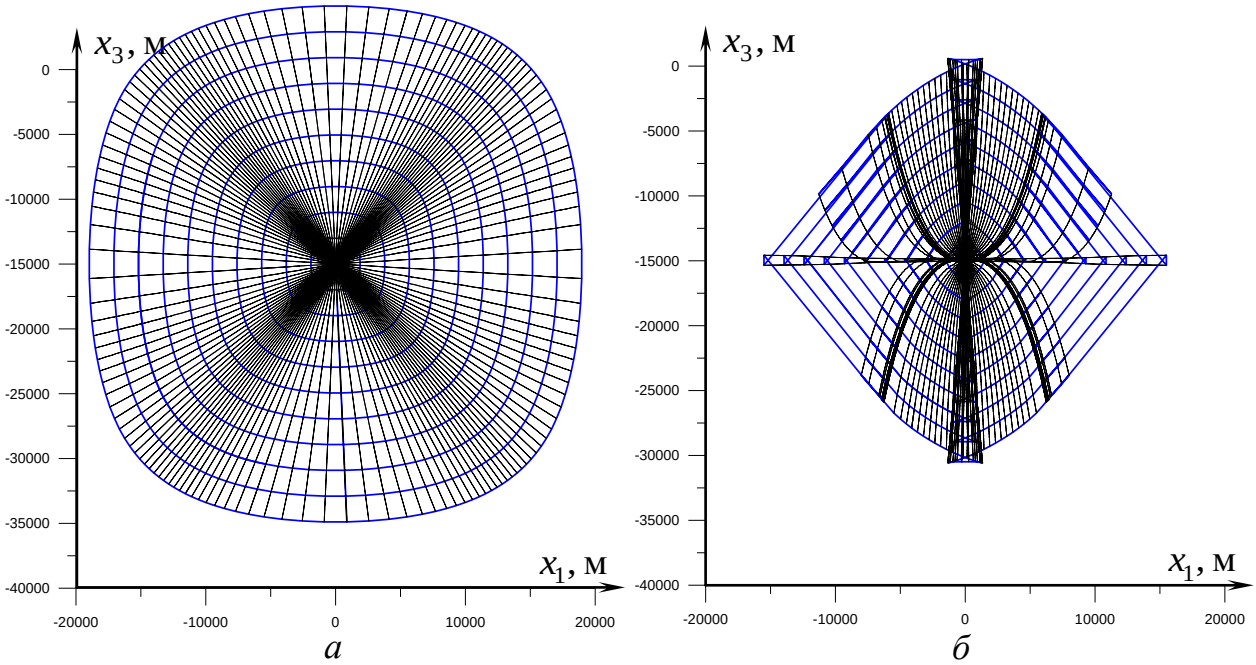


Рисунок 3.39 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $l=\left(-0{,}3+1{,}5\cos\left(2{,}5\cdot10^{-2}x_3\right)\right)\lambda$ та значеннях $m=-0{,}5\mu$, $p=-0{,}1\left(\lambda+2\mu\right)$

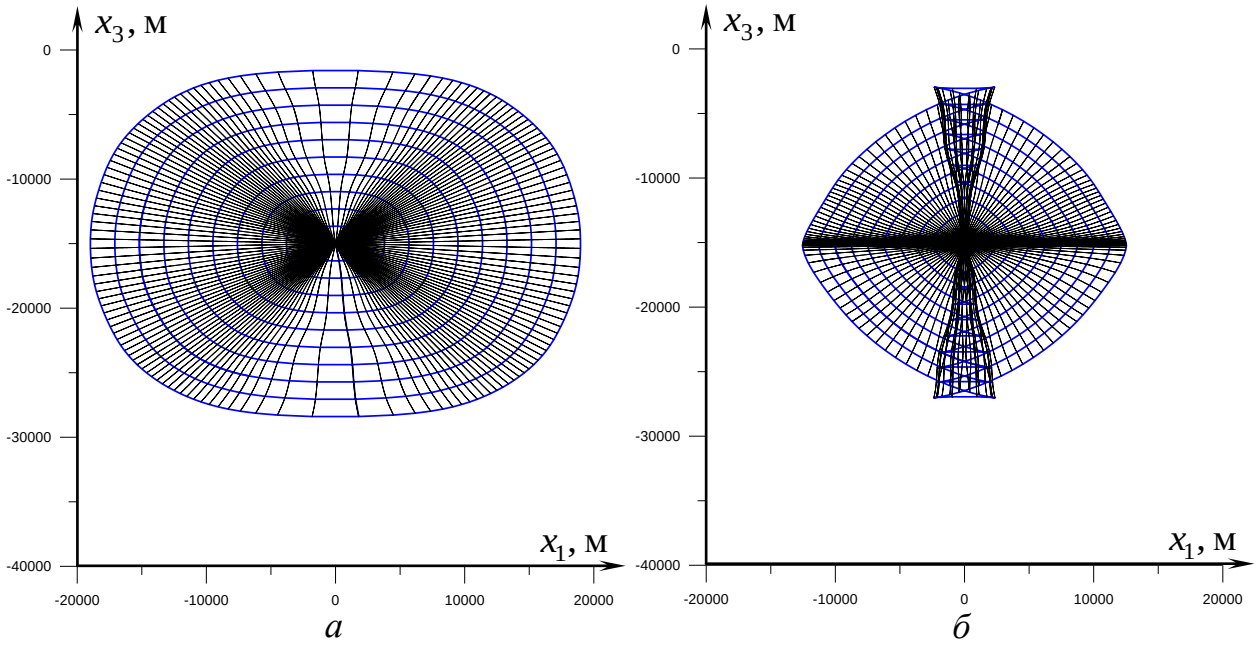
Прослідкуємо вплив зміни параметра m за законом тригонометричної функції $m=\left(m^0+\tau_m\cos(k_m x_3)\right)\mu$ на перебудову системи променів та фронтів. В цьому випадку елемент B матриці (3.5) набуде вигляду

$$B=\begin{pmatrix}\mu-m & 0 & 0\\ 0 & \mu & 0\\ 0 & 0 & \mu-m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu-\left(m^0+\tau_m\cos(k_m x_3)\right)\mu & 0 & 0\\ 0 & \mu & 0\\ 0 & 0 & \mu-\left(m^0+\tau_m\cos(k_m x_3)\right)\mu\end{pmatrix}.$$

Так, нехай $m=\left(m^0+0{,}1\cos\left(1\cdot10^{-3}x_3\right)\right)\mu$, m^0=0,1, l_0=0,3, p_0=0,5. Тоді, як показано на рис. 3.40,а, стає помітним відхилення променів qP-хвилі при наближенні до площини $x_3=0$, а на поверхні фронтів qS-хвилі - утворення каустик. А якщо m^0=–0,1, l_0=–0,3, p_0=–0,5 та m^0=–0,1, l_0=–0,5, p_0=–0,3, то, як випливає з рис. 3.41 і 3.42, відповідно, промені квазіпоздовжніх хвиль є більш прямолінійними і їх швидкість поширення є більшою ніж у випадку відміченому вище (рис. 3.40).

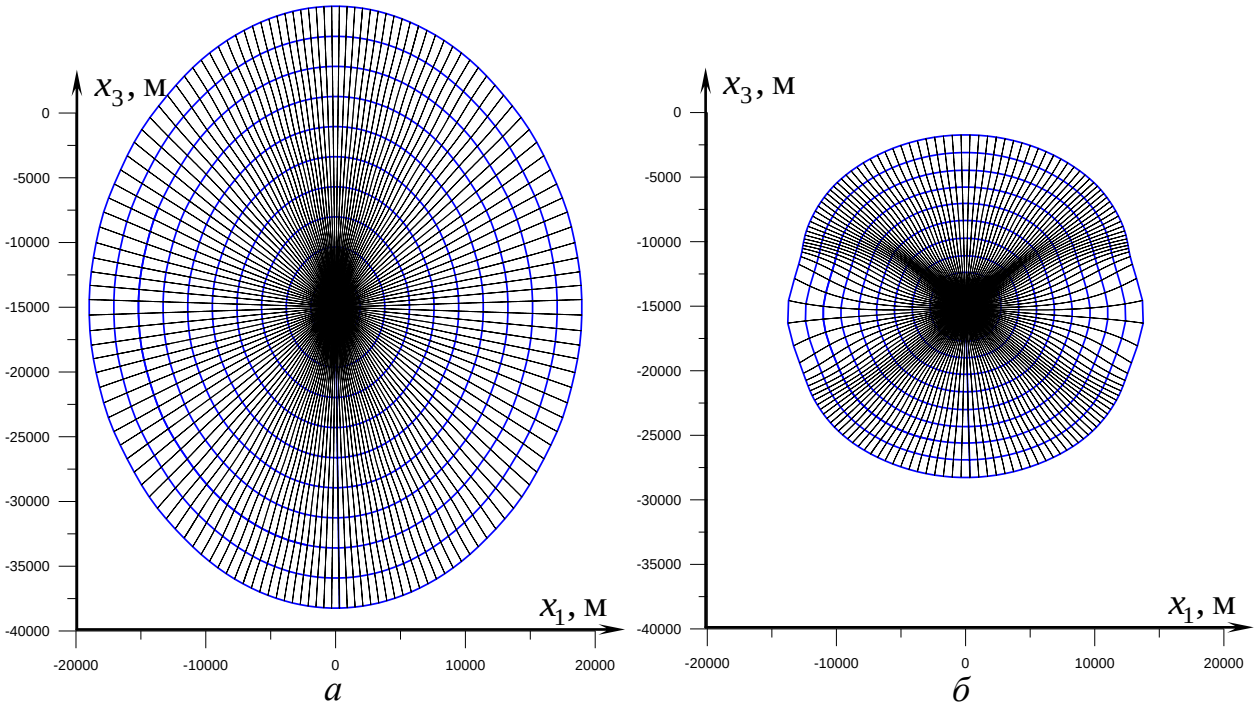
У випадку, коли параметр m змінюється за законом $m=\left(m^0+0{,}5\cos\left(1\cdot10^{-3}x_3\right)\right)\mu$, при m^0=0,1, l_0=0,3, p_0=0,5 або при m^0=0,1, l_0=0,5, p_0=0,3, промені qP-хвилі стають більш криволінійними, а фронти перестають бути опуклими (рис. 3.43,а, 3.44,а).

При цьому фронти qS-хвилі настільки спотворюються, що каустики накладаються одна на одну (рис. 3.43,б). В цьому випадку в рамках лінійної теорії пружності інтенсивності хвиль необмежено зростають. Зазначимо, що при наявності такого закону зміни параметра можна виділити два види поширення qP-хвиль. Так, в першому випадку, при m^0=0,3, l_0=0,5, p_0=0,1 (рис. 3.45), m^0=0,5, l_0=0,1, p_0=0,3 (рис. 3.46), прослідковується видовження контуру фронту вздовж осі Ox_1, та згущення променів в околі прямої $x_3=-15000$. Відмітимо, якщо τ_m надати від'ємного значення $\tau_m=-0{,}5$, то така поведінка променів стає більш очевидною. Так, на рис. 3.47,а і рис. 3.48,а, спостерігаємо збіжність променів вздовж осі Ox_1 та зменшення



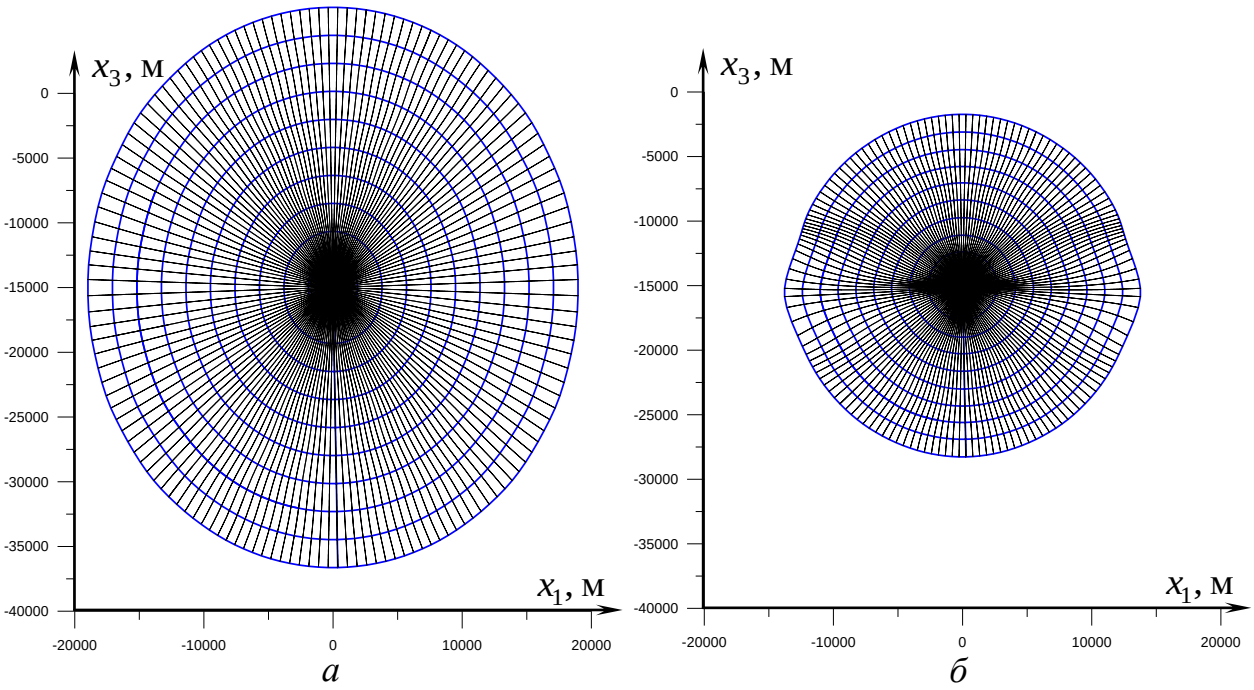
а *б*

Рисунок 3.40 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $m=\left(0{,}1+0{,}1\cos\left(1\cdot10^{-3}x_3\right)\right)\mu$ та значеннях $l=0{,}3\lambda$, $p=0{,}5\left(\lambda+2\mu\right)$



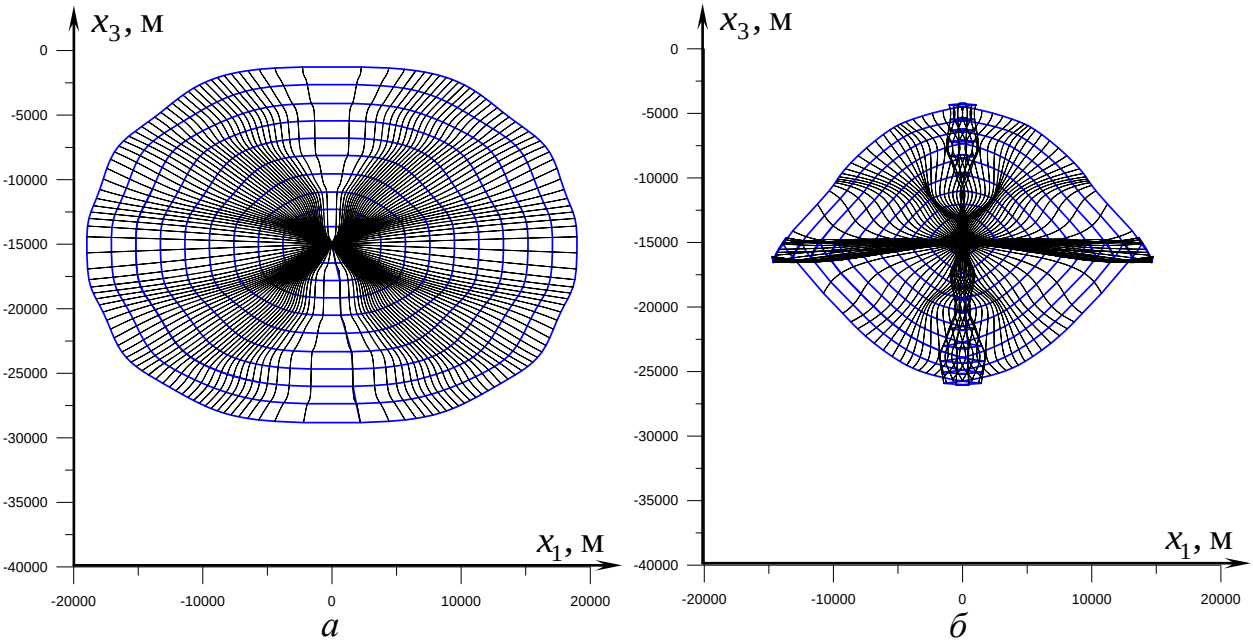
а *б*

Рисунок 3.41 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $m=\left(-0{,}1+0{,}1\cos\left(1\cdot10^{-3}x_3\right)\right)\mu$ та значеннях $l=-0{,}3\lambda$, $p=-0{,}5\left(\lambda+2\mu\right)$



а *б*

Рисунок 3.42 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $m=\left(-0{,}1+0{,}1\cos\left(1\cdot10^{-3}x_3\right)\right)\mu$ та значеннях $l=-0{,}5\lambda$, $p=-0{,}3\left(\lambda+2\mu\right)$



а *б*

Рисунок 3.43 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $m=\left(0{,}1+0{,}5\cos\left(1\cdot10^{-3}x_3\right)\right)\mu$ та значеннях $l=0{,}3\lambda$, $p=0{,}5\left(\lambda+2\mu\right)$

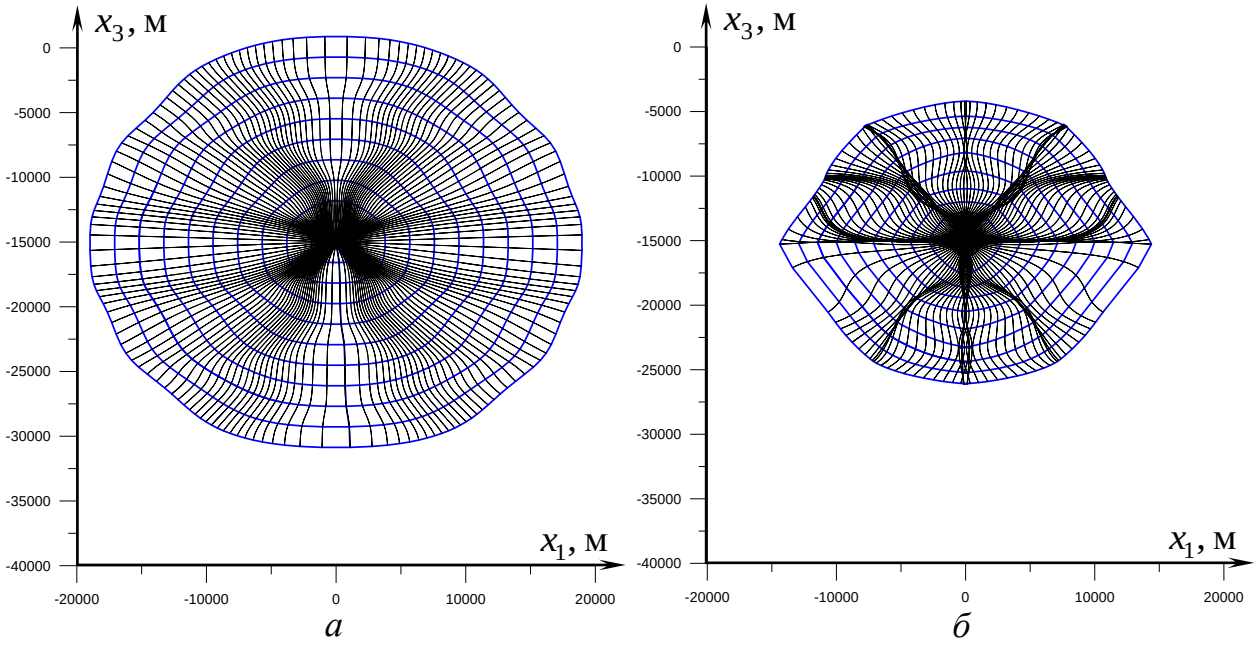


Рисунок 3.44 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $m=\left(0{,}1+0{,}5\cos\left(1\cdot10^{-3}x_3\right)\right)\mu$ та значеннях $l=0{,}5\lambda$, $p=0{,}3\left(\lambda+2\mu\right)$

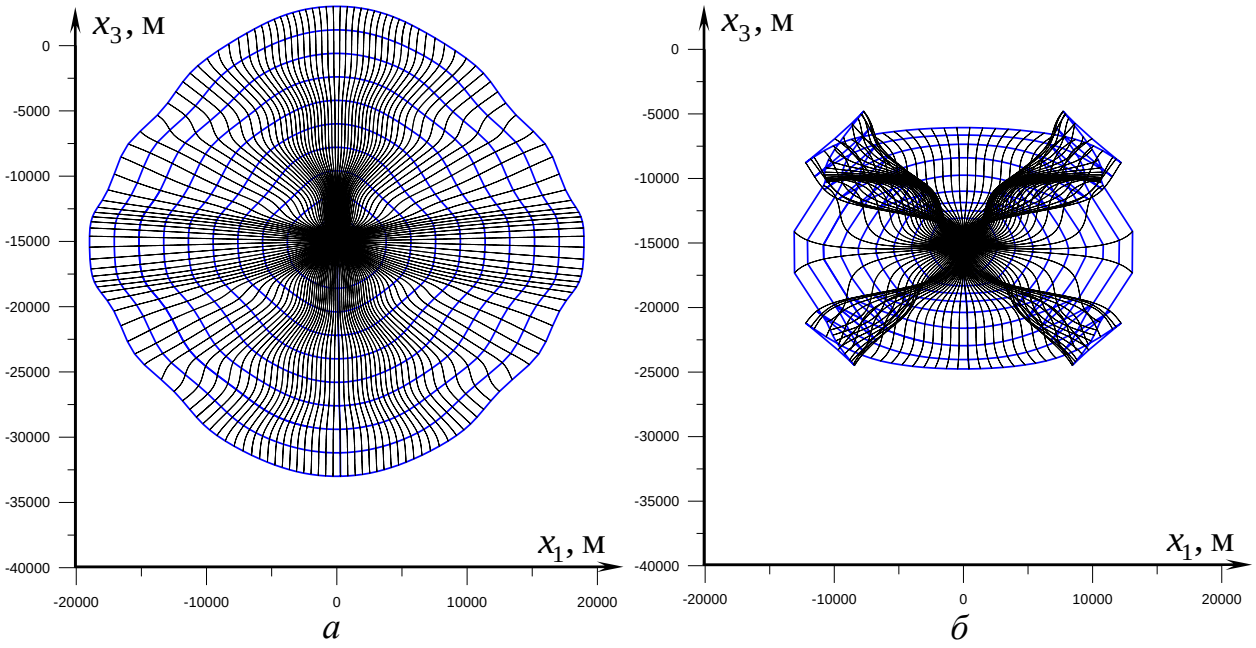
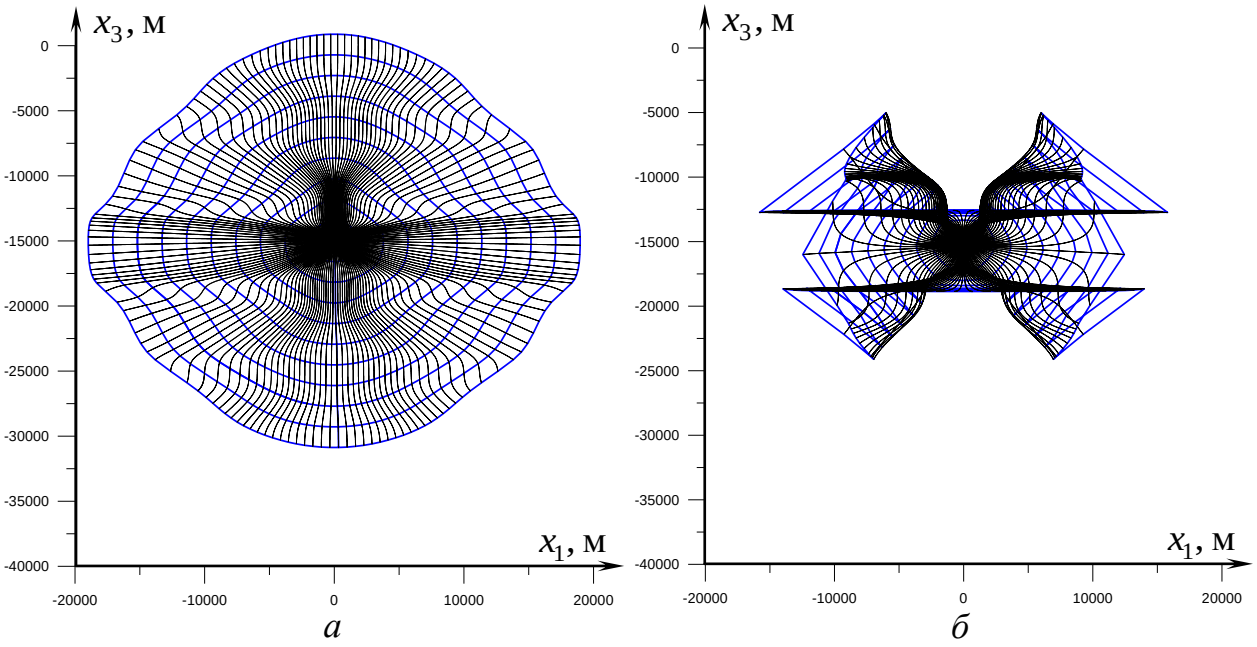
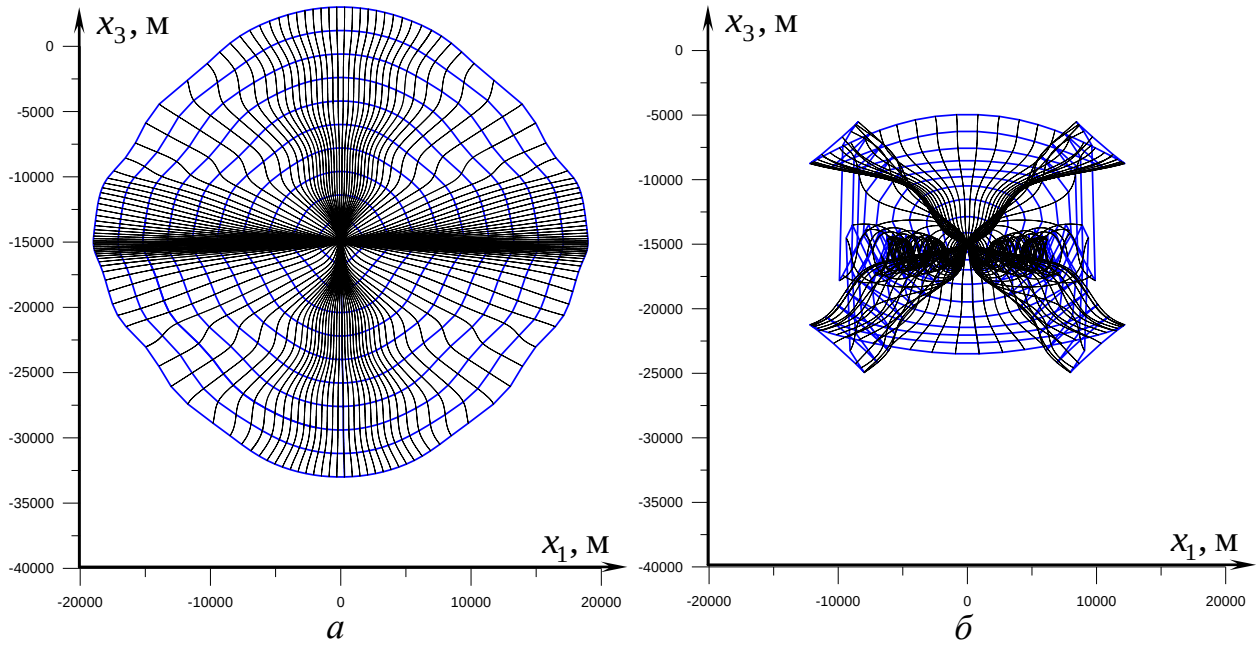


Рисунок 3.45 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $m=\left(0{,}3+0{,}5\cos\left(1\cdot10^{-3}x_3\right)\right)\mu$ та значеннях $l=0{,}5\lambda$, $p=0{,}1\left(\lambda+2\mu\right)$



а *б*

Рисунок 3.46 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $m=\left(0{,}5+0{,}5\cos\left(1\cdot10^{-3}x_3\right)\right)\mu$ та значеннях $l=0{,}1\lambda$, $p=0{,}3\left(\lambda+2\mu\right)$



а *б*

Рисунок 3.47 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $m=\left(0{,}3-0{,}5\cos\left(1\cdot10^{-3}x_3\right)\right)\mu$ та значеннях $l=0{,}5\lambda$, $p=0{,}1\left(\lambda+2\mu\right)$

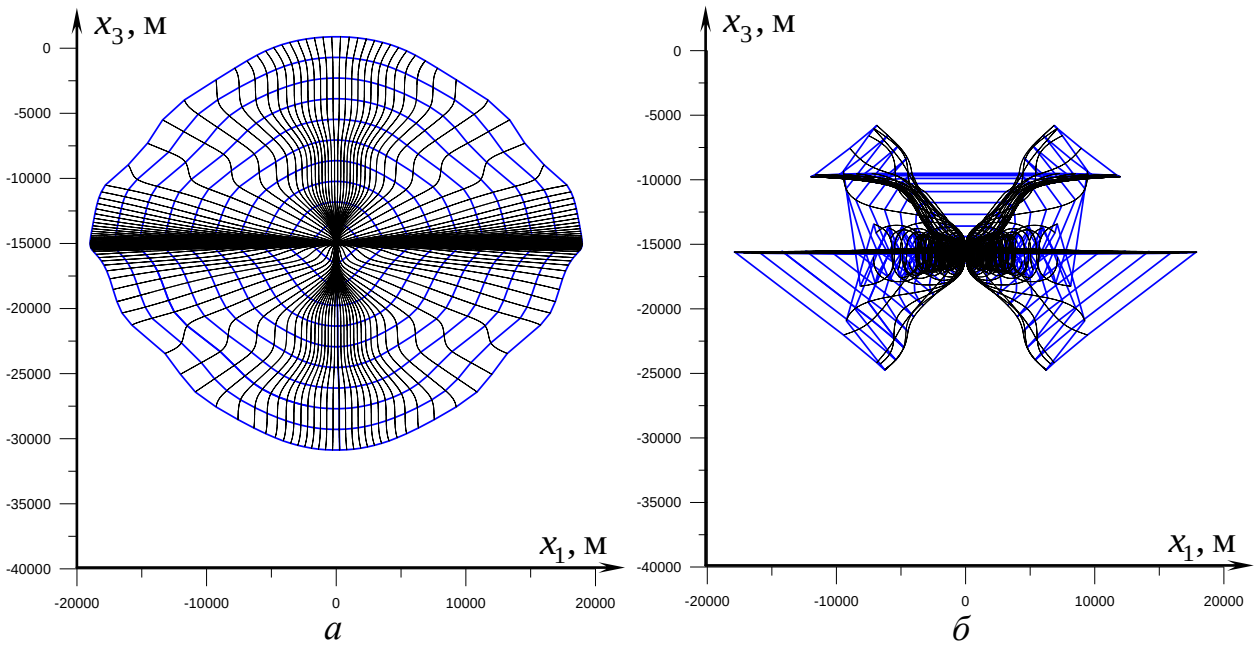


Рисунок 3.48 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $m=\left(0{,}5-0{,}5\cos\left(1\cdot10^{-3}x_3\right)\right)\mu$ та значеннях $l=0{,}1\lambda$, $p=0{,}3\left(\lambda+2\mu\right)$

кількості променів які поширюються в додатному напрямі осі Ox_3. Таким чином, можемо зробити висновок про зменшення інтенсивності хвилі та її екранування. В другому випадку, навпаки, відбувається видовження фронту *qP*-хвилі по вертикалі за рахунок більшої її швидкості поширення вздовж осі Ox_3, ніж вздовж Ox_1. Таку особливість спостерігаємо на рис. 3.49,а, при $m^0=-0{,}1$, $l_0=-0{,}3$, $p_0=-0{,}5$, рис. 3.50,а - $m^0=-0{,}1$, $l_0=-0{,}5$, $p_0=-0{,}3$ та рис. 3.51,а - $m^0=-0{,}3$, $l_0=-0{,}1$, $p_0=-0{,}5$. Аналогічно поводить себе система променів та фронтів квазіпоздовжньої хвилі за таких значень m^0, l_0, p_0 і при $\tau_m=-0{,}5$ (рис. 3.52,а – 3. 54,а).

Відзначимо, що промені квазіпоперечних хвиль при зміні параметра *m* за законом тригонометричної функції для всіх розглянутих варіантів комбінацій значень параметрів анізотропії залишаються криволінійними і мають складну геометрію, а їх трансформування супроводжується утворенням і накладанням особливостей на поверхнях фронтів (рис. 3.40,б – 3.54,б).

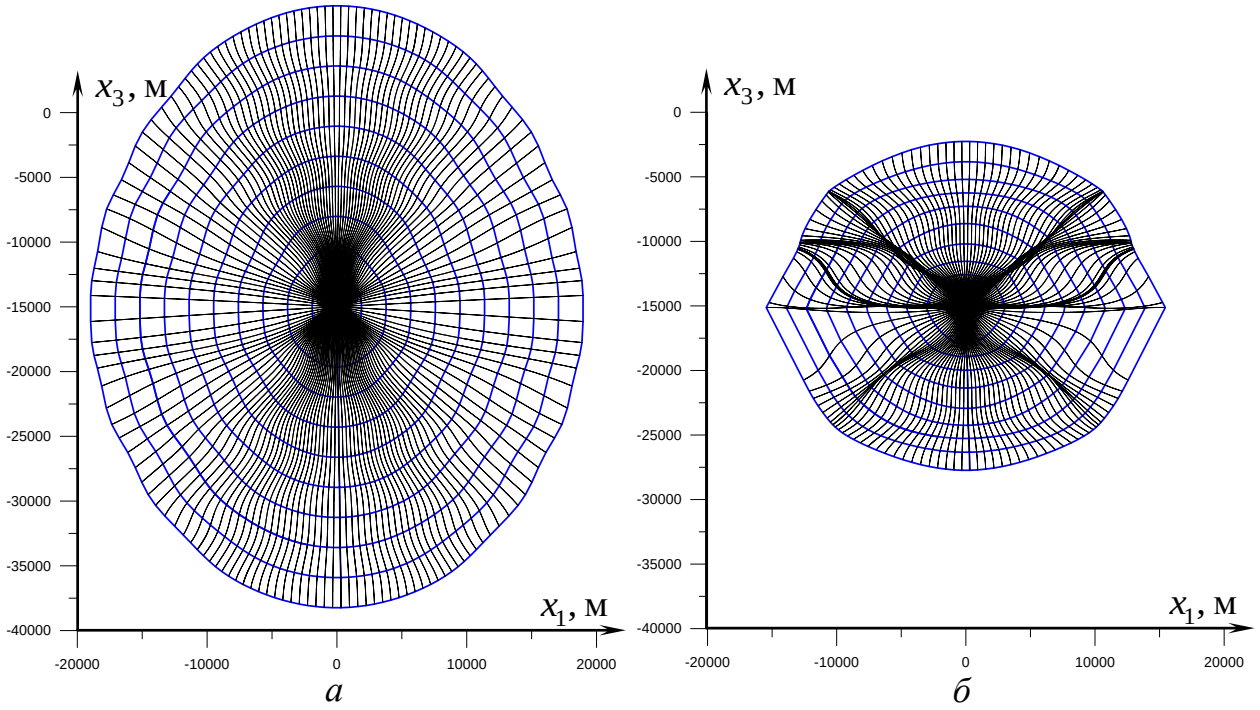


Рисунок 3.49 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $m=\left(-0{,}1+0{,}5\cos\left(1\cdot10^{-3}x_3\right)\right)\mu$ та значеннях $l=-0{,}3\lambda$, $p=-0{,}5\left(\lambda+2\mu\right)$

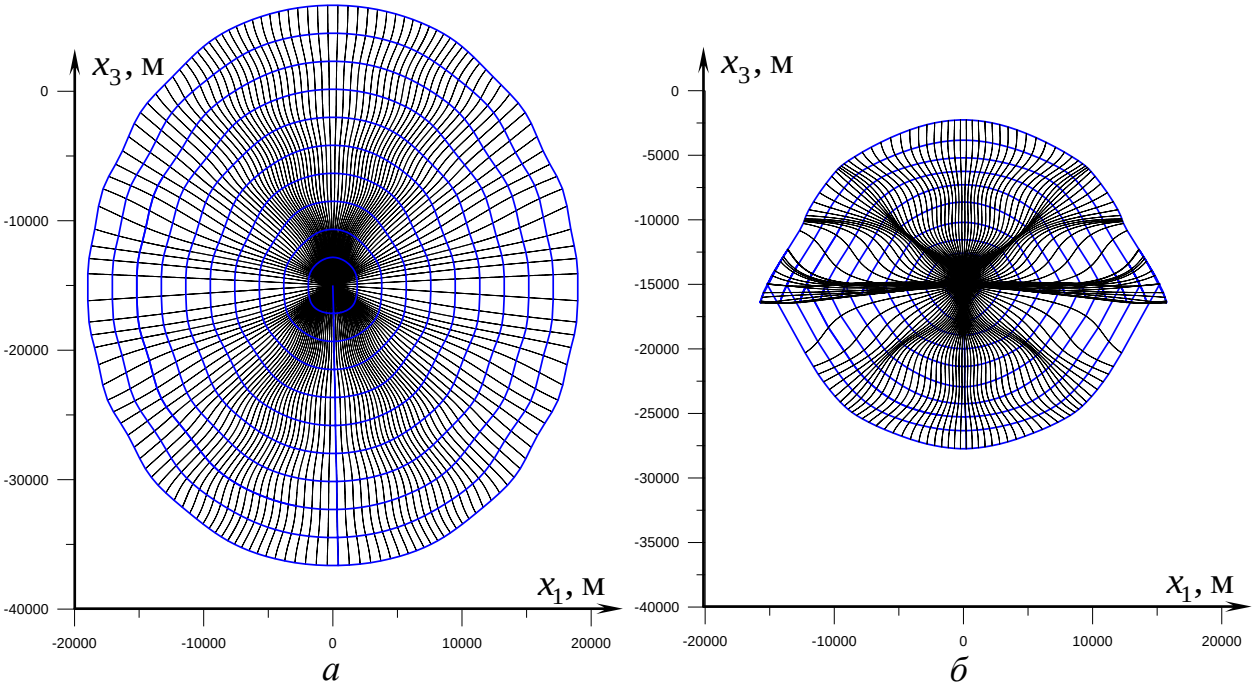


Рисунок 3.50 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $m=\left(-0{,}1+0{,}5\cos\left(1\cdot10^{-3}x_3\right)\right)\mu$ та значеннях $l=-0{,}5\lambda$, $p=-0{,}3\left(\lambda+2\mu\right)$

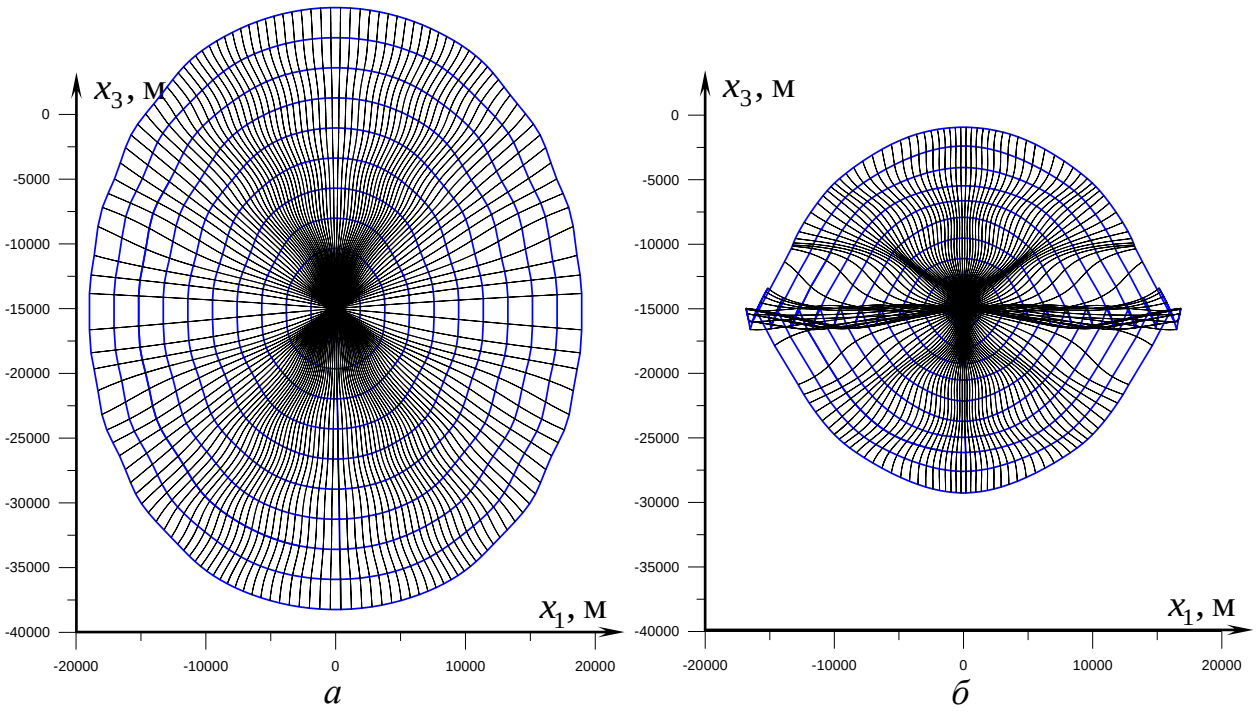


Рисунок 3.51 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $m=\left(-0{,}3+0{,}5\cos\left(1\cdot10^{-3}x_3\right)\right)\mu$ та значеннях $l=-0{,}1\lambda$, $p=-0{,}5\left(\lambda+2\mu\right)$

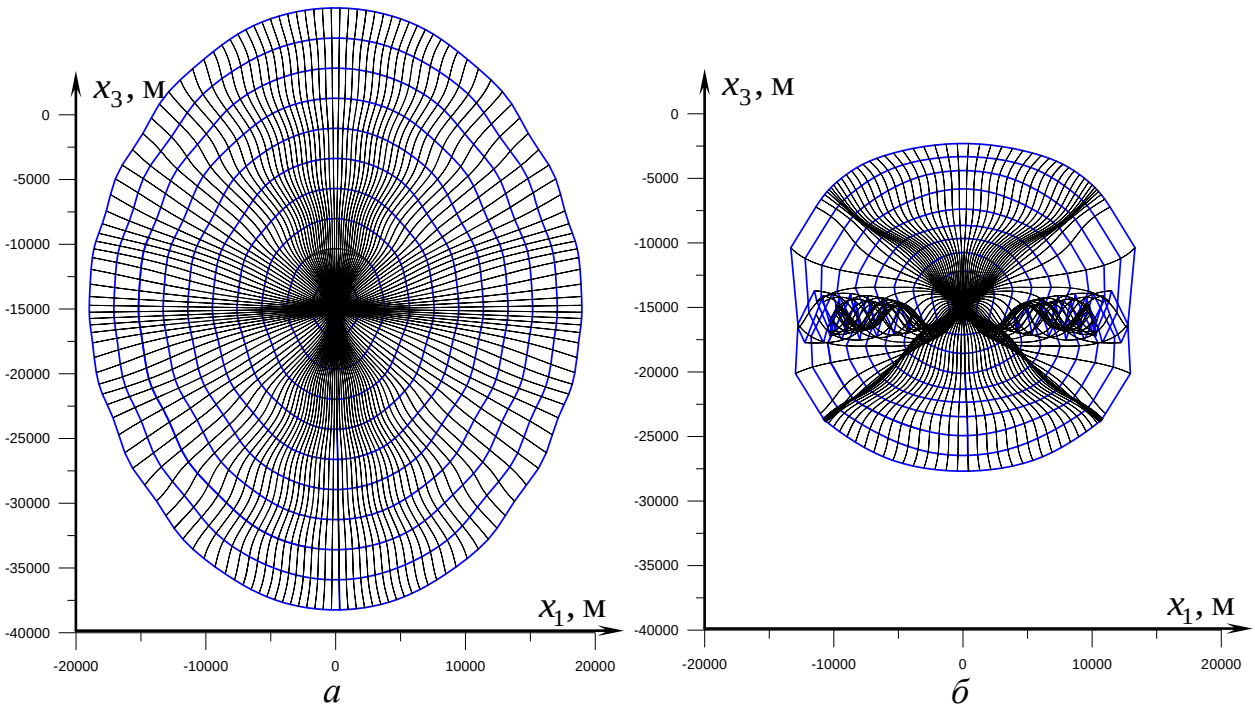
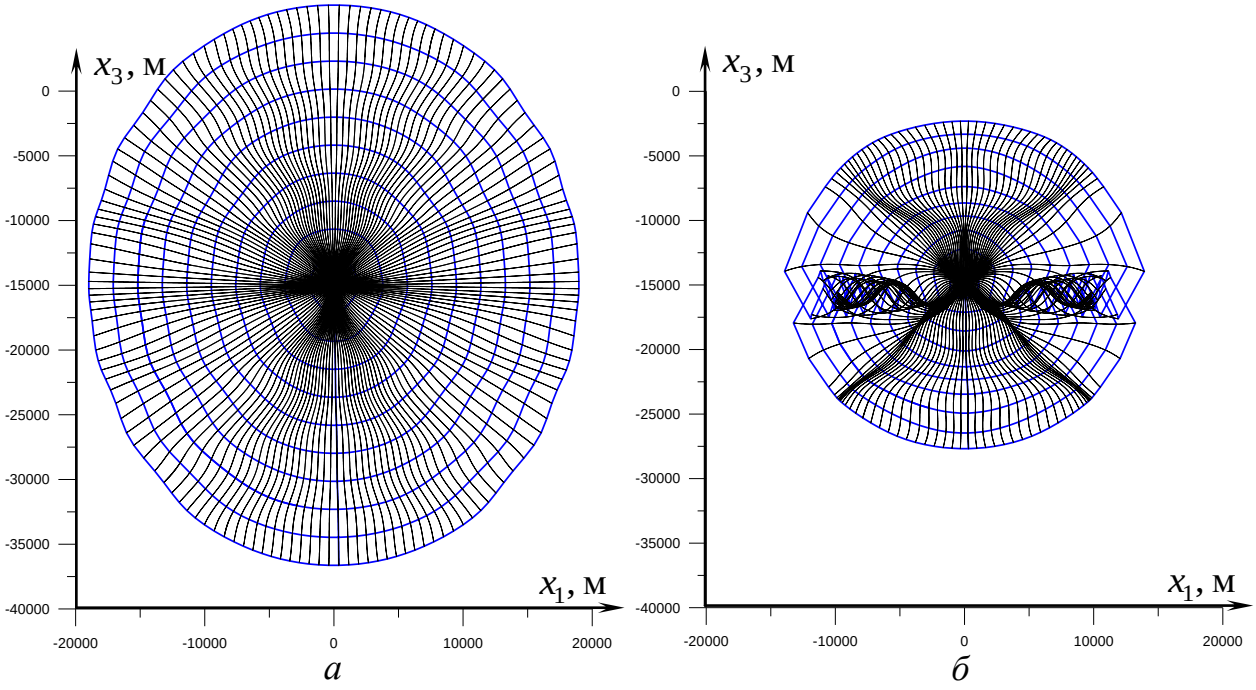
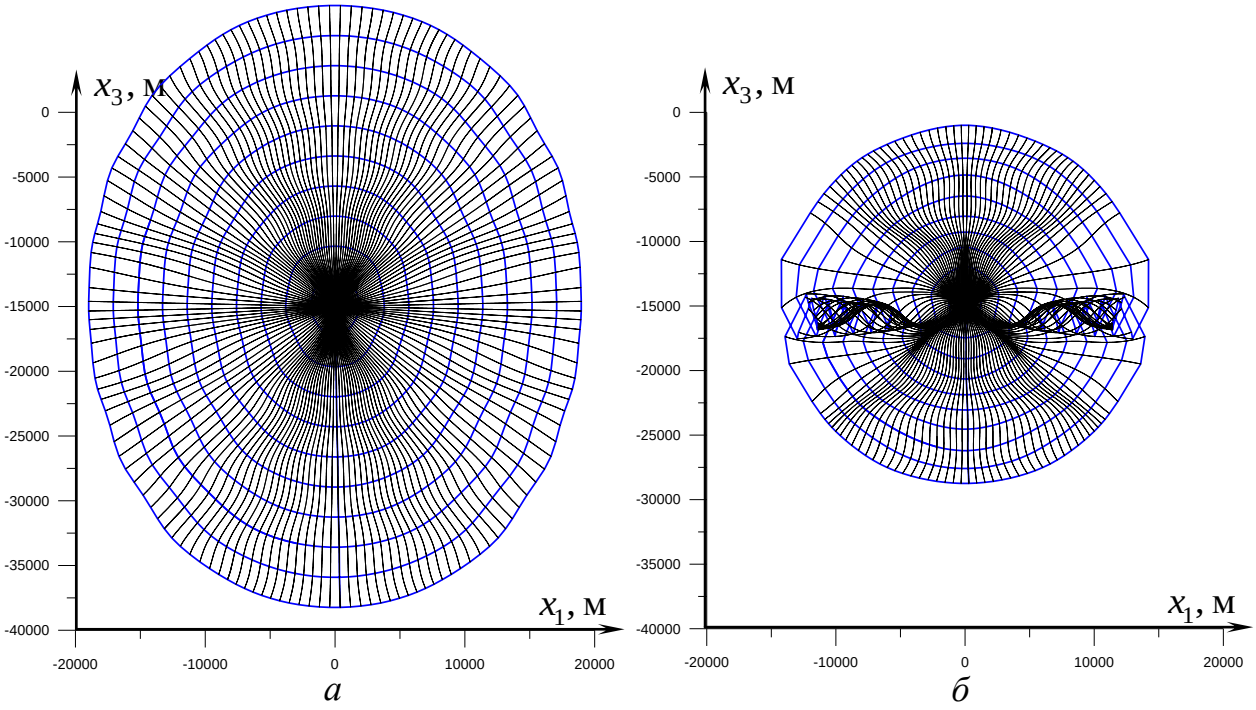


Рисунок 3.52 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $m=\left(-0{,}1-0{,}5\cos\left(1\cdot10^{-3}x_3\right)\right)\mu$ та значеннях $l=-0{,}3\lambda$, $p=-0{,}5\left(\lambda+2\mu\right)$



а *б*

Рисунок 3.53 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $m=\left(-0{,}1-0{,}5\cos\left(1\cdot10^{-3}x_3\right)\right)\mu$ та значеннях $l=-0{,}5\lambda$, $p=-0{,}3(\lambda+2\mu)$



а *б*

Рисунок 3.54 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $m=\left(-0{,}3-0{,}5\cos\left(1\cdot10^{-3}x_3\right)\right)\mu$ та значеннях $l=-0{,}1\lambda$, $p=-0{,}5(\lambda+2\mu)$

Що ж стосується зміни параметра p за законом тригонометричної функції,

$$p = p_0(\lambda + 2\mu) = \left(p^0 + \tau_l \cos(k_l x_3)\right)(\lambda + 2\mu), \qquad (3.7)$$

то, як вже було зазначено раніше, хоча він і входить лише до одного діагонального елемента матриці (3.2), але до його зміни є дуже чутливою умова (3.3). Тому діапазон можливої зміни цього параметру є досить незначним, що не призводить до появи нових особливостей перебудови розривних хвиль в досліджуваному середовищі. Однак можна вибрати такі комбінації параметрів k_p, τ_p, p^0, l^0, m^0 при яких, все ж таки, будуть спостерігатись певні особливості поширення хвиль.

Нехай, наприклад, $p = \left(p^0 + 0{,}25\cos\left(1\cdot 10^{-4} x\right)\right)(\lambda + 2\mu)$, p^0=0,3, m_0=0,1, l_0=0,5. Тоді, як випливає з рис. 3.55,а, системі променів стає властива розбіжність променів та поступове зміщення всього фронту *qP*-хвилі у від'ємному напрямі осі Ox_3. Наявність такої особливості поширення квазіпоздовжньої хвилі в додатному напрямі осі Ox_3, ще раз доводить екрануючі можливості неоднорідності пружного середовища. У випадку, коли p^0=0,1, m_0=0,5, l_0=0,3 (рис. 3.56,а), спостерігається видовження фронту вздовж осі симетрії та зменшення швидкості в додатному напрямі цієї ж осі. Таким чином можемо припустити наявність екрануючого ефекту, однак в даному випадку він проявиться дуже слабко.

Підсумовуючи все вище сказане в п. 3.1.1 і 3.1.2, можемо зробити висновок про те, що зміна елементів тензора пружних характеристик як за законом алгебраїчних функцій, так і трансцендентних, відіграє важливу у перебудові системи променів і фронтів розривних хвиль в пружному середовищі.

Звичайно, варто відмітити, що не завжди можемо чітко прослідкувати ефект екранування таких хвиль, наприклад, якщо змінна l змінюється за

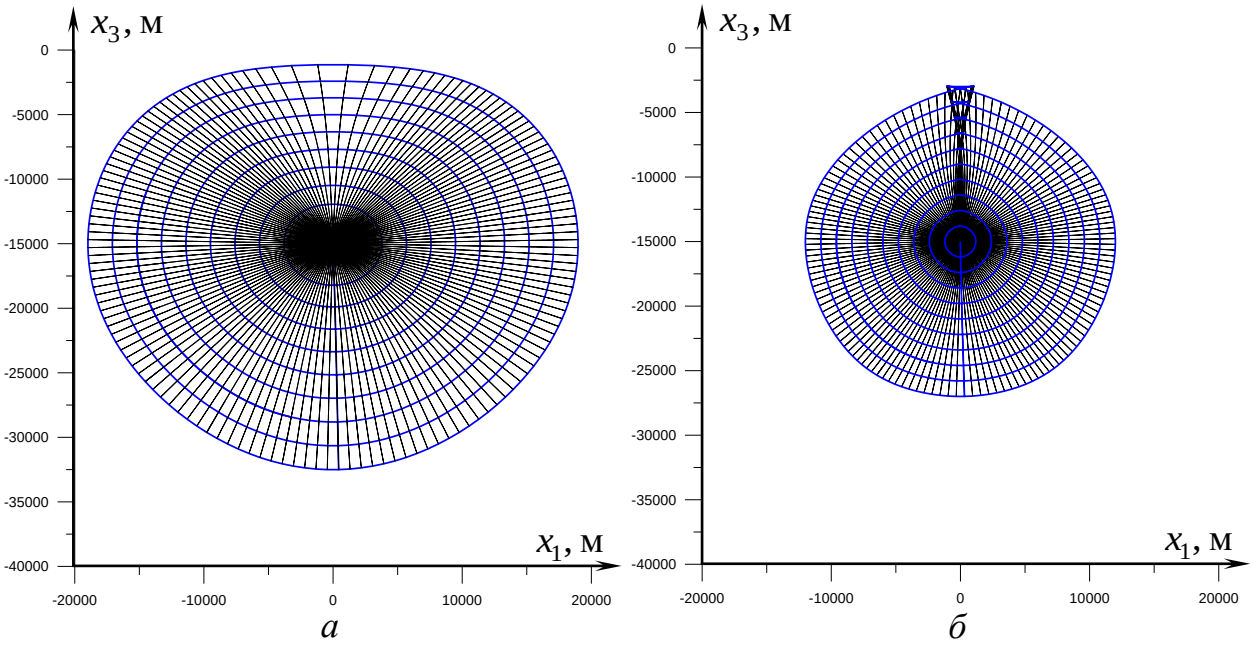


Рисунок 3.55 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $p=\left(0{,}3+0{,}25\cos\left(1\cdot10^{-4}x\right)\right)(\lambda+2\mu)$ та значеннях $l=0{,}5\lambda$, $m=0{,}1\mu$

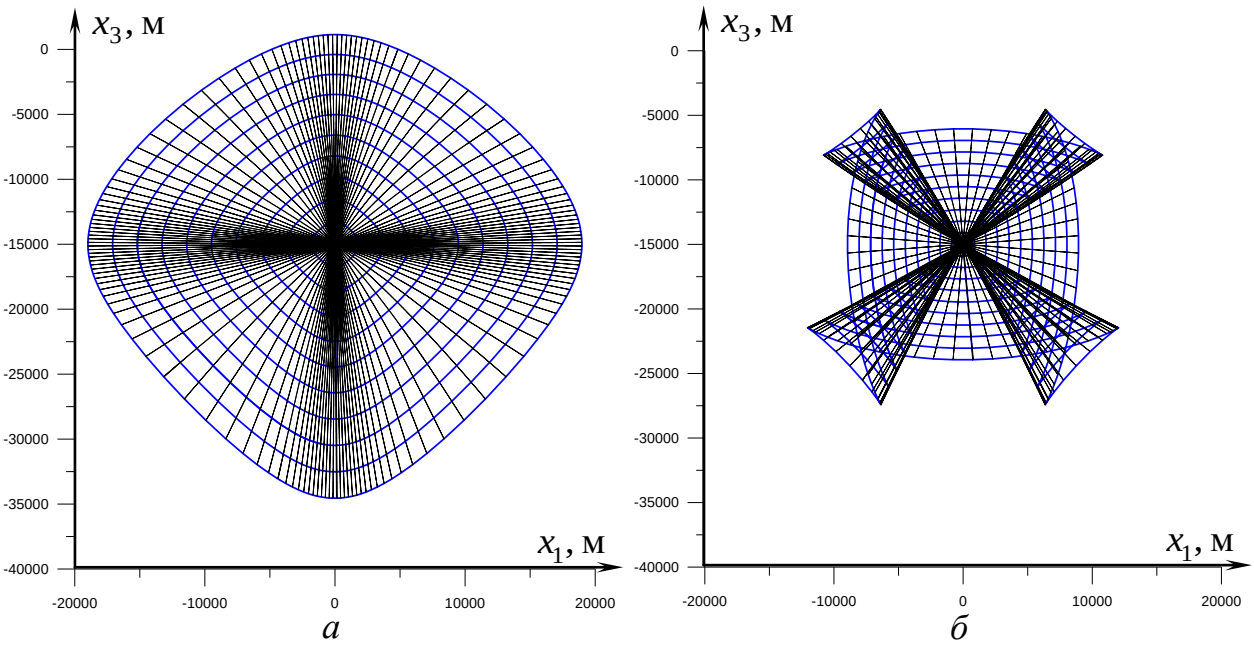


Рисунок 3.56 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра $p=\left(0{,}1+0{,}25\cos\left(1\cdot10^{-4}x\right)\right)(\lambda+2\mu)$ та значеннях $l=0{,}3\lambda$, $m=0{,}5\mu$

законом $l=\left(0{,}5+1{,}5\cos\left(2{,}5\cdot10^{-2}x_3\right)\right)\lambda$ і m=0,3μ, p=0,1$(\lambda+2\mu)$, то спостерігаємо збіжність променів в додатному напрямі осі Ox_3. А от випадок зміни параметра $m=\left(0{,}1-5\cdot10^{-6}x_3^2\right)\mu$ та значеннях l=0,3λ, p=0,5$(\lambda+2\mu)$ відмінно ілюструє екрануючі властивості неоднорідності середовища. При цьому варто зазначити, що ефект послаблення та збільшення інтенсивності (екранування) хвильових процесів відбувається за рахунок відхилення (збіжності) променів, а явища відбиття-заломлення, як це відбувається в шаруватих середовищах з розривними функціями їх механічних параметрів, не спостерігаються.

3.2 Перетворення фронтів пружних хвиль в ізотропному середовищі з шаром змінної густини

Розглянемо однорідне ізотропне середовище з такими фізичними параметрами $\rho=\rho_0$=2760 кг/м^3, λ=3,4·10^9 Па, μ=1,36·10^{10} Па. На основі теорії поширення пружних хвиль в однорідному пружному середовищі, основні положення якої висвітлені в пункті 2.2, розв’язувальною є система звичайних диференціальних

$$\begin{aligned}\frac{dx_m^{(r)}}{d\tau}&=\xi_m^{(r)}=\sum_{i,p,q}^{3}\lambda_{im,pq}p_pA_q^{(r)}A_i^{(r)},\\ \frac{dp_m^{(r)}}{d\tau}&=\eta_m^{(r)}=0,\quad (m,r=1,2,3)\end{aligned}\tag{3.9}$$

з початковими умовами

$$x_m^{(r)}\Big|_{t=0}=x_m^0;\qquad p_m^{(r)}\Big|_{t=0}=\frac{n_m}{\mathrm{v}_m^{(r)}}.\tag{3.10}$$

Чисельно інтегруючи її методом Рунге-Кутта четвертого порядку, отримуємо координати $x_k^{(r)}$ за якими і відбувається побудова системи променів та фронтів розривної хвилі.

Так, на рис. 3.57 зображено сітку променів фронтів *P*- і *S*-хвиль в однорідному ізотропному середовищі із вище зазначеними фізичними властивостями. В цьому випадку промені є прямолінійними та перпендикулярними до сферичного фронту хвилі. При побудові розв'язку вважалось, що промені відходять від сферичного джерела з кроком колової координати $\Delta\Theta = 2{,}5^0$. Лінія фронту хвилі будувалась з кроком радіальної координати $\Delta r = 0{,}0013$ м.

Як відомо, одним із проявів неоднорідності середовища є зміна його густини. Розглянемо неоднорідне ізотропне середовище з вище зазначеними фізичними характеристиками, густина якого змінюється вздовж осі Ox_3, наприклад, за законом неперервної функції:

$$\rho = \rho_0\left(2 + 5\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}83\left(\sqrt{1\cdot 10^6 + (x_3 + 11250)^2} - \sqrt{1\cdot 10^6 + (x_3 + 11000)^2}\right)\right),$$
$$x_3 \in [-15000; -7500),$$
$$\rho = \rho_0\left(2 + 5\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}83\left(-\sqrt{1\cdot 10^6 + (x_3 + 3750)^2} + \sqrt{1\cdot 10^6 + (x_3 + 3500)^2}\right)\right), \quad (3.11)$$
$$x_3 \in [-15000; -7500);$$
$$\rho = \rho_0, \qquad x_3 < -15000,$$

де ρ_0 – густина відповідного однорідного ізотропного пружного середовища.

Графік цієї функції зображений на рис. 3.58,а. При цьому значення параметрів пружності λ і μ залишаються незмінними: $\lambda = 3{,}4\cdot 10^9$ Па, $\mu = 1{,}36\cdot 10^{10}$ Па.

При переході до неоднорідного середовища рівняння (3.9) потрібно замінити системою диференціальних рівнянь

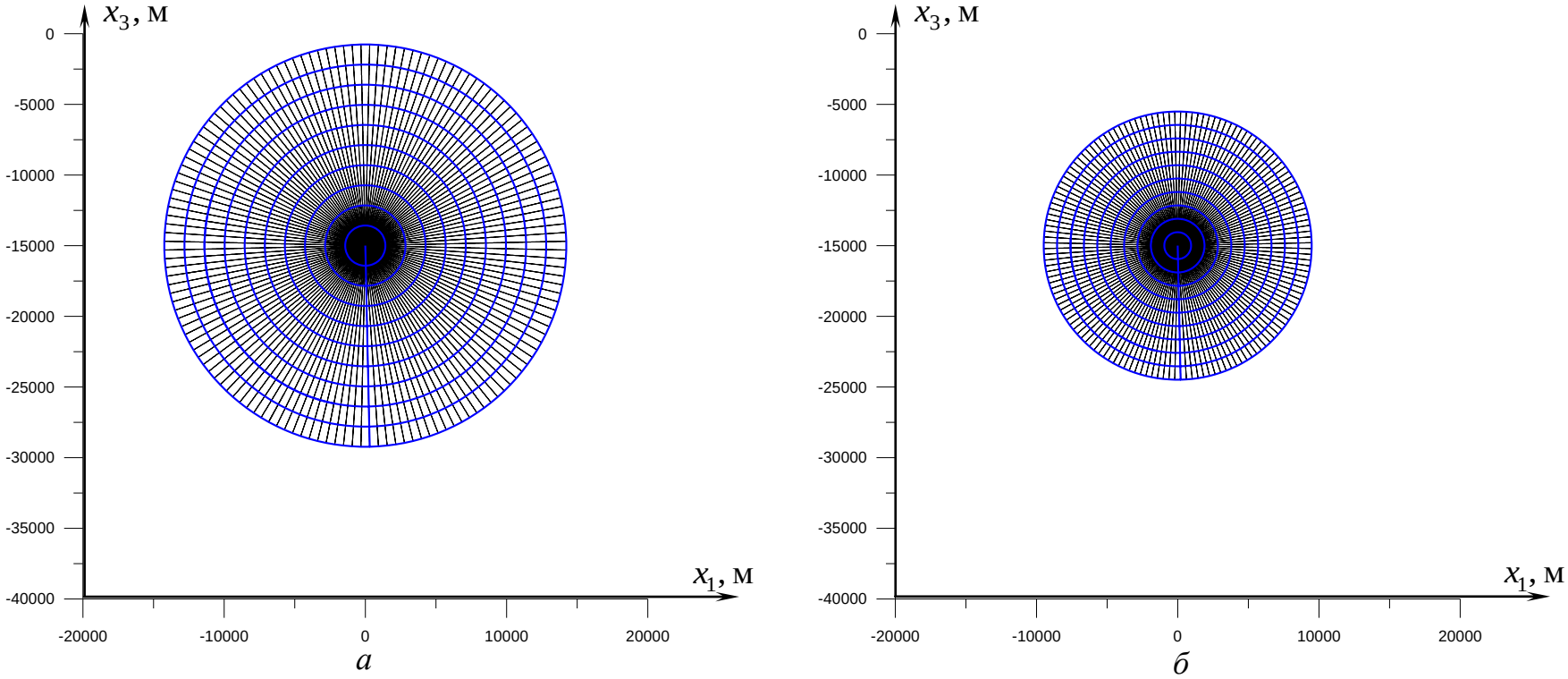
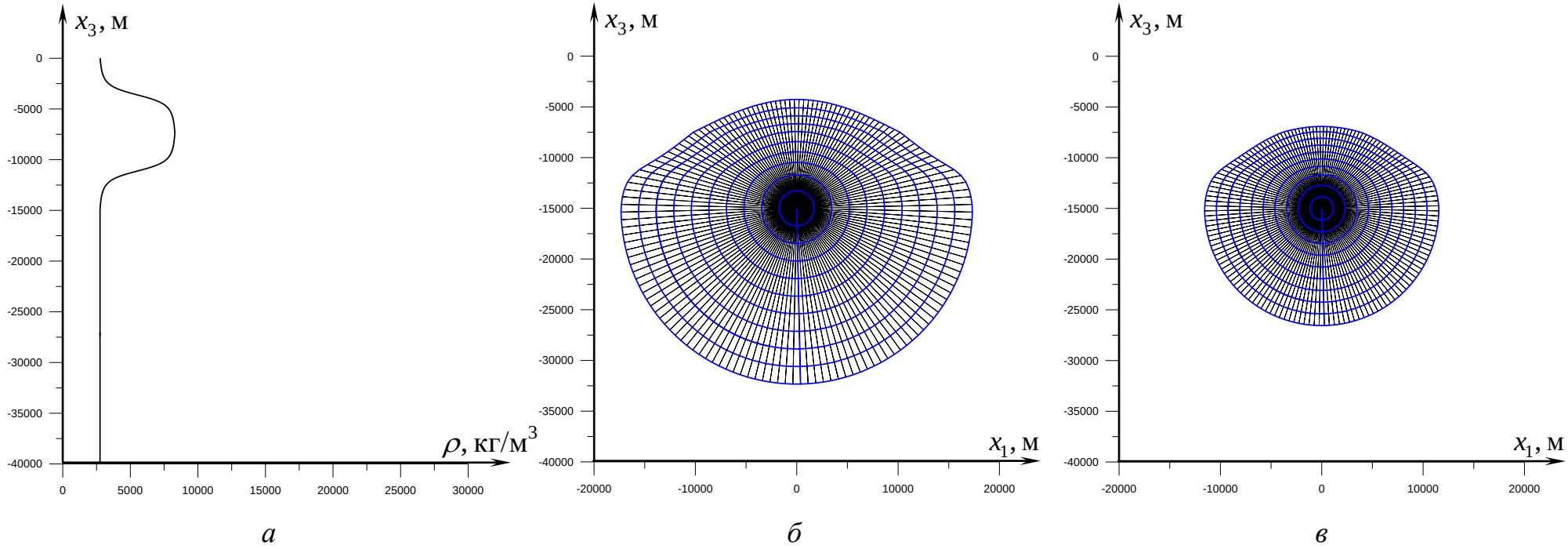


Рисунок 3.57 − Схеми поширення поздовжньої P- (а) та поперечної S-хвилі (б) в однорідному ізотропному середовищі



а *б* *в*

Рисунок 3.58 − Графік зміни функції густини $\rho(x_3)$ (а) та схеми перебудови променів і фронтів P - (б) і S -хвиль (в) в неоднорідному ізотропному середовищі при зміні густини середовища за законом (3.11)

$$\frac{dx_m^{(r)}}{d\tau} = \xi_m^{(r)} = \sum_{i,p,q}^{3} \lambda_{im,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)},$$
$$\frac{dp_m^{(r)}}{d\tau} = \eta_m^{(r)} = -\frac{1}{2} \sum_{i,k,p,q}^{3} \frac{\partial \lambda_{ik,pq}}{\partial x_m} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \quad (m, r = 1, 2, 3). \tag{3.12}$$

з початковими умовами

$$x_m\Big|_{\tau=0} = x_m^0, \qquad p_m\Big|_{\tau=0} = p_m^0 \equiv \frac{n_m^0}{\mathrm{v}_r^0}, \qquad (m = 1, 2, 3) \tag{3.13}$$

При такій постановці задачі середовище має майже шарувату структуру зі збільшеною щільністю в шарі. Однак при цьому всі коефіцієнти механічних параметрів залишаються диференційованими функціями.

За законом $\rho(x_3)$ (3.11) густина середовища ρ спочатку неперервно збільшується, починаючи зі значення ρ_0=2760 кг/м^3, а після досягнення максимального значення ρ=8292 кг/м^3 починає зменшуватись, тобто таким чином утворюється шар неоднорідності.

Форми перерізів фронтів *P*- і *S*-хвиль, при зміні функції $\rho(x_3)$ за законом (3.11), представлені на рис. 3.58,б і 3.58,в, відповідно. Для цього випадку параметри розрахунків залишаються такими, як і в попередньому випадку $\Delta\Theta = 2{,}5^0$, $\Delta r = 0{,}0013$ м. В порівнянні з однорідним середовищем (рис. 3.57), тут фронти перестають бути сферичними, хоча зберігається прямолінійність променів, а швидкості поширення *P*- і *S*-хвиль вздовж додатного напряму осі Ox_3 значно зменшуються в зонах підвищеної густини середовища. Така закономірність випливає із формули визначення компонентів променевої швидкості

$$\xi_m^{(r)} = \sum_{i,p,q}^{3} \lambda_{im,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} . \qquad (3.14)$$

Оскільки $\lambda_{im,pq} = \dfrac{1}{\rho(x_1, x_2, x_3)} c_{im,pq}$,

де $c_{im,pq}$ – елементи тензора пружних сталих, то

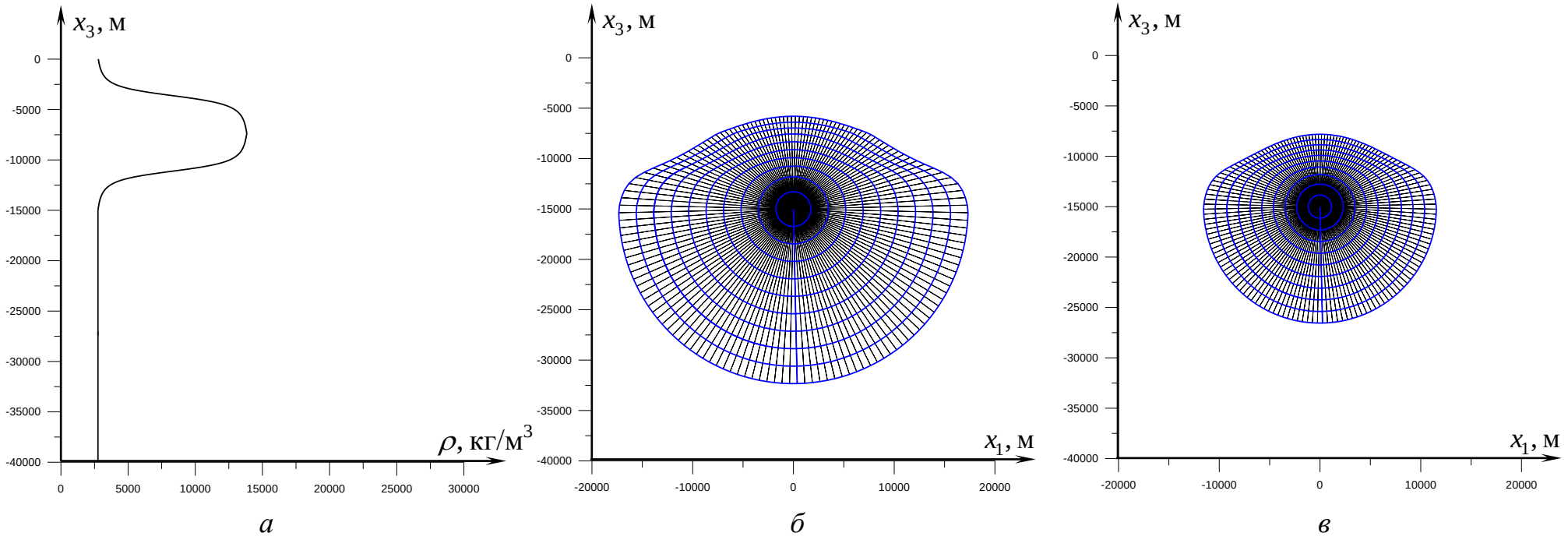
$$\xi_m^{(r)} = \sum_{i,p,q}^{3} \frac{c_{im,pq}}{\rho} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} = \frac{1}{\rho} \sum_{i,p,q}^{3} c_{im,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} . \qquad (3.15)$$

Отже, зі збільшенням густини середовища променева швидкість розривної хвилі зменшується. Як результат, розглянутий шар неоднорідності починає відігравати роль екрана, відхиляючого (відбиваючого) хвильовий фронт.

Розглянемо інший закон зміни $\rho(x_3)$, при якому значення густини змінюється в більшому діапазоні. Так, нехай,

$$\rho = \rho_0 \left(3 + 1 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}83 \left(\sqrt{1 \cdot 10^6 + (x_3 + 11250)^2} - \sqrt{1 \cdot 10^6 + (x_3 + 11000)^2} \right) \right),$$
$$x_3 \in [-15000; -7500);$$
$$\rho = \rho_0 \left(3 + 1 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}83 \left(- \sqrt{1 \cdot 10^6 + (x_3 + 3750)^2} + \sqrt{1 \cdot 10^6 + (x_3 + 3500)^2} \right) \right), \qquad (3.16)$$
$$x_3 \in [-15000; -7500);$$
$$\rho = \rho_0, \qquad x_3 < -15000 .$$

Для цього випадку, графік функції $\rho(x_3)$ показаний на рис. 3.59,а $\left(\rho \in [2760; 13826] \text{ кг/м}^3\right)$. На рис. 3.59,б і рис. 3.59,в зображені промені та фронти *P*- і *S*-хвиль.



а *б* *в*

Рисунок 3.59 – Графік зміни функції густини $\rho(x_3)$ (а) та схеми перебудови променів і фронтів P - (б) і S -хвиль (в) в неоднорідному ізотропному середовищі при зміні густини середовища за законом (3.16)

В результаті зміни густини за законом (3.16), залишаючи незмінним значення $\Delta r = 0{,}0013$ м, спостерігаємо значне зменшення швидкості розповсюдження як *P*-, так і *S*-хвиль при проходженні шару підвищеної щільності.

Таким чином виникає ефект екранування розривної хвилі шаром неоднорідності зумовленої зміною густини середовища за законом неперервної функції (3.11), (3.16).

На відміну від розглянутих вище прикладів, виберемо тепер закон зміни функції густини $\rho(x_3)$ таким чином, щоб утворився проміжний шар зниженої щільності. Нехай, наприклад, змінна $\rho = \rho(x_3)$ має вигляд:

$$\rho = \rho_0\left(0{,}8 + 8{,}3\cdot 10^{-4}\left(-\sqrt{1\cdot 10^6 + (x_3 + 11250)^2} + \sqrt{1\cdot 10^6 + (x_3 + 11000)^2}\right)\right),$$
$$x_3 \in [-15000; -7500);$$
$$\rho = \rho_0\left(0{,}8 + 8{,}3\cdot 10^{-4}\left(\sqrt{1\cdot 10^6 + (x_3 + 3750)^2} - \sqrt{1\cdot 10^6 + (x_3 + 3500)^2}\right)\right), \qquad (3.17)$$
$$x_3 \in [-15000; -7500);$$
$$\rho = \rho_0, \quad x_3 < -15000..$$

Для цього випадку зміни густини на рис. 3.60 зображені графік функції $\rho = \rho(x_3)$ (рис. 3.60, а), системи променів і фронтів повздовжньої (рис. 3.60, б) та поперечної хвиль (рис. 3.60, в). Тут густина зменшується від ρ_0=2760 кг/м^3 до $\rho_{\min}$=1653 кг/м^3 $\rho_{\min} = 1653$ кг/м^3 і в момент проходження хвилею шару зниженої щільності її швидкість зростає. В результаті цього контури фронти викривляються, а промені залишаються прямолінійними. Однак при цьому шар зниженої щільності також відіграє роль екрану, що відхиляє хвильовий фронт.

Узагальнюючи отримані результати, можна зробити висновок, що довільний шар неоднорідності щільності пружного середовища (як підвищеної, так і зниженої в порівнянні з густиною основного масиву середовища) може відігравати роль екрану, який відхиляє хвильові промені.

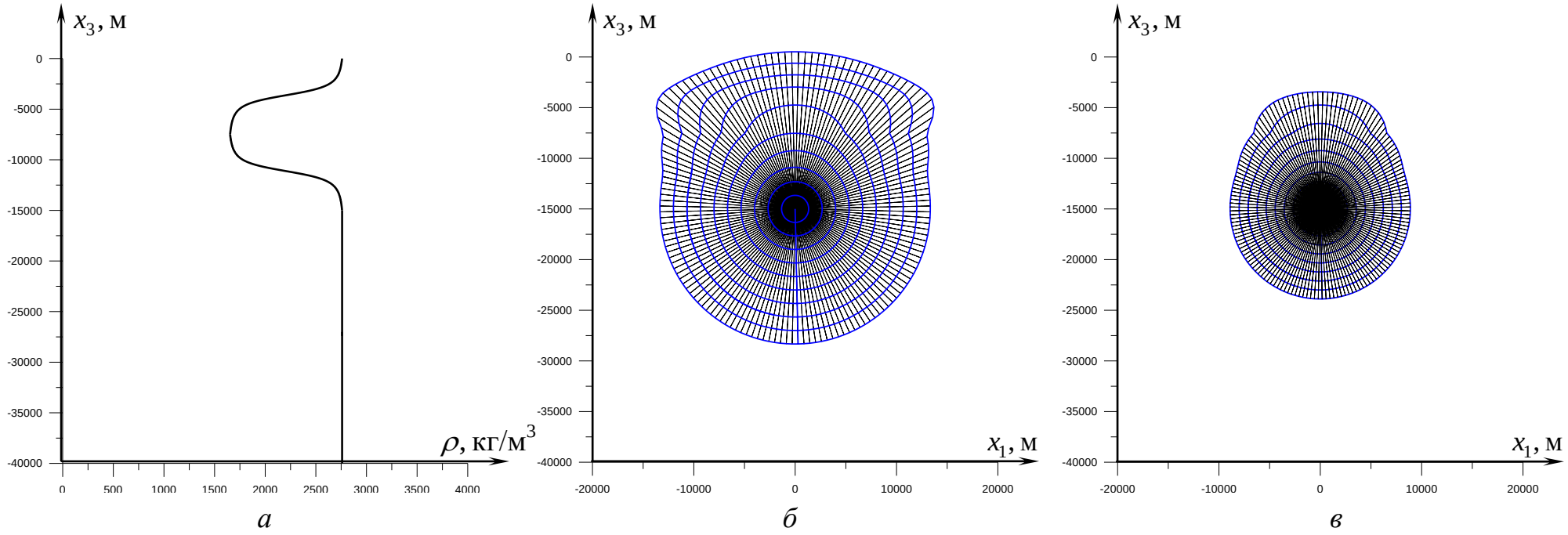


Рисунок 3.60 – Графік зміни функції густини $\rho(x_3)$ (а) та схеми перебудови променів і фронтів P - (б) і S -хвиль (в) в неоднорідному ізотропному середовищі при зміні густини середовища за законом (3.17)

При цьому, однак, екрануючі властивості шару неоднорідності посилюються зі збільшенням різниці значень густини в масиві та шарі.

3.3 Перетворення фронтів пружних хвиль в анізотропному середовищі з шаром неоднорідності зі змінними механічними характеристиками

Як вже було зазначено раніше, динамічні властивості неоднорідного трансверсально-ізотропного пружного середовища визначаються п’ятьма функціями λ, μ, l, m, p його пружних характеристик і функцією ρ його густини. В пункті 3.1.1 розглянуто задачу про вплив зміни густини за законом неперервної функції на поширення розривних хвиль в неоднорідному ізотропному середовищі. При цьому для розв’язку поставленої задачі функція $\rho(x_3)$ була підібрана таким чином, щоб пружне середовище набуло властивостей шаруватої структури, однак властивості якої описуються неперервними диференційованими функціями. Розглянемо тепер задачу перетворення променів і фронтів розривної хвилі в неоднорідному анізотропному пружному середовищі з неоднорідністю, утвореною внаслідок зміни одного з механічних параметрів середовища l, m, p або ρ за законом неперервної функції, підібраної таким чином, щоб, як і у випадку неоднорідного ізотропного середовища, досліджуване середовище набувало майже шаруватої структури, але при цьому всі коефіцієнти розв’язних рівнянь залишались диференційованими функціями.

Так, нехай густина середовища $\rho(x_3)$ змінюється вздовж осі Ox_3, наприклад, за таким законом неперервної функції

$$\rho = \rho_0\left(1{,}5 + 2{,}1\cdot 10^{-3}\left(\sqrt{1\cdot 10^6 + (x_3 + 11250)^2} - \sqrt{1\cdot 10^6 + (x_3 + 11000)^2}\right)\right),$$
$$x_3 \in [-15000; -7500); \qquad (3.18)$$
$$\rho = \rho_0\left(1{,}5 + 2{,}1\cdot 10^{-3}\left(-\sqrt{1\cdot 10^6 + (x_3 + 3750)^2} + \sqrt{1\cdot 10^6 + (x_3 + 3500)^2}\right)\right),$$

$$x_3 \in [-15000; -7500);$$

$$\rho = \rho_0, \qquad x_3 < -15000,$$

де ρ_0 - густина відповідного однорідного анізотропного пружного середовища. Графік функції $\rho(x_3)$ зображений на рис. 3.61,а. Під час розв'язку поставленої задачі були враховані такі пружні параметри середовища: λ=3,4·10^9 Па, μ=1,36·10^{10} Па, m=0,1μ, l=0,3λ, p=0,5$(\lambda+2\mu)$. Для побудови розв'язку було прийнято, що промені відходять від сферичного джерела з кроком колової координати $\Delta\Theta = 2{,}5^0$, а чисельне інтегрування розв'язної системи диференціальних рівнянь

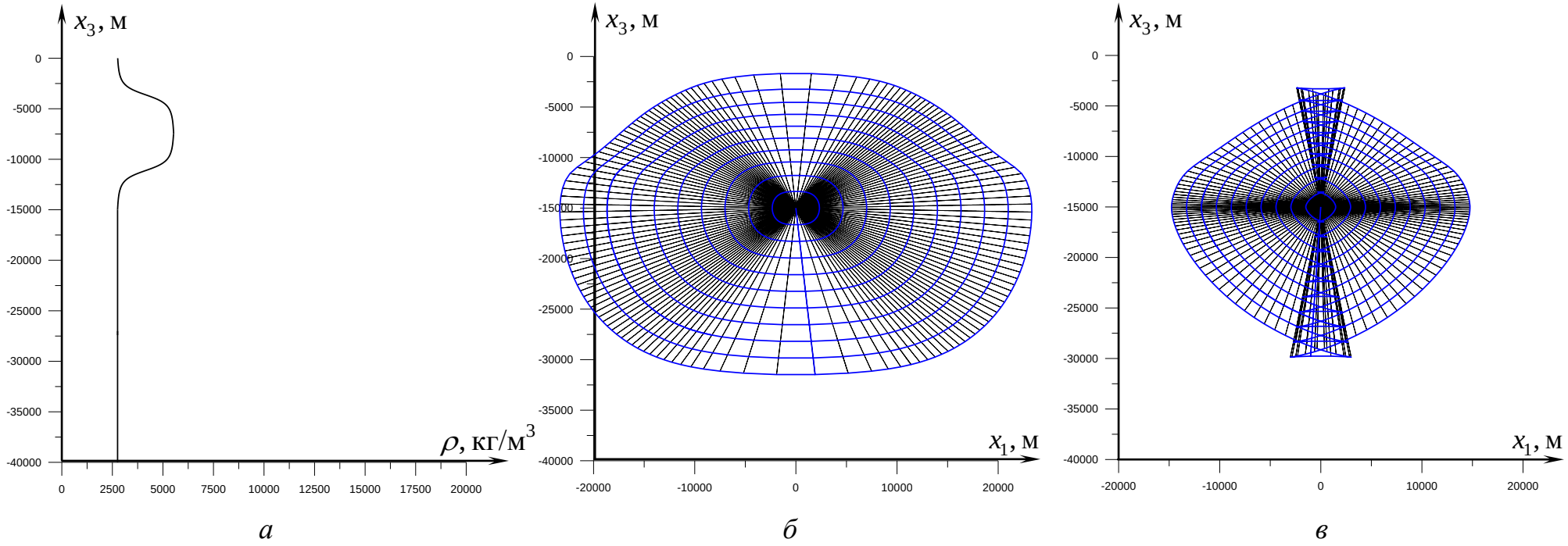
$$\frac{dx_m^{(r)}}{d\tau} = \xi_m^{(r)} = \sum_{i,p,q}^{3} \lambda_{im,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)},$$

$$\frac{dp_m^{(r)}}{d\tau} = \eta_m^{(r)} = -\frac{1}{2} \sum_{i,k,p,q}^{3} \frac{\partial \lambda_{ik,pq}}{\partial x_m} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \quad (m, r = 1, 2, 3). \tag{3.19}$$

виконувалось методом Рунге-Кутта з кроком $\Delta = 0{,}0018$ м. Тут величини компонентів вектора рефракції p_i $(i = 1, 2, 3)$, у відповідності з формулами (3.19), перераховуються для кожної нової точки середовища. Які в свою чергу визначають напрям вектора нормалі **n** до поверхні фронту, а значить і оновлене значення фазової швидкості v, які входять до системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{k,p,q}^{3} \lambda_{ik,pq} n_k n_p A_q^{(r)} = \mathrm{v}_r^2 A_i^{(r)}$$

відносно компонентів вектора поляризації A_j $(j = 1, 2, 3)$. За законом (3.18) густина середовища змінюється в межах від ρ_0=2760 кг/м^3 до $\rho_{\max}$=5526 кг/м^3, тобто утворюється шар підвищеної щільності.



а *б* *в*

Рисунок 3.61 – Графік зміни функції густини $\rho(x_3)$ (а) та схеми перебудови променів і фронтів qP - (б) і qS -хвиль (в) в неоднорідному трансверсально-ізотропному середовищі при зміні густини середовища за законом (3.18) та значеннях $m = 0{,}1\mu$, $l = 0{,}3\lambda$, $p = 0{,}5(\lambda + 2\mu)$

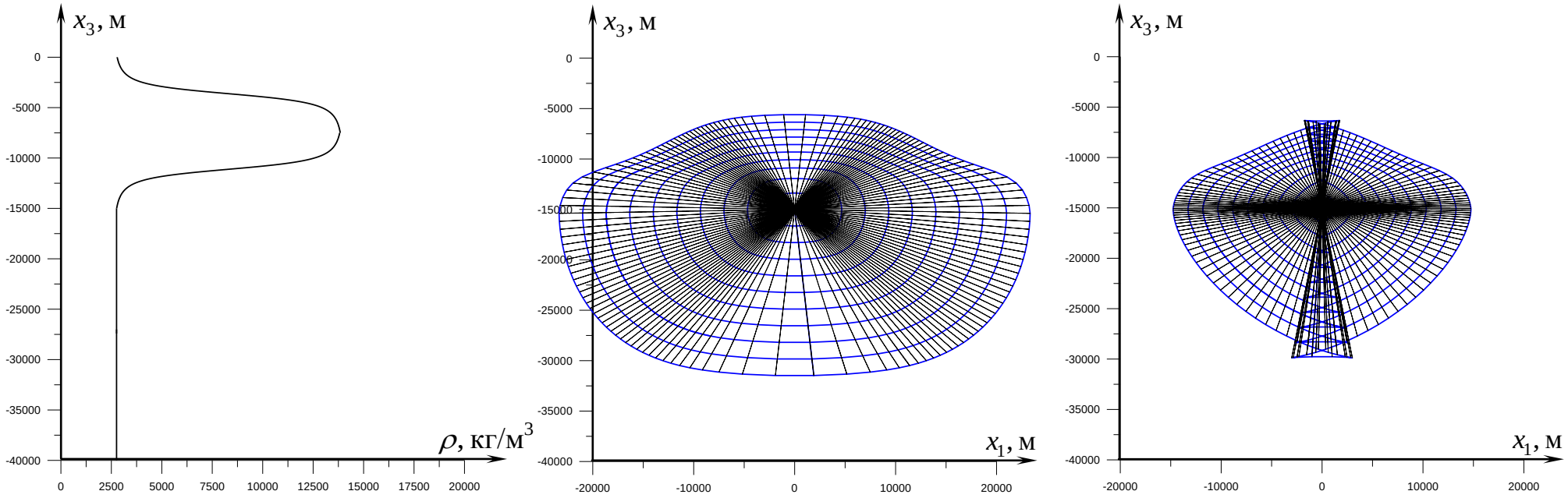
На рис. 3.61,б і рис. 3.61,в зображені послідовності трансформації системи променів і фронтів квазіпоздовньої та квазіпоперечної хвилі, відповідно, при проходженні шару збільшеної густини середовища. На зазначених рисунках можемо бачити видовження вздовж осі Ox_1 контурів фронтів *qP*- і *qS*-хвиль та відхилення промені *qP*-хвилі від прямої $x_1 = 0$. Також спостерігаємо зменшення швидкості поширення хвиль в додатному напрямі осі Ox_3. Зауважимо, що хоча відхилення променів від вертикалі не є значним, все ж спостерігається тенденція до значної перебудови форми хвильових фронтів.

Змінимо тепер функцію $\rho(x_3)$ таким чином, щоб збільшити діапазон зміни щільності шару неоднорідності. Так, нехай,

$$\begin{gathered}
\rho = \rho_0\left(3 + 8{,}3\cdot 10^{-3}\left(\sqrt{1\cdot 10^6 + (x_3 + 11250)^2} - \sqrt{1\cdot 10^6 + (x_3 + 11000)^2}\right)\right), \\
x_3 \in [-15000; -7500); \\
\rho = \rho_0\left(3 + 8{,}3\cdot 10^{-3}\left(-\sqrt{1\cdot 10^6 + (x_3 + 3750)^2} + \sqrt{1\cdot 10^6 + (x_3 + 3500)^2}\right)\right), \qquad (3.20) \\
x_3 \in [-15000; -7500); \\
\rho = \rho_0, \qquad x_3 < -15000.
\end{gathered}$$

Тоді ρ_0=2760 кг/м^3, $\rho_{\max}$=13820 кг/м^3, графік функції $\rho(x_3)$ зображений на рис. 3.62,а. Залишаючи всі інші фізичні властивості середовища та параметри інтегрування незмінними, побудуємо розв’язок поставленої задачі при такій зміні щільності середовища. В цьому випадку, як показано на 3.62,б і 3.62,в, стає більш помітним зменшення швидкостей поширення *qP*- і *qS*-хвиль вздовж додатного напряму осі симетрії Ox_3 та значне видовження фронту в горизонтальному напрямі.

Отже, можемо зробити висновок, що збільшення густини середовища, як і у випадку неоднорідного ізотропного середовища, призводить до зменшення променевої швидкості хвилі.



а *б* *в*

Рисунок 3.62 – Графік зміни функції густини $\rho(x_3)$ (а) та схеми перебудови променів і фронтів qP - (б) і qS -хвиль (в) в неоднорідному трансверсально-ізотропному середовищі при зміні густини середовища за законом (3.20) та значеннях $m = 0{,}1\mu$, $l = 0{,}3\lambda$, $p = 0{,}5(\lambda + 2\mu)$

В результаті цього, такі шари неоднорідності можуть слугувати екранами, що відхиляють хвильові фронти. Так як досліджуване середовище є анізотропним і його динамічні властивості залежать від значень l, m і p, тому надамо їм інших значень. Так, нехай, $m=0{,}3\mu$, $l=0{,}5\lambda$, $p=0{,}1(\lambda+2\mu)$. Дослідимо особливості поширення хвиль при зміні густини середовища за законом (3.18) і (3.20) та вказаними значеннями параметрів анізотропії.

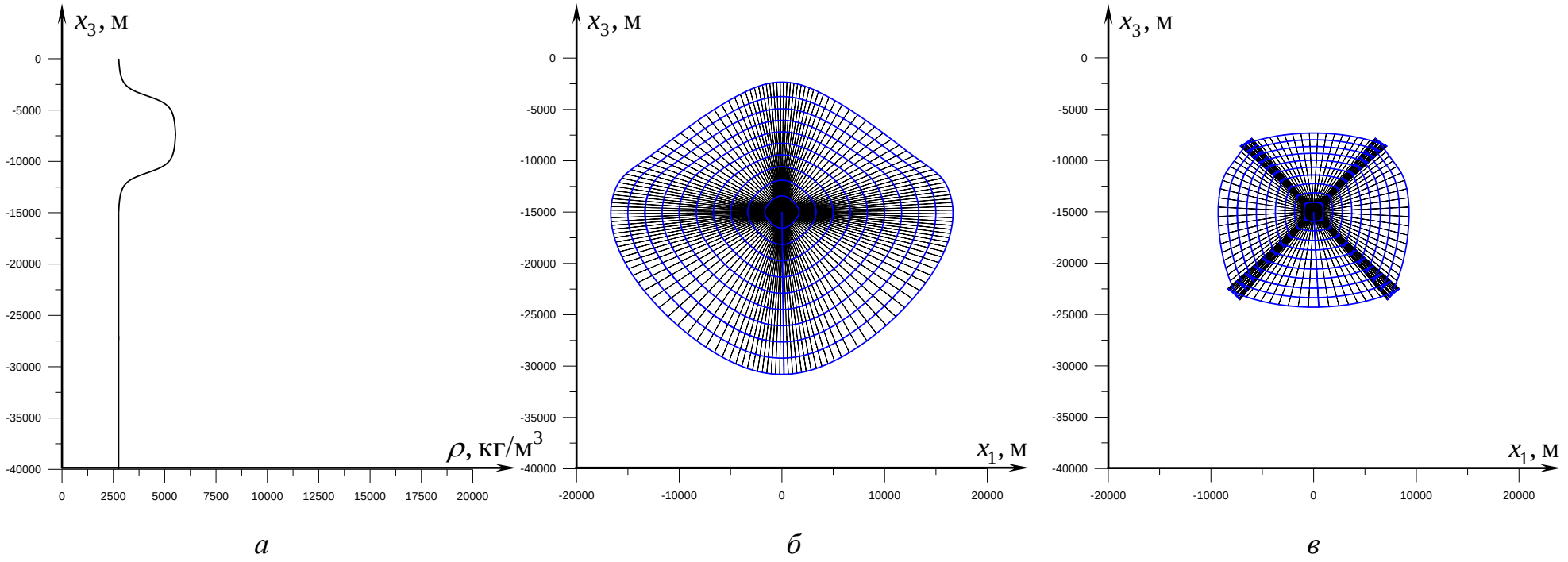
На рис. 3.63,б і рис. 3.63,в проілюстровані форми перерізів квазіпопоздовжніх та квазіпоперечних хвиль, при зміні функції $\rho(x_3)$ за законом (3.18), відповідно, а на рис. 3.64,б і 3.64,в – за законом (3.20).

В цих випадках збільшення щільності та довжини шару неоднорідності впливає на зменшення швидкості розповсюдження хвиль в додатному напрямі осі Ox_3, а вибрана комбінація значень l, m і p призводить до збіжності променів qP-хвиль до прямої $x_1 = 0$ і утворення каустик на фронтах qS-хвиль. Таким чином, і в цьому випадку шар підвищеної щільності відіграє екрануючу роль в процесі розповсюдження хвиль в неоднорідному анізотропному середовищі.

Так як і у випадку неоднорідного ізотропного середовища, виберемо тепер закон зміни функції $\rho(x_3)$ таким чином, щоб утворився шар зниженої щільності. Нехай, наприклад, $\rho(x_3)$ змінюється за законом

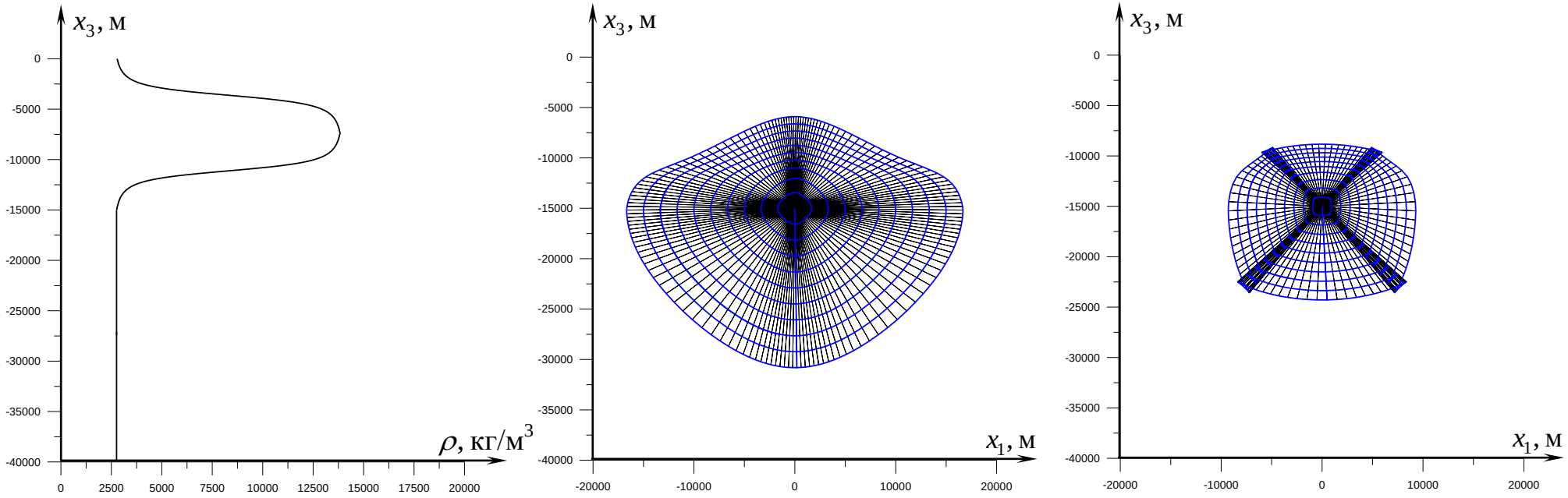
$$\rho = \rho_0\left(0{,}7 + 1{,}2\cdot 10^{-3}\left(-\sqrt{1\cdot 10^6 + (x_3 + 11250)^2} + \sqrt{1\cdot 10^6 + (x_3 + 11000)^2}\right)\right),$$
$$x_3 \in [-15000; -7500);$$
$$\rho = \rho_0\left(0{,}7 + 1{,}2\cdot 10^{-3}\left(\sqrt{1\cdot 10^6 + (x_3 + 3750)^2} - \sqrt{1\cdot 10^6 + (x_3 + 3500)^2}\right)\right), \qquad (3.21)$$
$$x_3 \in [-15000; -7500);$$
$$\rho = \rho_0, \qquad x_3 < -15000.$$

У цьому випадку густина зменшується від ρ_0=2760 кг/м^3 до $\rho_{\min}$=1100 кг/м^3 і графік її зміни показаний на рис. 3.65,а.



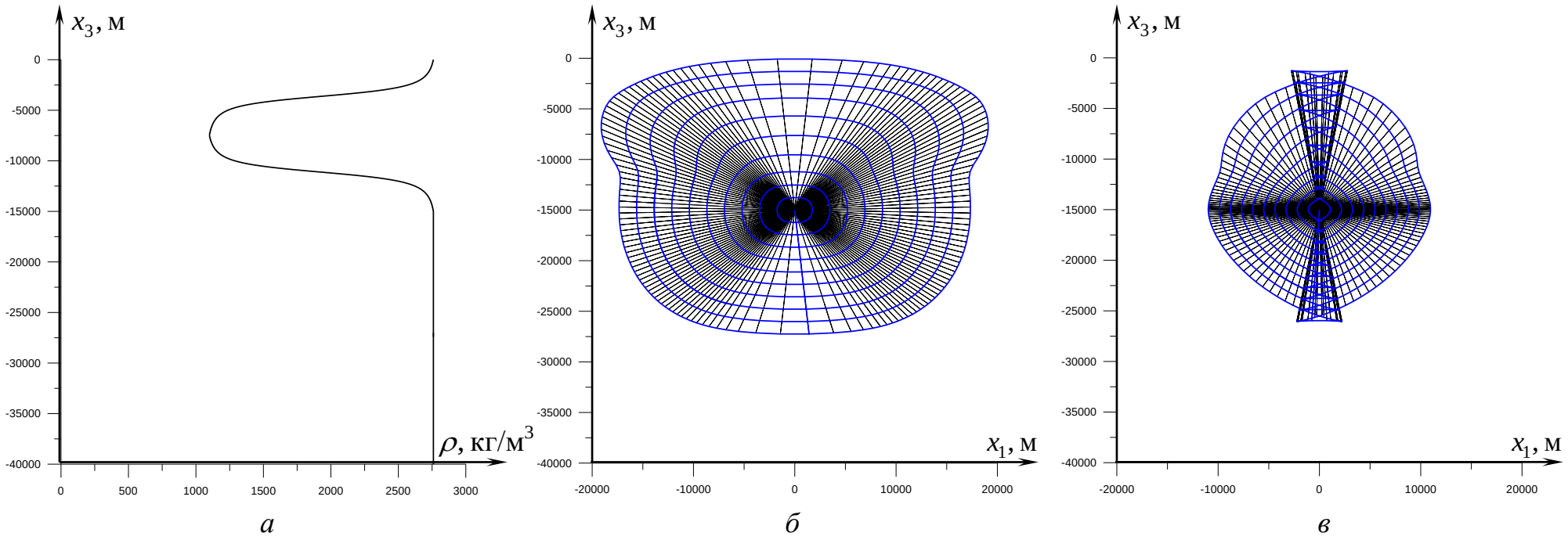
а *б* *в*

Рисунок 3.63 − Графік зміни функції густини $\rho(x_3)$ (а) та схеми перебудови променів і фронтів qP - (б) і qS -хвиль (в) в неоднорідному трансверсально-ізотропному середовищі при зміні густини середовища за законом (3.18) та значеннях $m = 0{,}3\mu$, $l = 0{,}5\lambda$, $p = 0{,}1(\lambda + 2\mu)$



а *б* *в*

Рисунок 3.64 – Графік зміни функції густини $\rho(x_3)$ (а) та схеми перебудови променів і фронтів qP - (б) і qS -хвиль (в) в неоднорідному трансверсально-ізотропному середовищі при зміні густини середовища за законом (3.20) та значеннях $m = 0{,}3\mu$, $l = 0{,}5\lambda$, $p = 0{,}1(\lambda + 2\mu)$



а *б* *в*

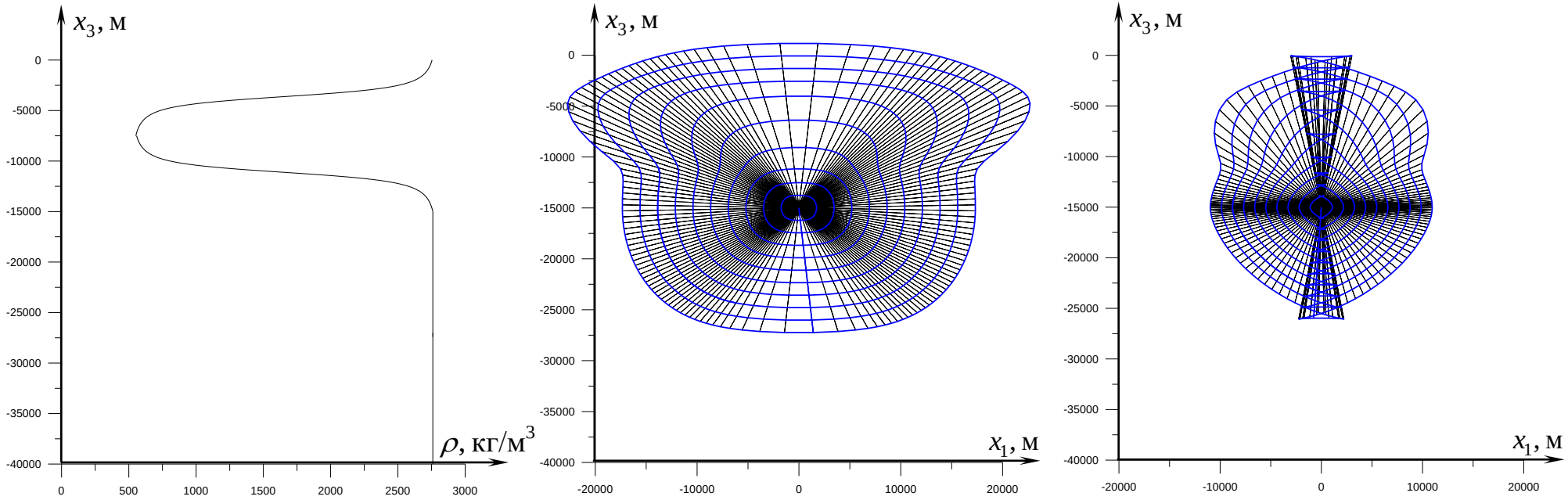
Рисунок 3.65 – Графік зміни функції густини $\rho(x_3)$ (а) та схеми перебудови променів і фронтів qP - (б) і Sq -хвиль (в) в неоднорідному трансверсально-ізотропному середовищі при зміні густини середовища за законом (3.21) та значеннях $m = 0{,}1\mu$, $l = 0{,}3\lambda$, $p = 0{,}5(\lambda + 2\mu)$

При цьому фронт *qP*-хвилі, як можемо бачити з рис. 3.65,б, видовжується в горизонтальному напрямі та відхиляється від площини $x_3 = 0$, що рівноцінно екрануванню хвилі від такої зони. Зауважимо, що виявлений ефект яскравіше проявляється у випадку зміни $\rho(x_3)$ за законом

$$\rho = \rho_0\left(0{,}6 + 1{,}7\cdot 10^{-3}\left(-\sqrt{1\cdot 10^6 + (x_3 + 11250)^2} + \sqrt{1\cdot 10^6 + (x_3 + 11000)^2}\right)\right),$$
$$x_3 \in [-15000; -7500);$$
$$\rho = \rho_0\left(0{,}6 + 1{,}7\cdot 10^{-3}\left(\sqrt{1\cdot 10^6 + (x_3 + 3750)^2} - \sqrt{1\cdot 10^6 + (x_3 + 3500)^2}\right)\right), \qquad (3.22)$$
$$x_3 \in [-15000; -7500);$$
$$\rho = \rho_0, \qquad x_3 < -15000.$$

Тут мінімально можливе значення густини дорівнює $\rho_{\min}$=558 кг/м^3 (рис. 3.66,а). Як показано на рис. 3.66,б, при проходженні такого шару неоднорідності промені квазіпоздовжньої хвилі помітно відхиляються, а фронти видовжуються вздовж площини $x_3 = 0$. Що ж стосується *qS*-хвиль, то тут можемо спостерігати суттєву перебудову її променевої сітки. Вона супроводжується зміною обрису фронтового контуру та появою каустик на яких, як випливає з променевої теорії, інтенсивність напружень, в рамках ідеальної теорії пружності, зростає до нескінченності. Картина напруженого стану пружного середовища для цих *qS*-хвиль є досить складною і на ній досить складно визначити будь-які загальні закономірності.

Отже, в результаті утворення шару зниженої щільності, можемо відзначити виникнення відхиляючих властивостей такого шару неоднорідності. Варто звернути увагу на те, що при наявності шару підвищеної щільності ефект екранування виникає за рахунок зменшення променевої швидкості. У випадку ж шару зменшеної густини такий ефект проявляється у вигляді видовження фронту в горизонтальному напрямі, хоча при цьому зростає швидкість поширення хвилі.



а *б* *в*

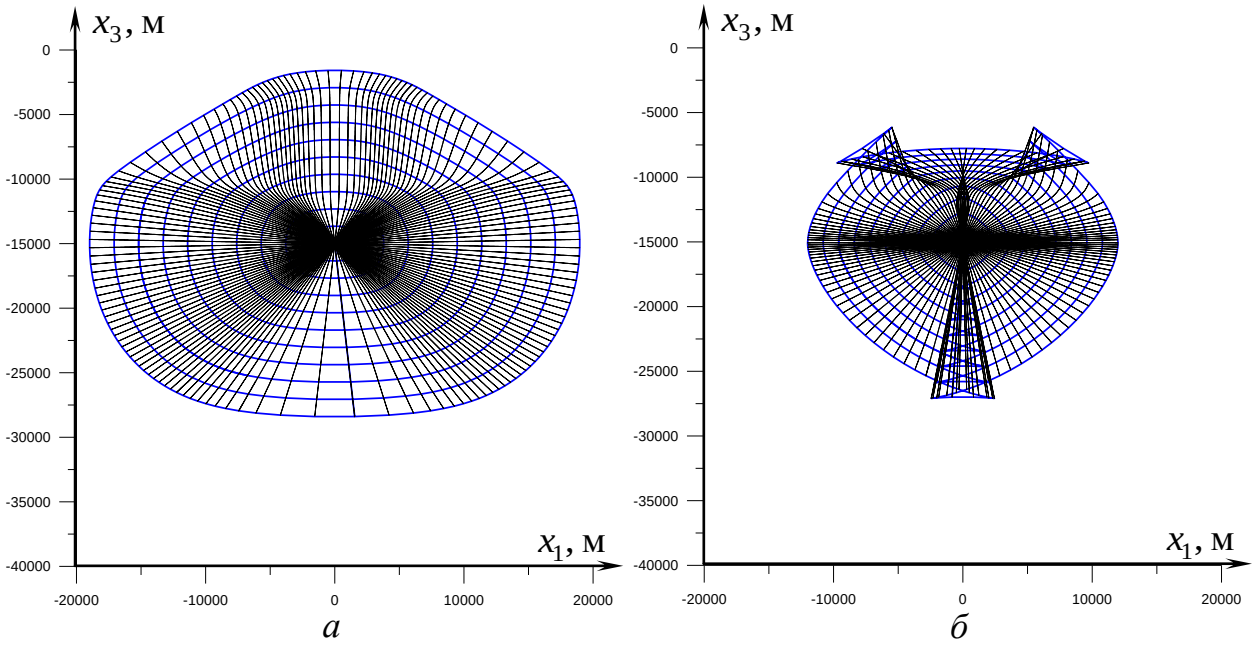
Рисунок 3.66 – Графік зміни функції густини $\rho(x_3)$ (а) та схеми перебудови променів і фронтів qP - (б) і qS -хвиль (в) в неоднорідному трансверсально-ізотропному середовищі при зміні густини середовища за законом (3.22) та значеннях $m = 0{,}1\mu$, $l = 0{,}3\lambda$, $p = 0{,}5(\lambda + 2\mu)$

Як вже зазначалось раніше, найчастіше властивості неоднорідності середовища проявляються зі зміною параметра *m*, який входить до двох діагональних елементів матриці пружних сталих (3.3). Нехай тепер саме *m* змінюється за законом неперервної функції, а густина та два інших параметра анізотропії *l* і *p* залишаються незмінними. Припустимо, що $m(x_3)$, наприклад, змінюється за законом

$$
\begin{gathered}
m = m_0\mu = \\
= \left(m^0 + \beta\left(\sqrt{1\cdot 10^6 + (x_3 + 11250)^2} - \sqrt{1\cdot 10^6 + (x_3 + 11000)^2}\right) + 0{,}4\right)\mu, \\
x_3 \in [-15000; -7500); \\
m = m_0\mu = \\
= \left(m^0 + \beta\left(-\sqrt{1\cdot 10^6 + (x_3 + 11250)^2} + \sqrt{1\cdot 10^6 + (x_3 + 11000)^2}\right) + 0{,}4\right)\mu, \\
x_3 \in [-15000; -7500); \\
m = m_0\mu, \quad x_3 < -15000,
\end{gathered}
\tag{3.23}
$$

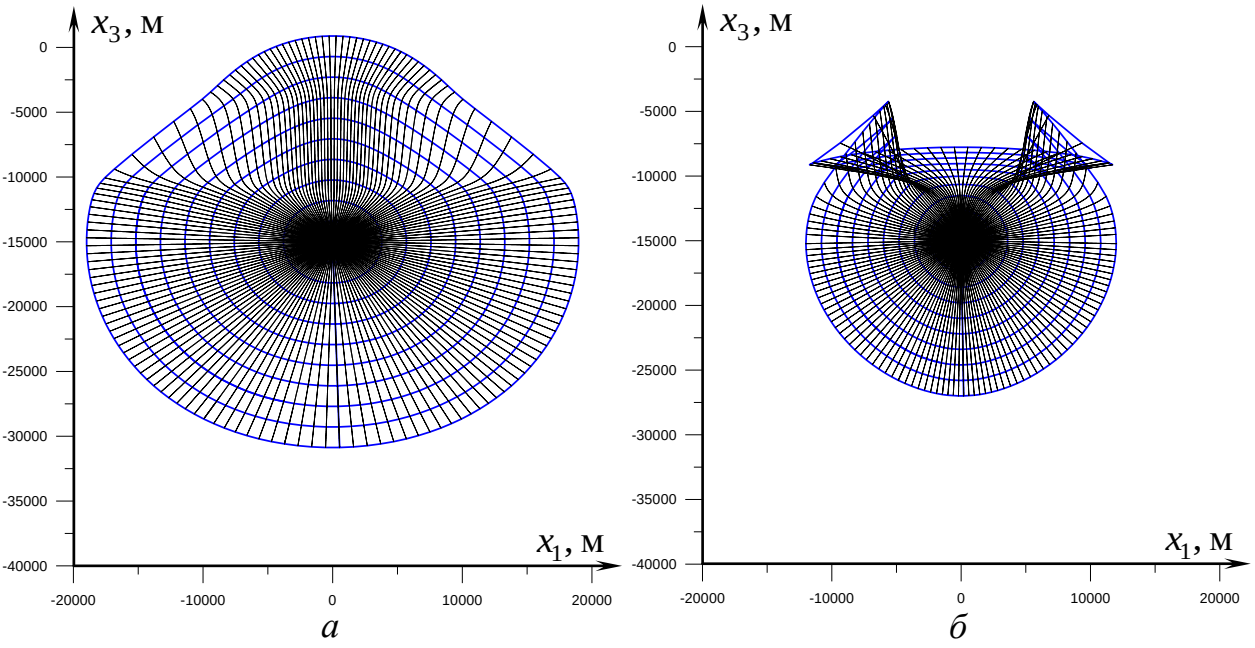
де $\beta = 1{,}66\cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$. В цьому випадку значення *m* спочатку неперервно зростає від $m=m^0\mu$ до $m_{\max} = m^0_{\max}\mu$, а потім зменшується до початкового значення $m=m^0\mu$, тобто утворюється шар неоднорідності. Нехай густина середовища дорівнює 2760 кг/м^3, а m^0=0,1, *l*=0,3, *p*=0,5$(\lambda+2\mu)$. На рис. 3.67,а і 3.67,б зображено перебудову променів і фронтів *qP*- і *qS*-хвиль для такого набору параметрів. Тут фронти перестають бути сферичними, промені втрачають свою прямолінійність і на фронтах квазіпоперечної хвилі утворюються каустики.

Надамо *l*, *p* інших значень. Нехай, наприклад, *l*=0,5, *p*=0,3$(\lambda+2\mu)$. Як видно з рис. 3.68,а, при таких вихідних даних відбувається згущення променів вздовж додатного напряму осі Ox_3, при цьому, варто зауважити, що



а *б*

Рисунок 3.67 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра m за законом (3.23) та значеннях $m^0 = 0{,}1,\ l = 0{,}3\lambda,\ p = 0{,}5(\lambda + 2\mu)$



а *б*

Рисунок 3.68 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра m за законом (3.23) та значеннях $m^0 = 0{,}1,\ l = 0{,}5\lambda,\ p = 0{,}3(\lambda + 2\mu)$

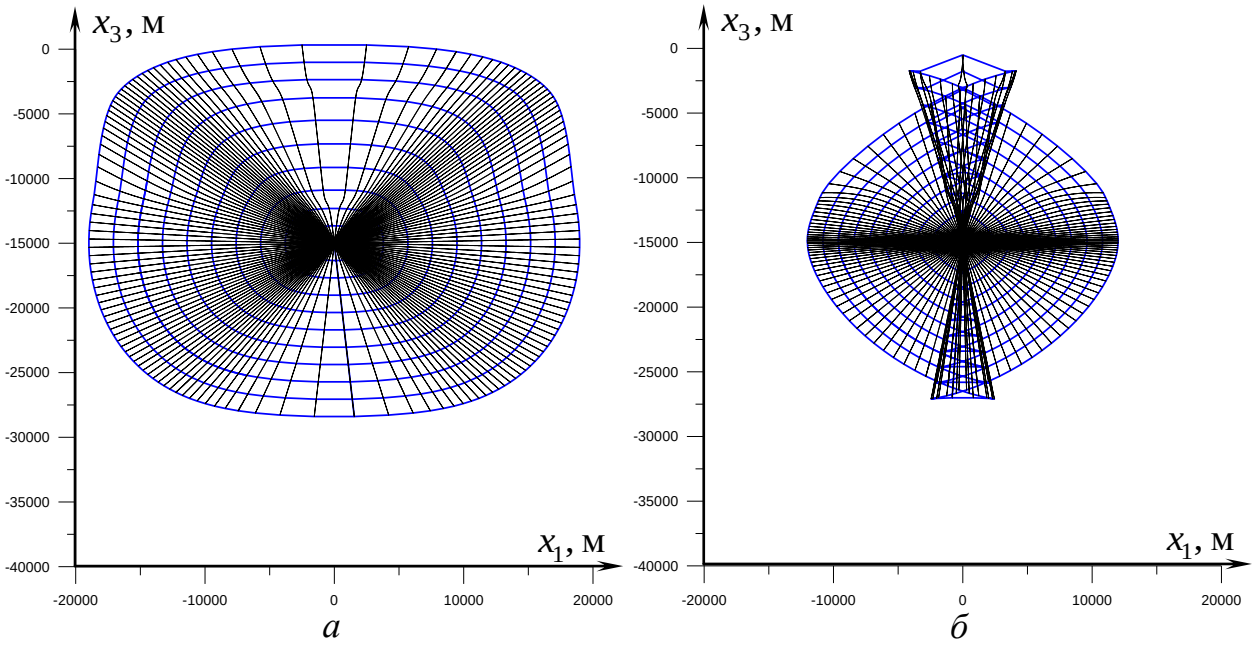
зміна $m(x_3)$ за законом (3.23) не впливає на швидкість поширення хвилі. Тому тут важко виділити екрануючі властивості такого шару неоднорідності.

Підберемо тепер функцію $m(x_3)$ таким чином, щоб спочатку значення m зменшувалось, а потім після досягнення $m_{\min}$ зростало. Нехай, наприклад,

$$
\begin{gathered}
m = m_0\mu = \\
= \left(m^0 + \beta\left(-\sqrt{1\cdot 10^6 + \left(x_3 + 11250\right)^2} + \sqrt{1\cdot 10^6 + \left(x_3 + 11000\right)^2}\right) + 0{,}4\right)\mu, \\
x_3 \in \left[-15000; -7500\right); \\
m = m_0\mu = \\
= \left(m^0 + \beta\left(\sqrt{1\cdot 10^6 + \left(x_3 + 11250\right)^2} - \sqrt{1\cdot 10^6 + \left(x_3 + 11000\right)^2}\right) + 0{,}4\right)\mu, \\
x_3 \in \left[-15000; -7500\right); \\
m = m_0\mu, \qquad x_3 < -15000,
\end{gathered}
\tag{3.24}
$$

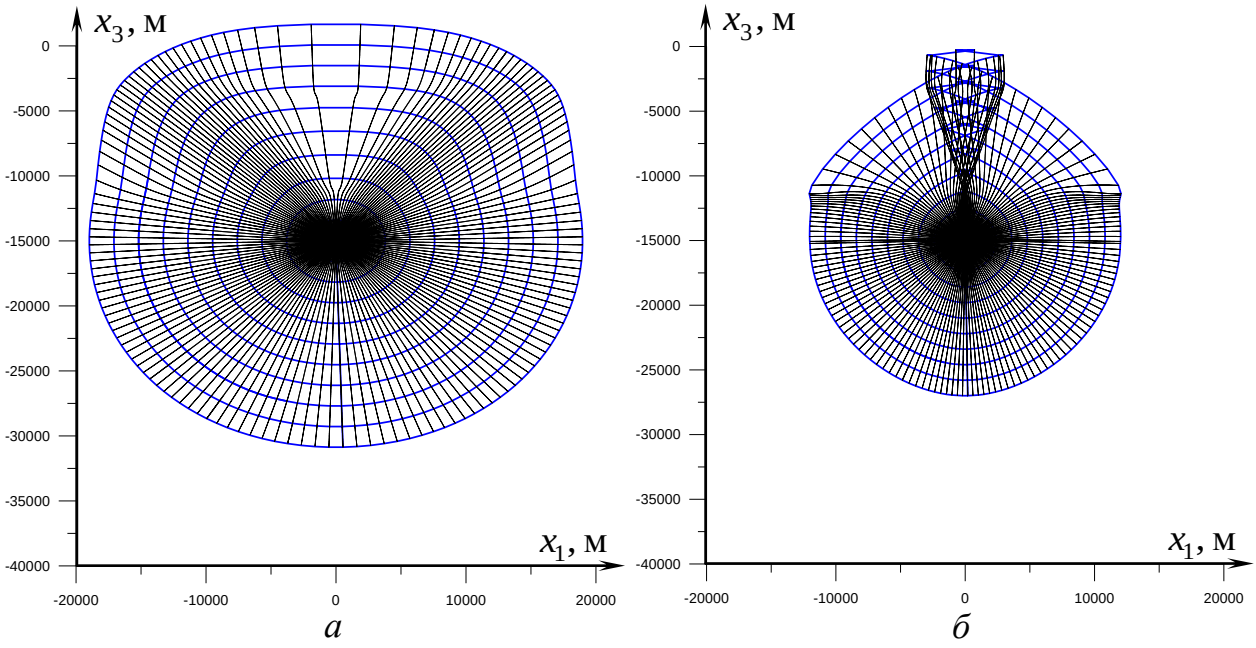
де $\beta = 2{,}49\cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$. На рис. 3.69 – 3.71 зображені сітки променів та фронтів *qP*- і *qS*-хвиль при наступних варіаціях m^0, l і p: рис. 3.69 - m^0=0,1, l=0,3λ і p=0,5$(\lambda+2\mu)$; рис. 3.70 - m^0=0,1, l=0,5λ і p=0,3$(\lambda+2\mu)$; рис. 3.71 - m^0=–0,3, l=–0,5λ і p=0,1$(\lambda+2\mu)$.

Відзначаємо, що у всіх наведених випадках спостерігаємо ефект відхилення променів квазіпоздовжніх хвиль (рис. 3.69-3.71, позиція а) від додатного напряму осі Ox_3. Для *qS*-хвиль (рис. 3.69-3.71, позиція б) є характерним утворення каустик. Результатом такої поведінки променів *qP*-хвиль є виникнення ефекту екранування розривної хвилі при наявності в пружному середовищі шару неоднорідності утвореного в результаті неперервної зміни параметра анізотропії m за законом неперервної функції (3.24), що передбачає спочатку зменшення значення m, а потім його повернення до початкового значення.



а *б*

Рисунок 3.69 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра m за законом (3.24) та значеннях $m^0 = 0{,}1$, $l = 0{,}3\lambda$, $p = 0{,}5(\lambda + 2\mu)$



а *б*

Рисунок 3.70 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра m за законом (3.24) та значеннях $m^0 = 0{,}1$, $l = 0{,}5\lambda$, $p = 0{,}3(\lambda + 2\mu)$

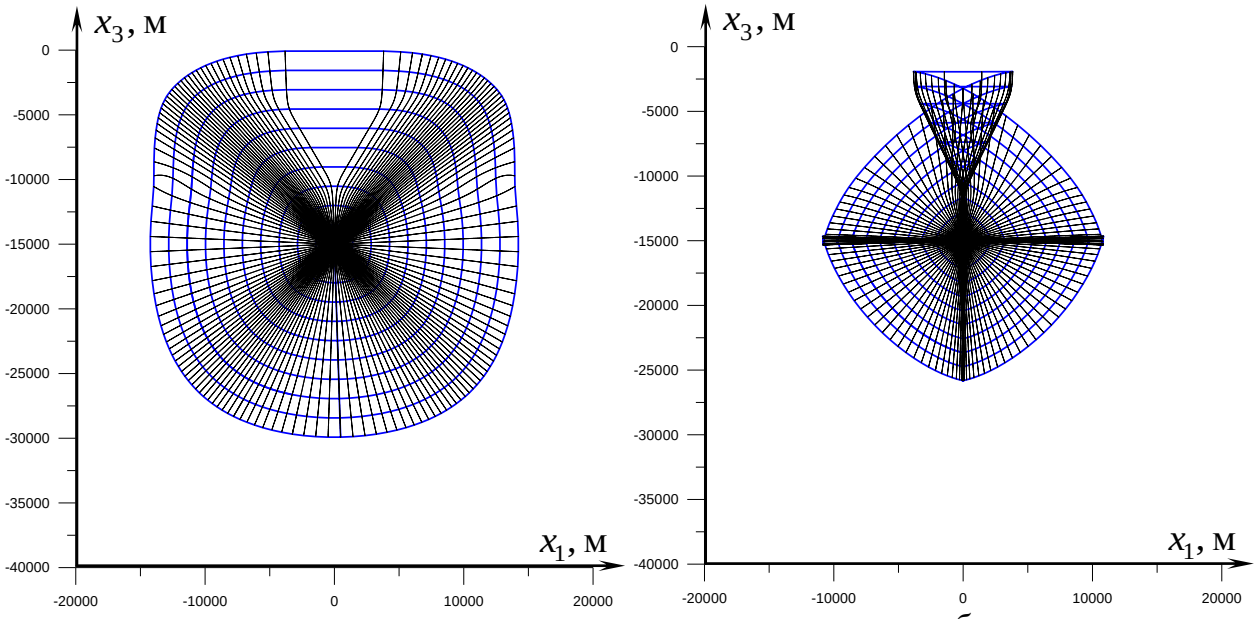


Рисунок 3.71 − Система променів та фронтів квазіпоздовжньої (а) та квазіпоперечної (б) хвилі при зміні параметра m за законом (3.24) та значеннях $m^0 = -0{,}3$, $l = -0{,}5\lambda$, $p = -0{,}1(\lambda + 2\mu)$

Також було виконане дослідження впливу шаруватості системи за рахунок зміни величин l і p.

Однак результати розрахунків показали, що їх варіювання в межах $l \in \left[1{,}02 \cdot 10^{10}; 1{,}7 \cdot 10^{10}\right]$ Па, $p \in \left[1{,}53 \cdot 10^{11}; 1{,}65 \cdot 10^{11}\right]$ Па при $\Delta l \approx 0{,}16$ і $\Delta p \approx 0{,}12$, не призвело до помітного впливу на характер зміни хвильового поля. Тому в роботі ці результати не приводяться.

3.4 Висновки до розділу 3

1. В третьому розділі на основі викладеної вище методики досліджені питання перебудови систем променів і фронтів розривних хвиль в пружних середовищах, механічні параметри яких є неперервними елементарними функціями просторових координат або мають умовно шарувату структуру.

2. Продемонстровано, що якщо елементи тензора пружних сталих середовища змінюються за квадратичним законом, то в залежності від знаків та значень її коефіцієнтів можуть виникати явища розбіжності променів, їх викривлення та відхилення від певної зони середовища, зменшення швидкості поширення хвиль та зміна напряму їх розповсюдження. При цьому виникають зони геометричної збіжності і розбіжності променів та, пов'язаних з ними ділянок, збільшення та зменшення інтенсивності хвилі.

Показано, що трансформування хвилі супроводжується лише поворотом вектора поляризації без зміни його типу та без додавання хвиль нової поляризації.

3. У випадках зміни компонентів тензора пружних сталих за законом тригонометричних функцій фронти перестають бути опуклими, промені квазіпоздовжніх хвиль стають більш криволінійними, а на фронтах qS -хвиль відбувається утворення каустик, які супроводжуються збільшенням інтенсивності хвиль.

4. Методами комп'ютерного моделювання досліджені явища проходження розривних хвиль через ізотропні та трансверсально-ізотропні середовища які мають умовно шарувату структуру зі збільшеною (зменшеною) щільністю шару, при умові, що всі коефіцієнти функцій неоднорідностей залишаються диференційованими за всіма просторовими змінними. Показано, що такий шар неоднорідності може відігравати роль екрана, відхиляючого хвильовий фронт.

РОЗДІЛ 4
ЕКРАНУВАННЯ РОЗРИВНИХ ХВИЛЬ В ШАРУВАТО-НЕОДНОРІДНИХ ПРУЖНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

4.1 Екранування слабких ударних хвиль в ізотропних середовищах з однією площиною розділу їх властивостей

Дослідження лінійних і нелінійних процесів деформування і розповсюдження хвиль різної фізичної природи в шаруватих середовищах періодичної і неперіодичної структури вельми обширні за тематикою і охоплюють широке коло важливих питань. Зростаючий інтерес до цієї проблематики останніми роками пов’язаний з широким впровадженням в сучасну будівельну техніку шаруватих композиційних матеріалів та необхідністю розрахунків на міцність та стійкість фундаментів споруд на багатошарових ґрунтових породах. Одним із основоположником досліджень в цьому напрямі можна вважати радянського вченого Бреховських Л.М. В свої монографії [14] він систематично дослідив поширення пружних хвиль в шарах атмосфери, світового океану, земної кори. При цьому виявився досить доцільним метод подання матеріалу: одночасний виклад теорій розповсюдження пружних та електромагнітних хвиль, в зв’язку із загальністю застосованих для обох випадків методів. Вагоме значення має і та обставина, що в результаті такого паралельного викладу матеріалу одні галузі знань збагачуються методами, застосовуваними в інших. Так, наприклад, метод імпеданса, розроблений в акустиці та радіотехніці, досить успішно застосовувався при проведенні розрахунків багатошарового просвітлення оптичних систем та інтерференційних фільтрів, для розробки геофізичної апаратури.

В даному розділі дисертації розглянуто коло задач поширення плоских хвиль в дискретно-шарувато середовищах. Досліджені аспекти відбиття імпульсу з плоским фронтом від плоскої границі, ефекти збільшення та

зменшення його інтенсивності, а також ефекти квазіповного внутрішнього відбиття.

Задача визначення динамічних характеристик на фронтах відбитих та заломлених розривних хвиль після взаємодії падаючої хвилі з площиною розділу двох пружних середовищ має значне прикладне значення, оскільки в результаті такої взаємодії інтенсивності перетворених хвиль можуть бути як збільшені, так і зменшені, а інколи, в рамках ідеальної теорії пружності, навіть прямувати до нескінченності [1, 40, 159, 162, 169, 185, 195]. В зв'язку з цим встановлені загальні закономірності перетворення розривних хвиль на площинах розділу можуть бути використані не лише для визначення критичних станів пружних хвиль в таких зонах, але також і для їх екранування і динамічного захисту об'єктів, які лежать за площиною розділу та чуттєвих до динамічної взаємодії. З метою визначення умов більш ефективного екранування розривної хвилі розглянемо дві моделі контакту двох пружних середовищ на площині їх розділу. В першій моделі на площині розділу середовища з'єднані з дотриманням умов неперервності нормальних і дотичних напружень і переміщень, у другій моделі використовуються умови контакту з можливим проковзуванням по площині розділу і рівності нулю на ній дотичних напружень.

Розглянемо випадок, коли два пружних ізотропних середовища *I* і *II* розділені площиною *G* (рис. 4.1). Властивості середовищ визначаються наступними механічними параметрами: λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 - пружні константи Ламе, ρ_1, ρ_2 – густини. В якості середовищ *I* і *II* вибрані найбільш поширені в природі гірські породи. Нехай в середовищі *I* на площину *G* під кутом θ_{1-} падає плоска поздовжня *P*-хвиля з одиничним значенням розриву поздовжньої швидкості $\dot{u}_{1-}$. Прослідкуємо, як ця хвиля проникає в середовище *II* та які інтенсивності мають новосформовані хвилі.

Зазначимо, що при падінні на плоску границю розділу двох різних середовищ плоска хвиля частково відбивається, частково проникає в друге

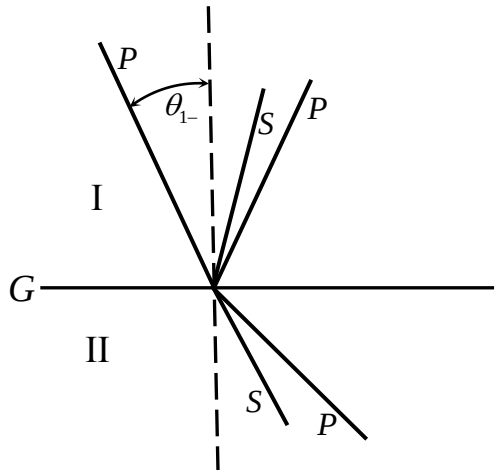


Рисунок 4.1 – Схема орієнтації променів падаючої (P), відбитих $(S$ і $P)$ і заломлених $(S$ і $P)$ хвиль в пружних середовищах I і II

середовище, залишаючись плоскою, змінюючи при цьому свій напрям розповсюдження (заломлюється). Кути, утворені напрямом падаючої та заломленої хвиль з перпендикуляром до границі розділу середовищ, називаються, відповідно, кутом падіння, кутом відбиття і кутом заломлення. Згідно закону відбиття, кут падіння дорівнює куту падіння, а згідно закону заломлення, синус кута падіння відноситься до синуса кута падіння, як швидкість хвилі в першому середовищі до її швидкості в другому середовищі.

Для виведення рівнянь динамічної взаємодії розривної хвилі з площиною G з'єднання двох середовищ можна скористатись двома еквівалентними підходами. В першому підході [119, 123] використовуються умови нерозривності на G переміщень $\mathbf{u}$

$$\left(\mathbf{u}^{(i)} + \mathbf{u}^{(r)}\right)\Big|_G = \mathbf{u}^{(t)}\Big|_G \qquad (4.1)$$

і напружень σ

$$\left(\hat{\sigma}^{(i)} \cdot \mathbf{n} + \hat{\sigma}^{(r)} \cdot \mathbf{n}\right)\Big|_G = \hat{\sigma}^{(t)} \cdot \mathbf{n}\Big|_G \qquad (4.2)$$

де індексами *i, r* і *t* позначені параметри падаючої, відбитої та заломленої хвиль, відповідно;

n - вектор одиничної нормалі до площини *G*.

В іншому підході, викладеному в роботах [41, 42], використовуються умови збереження імпульсу та нерозривності швидкостей частинок. В даному випадку, так як відбувається розгляд динамічної задачі про швидкість переміщень, зручніше використати другий підхід.

Нехай плоска розривна хвиля, яка має профіль прямокутного імпульсу довжиною $\alpha_1 \Delta t$, де α_1 - швидкість падаючої поздовжньої хвилі, падає під кутом θ_1 на площину контакту *G* (рис. 4.2). Надалі величинам, які мають стосунок до хвиль доударної взаємодії, будемо присвоювати знак «-», а параметрам хвиль після взаємодії – знаком «+». На фронті падаючої хвилі виділимо ділянку, яка при падінні спирається на відрізок границі *AB* одиничної довжини. Порахуємо імпульс, який несе включений в неї пружний елемент,

$$\Delta\mathbf{Q}_{1-} = \alpha_1 \Delta t \rho_1 \dot{u}_{1-} \cos\theta_{1-} \left(\sin\theta_{1-}\mathbf{i} - \cos\theta_{1-}\mathbf{j}\right),$$

де $\alpha_1 = \sqrt{(\lambda_1 + 2\mu_1)/\rho_1}$ - швидкість падаючої поздовжньої хвилі в *I* середовищі;

θ_{1-} - кут між перпендикуляром до поверхні розділу середовища і напрямом поширення падаючої поздовжньої хвилі.

Так як фронт хвилі падає на площину *G* розділу двох середовищ з різними механічними властивостями, то виникають дві відбиті $\left(P^{(r)} \text{ і } S^{(r)}\right)$ хвилі та дві заломлені $\left(P^{(t)} \text{ і } S^{(t)}\right)$ - хвилі. Тоді імпульси пружних елементів, відповідно, відбитих поздовжніх та поперечних хвиль будуть рівними

$$\Delta\mathbf{Q}_{1+} = \alpha_1 \Delta t \rho_1 \dot{u}_{1+} \cos\theta_{1+} \left(\sin\theta_{1+}\mathbf{i} + \cos\theta_{1+}\mathbf{j}\right) + \\ + \beta_1 \Delta t \rho_1 \dot{v}_{1+} \cos\psi_{1+} \left(\cos\psi_{1+}\mathbf{i} - \sin\psi_{1+}\mathbf{j}\right), \tag{4.3}$$

де α_1 - швидкість відбитої поздовжньої хвилі в *Gc* середовищі;

θ_{1+} - кут між перпендикуляром і напрямом поширення відбитої поздовжньої хвилі;

$\beta_1 = \sqrt{\mu_1/\rho_1}$ - швидкість відбитої поперечної хвилі в *I* середовищі;

ψ_{1+} - кут між перпендикуляром і напрямом поширення відбитої поперечної хвилі.

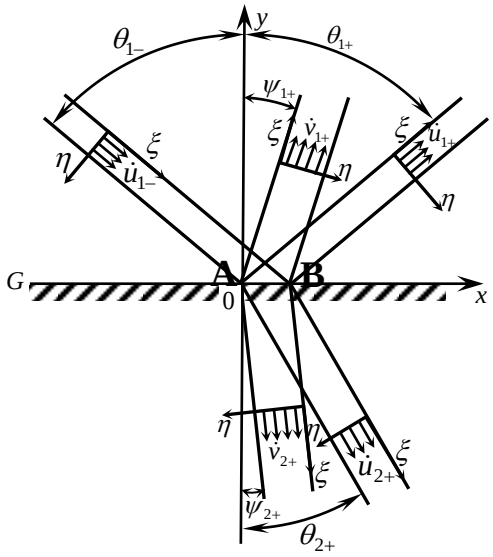


Рисунок 4.1 – Схема дифракції плоскої хвилі, падаючої на площину *G* розділу двох середовищ

А елементи заломлених (*P*- і *S*-) хвиль містять таку кількість імпульсу

$$\Delta\mathbf{Q}_{2+} = \alpha_2 \Delta t \rho_2 \dot{u}_{2+} \cos\theta_{2+} \left(\sin\theta_{2+}\mathbf{i} - \cos\theta_{2+}\mathbf{j}\right) + \\ + \beta_2 \Delta t \rho_2 \dot{v}_{2+} \cos\psi_{2+} \left(-\cos\psi_{2+}\mathbf{i} - \sin\psi_{2+}\mathbf{j}\right), \tag{4.4}$$

де $\alpha_2 = \sqrt{(\lambda_2 + 2\mu_2)/\rho_2}$ - швидкість заломленої поздовжньої хвилі в *II* середовищі;

θ_{2+} - між перпендикуляром і заломленою поздовжньою хвилею;

$\beta_2 = \sqrt{\mu_2/\rho_2}$ - швидкості заломленої поперечної хвилі в *II* середовищі;

ψ_{2+} - між перпендикуляром і заломленою поперечною хвилею.

Використовуючи умову збереження імпульсу при ударі $\Delta\mathbf{Q}_{1-} = \Delta\mathbf{Q}_{1+} + \Delta\mathbf{Q}_{2+}$, побудуємо дві скалярні рівності в проекціях на осі *Ox* і *Oy*. Як результат отримуємо наступні співвідношення:

$$\begin{gathered}\alpha_1\rho_1 \sin\theta_{1+}\cos\theta_{1+}\dot{u}_{1+} + \beta_1\rho_1\cos^2\psi_{1+}\dot{v}_{1+} + \\ + \alpha_2\rho_2 \sin\theta_{2+}\cos\theta_{2+}\dot{u}_{2+} - \beta_2\rho_2\cos^2\psi_{2+}\dot{v}_{2+} = \alpha_1\rho_1\sin\theta_{1-}\cos\theta_{1-}\dot{u}_{1-}, \\ \alpha_1\rho_1\cos^2\theta_{1+}\dot{u}_{1+} - \beta_1\rho_1\sin\psi_{1+}\cos\psi_{1+}\dot{v}_{1+} - \\ - \alpha_2\rho_2\cos^2\theta_{2+}\dot{u}_{2+} - \beta_2\rho_2\sin\psi_{2+}\cos\psi_{2+}\dot{v}_{2+} = -\alpha_1\rho_1\cos^2\theta_{1-}\dot{u}_{1-}\end{gathered} \tag{4.5}$$

відносно чотирьох шуканих швидкостей $\dot{u}_{1+}, \dot{v}_{1+}, \dot{u}_{2+}, \dot{v}_{2+}$. Відзначимо, що такі рівняння також отримаємо якщо використаємо умови (4.2).

Для виведення ще двох рівнянь використаємо другу умову розв'язку даної задачі – умову нерозривності швидкостей частинок $\left(\dot{\mathbf{U}}_{1-} + \dot{\mathbf{U}}_{1+}\right)\big|_G = \dot{\mathbf{U}}_{2+}\big|_G$.

В нашому випадку

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{U}}_{1-} = \dot{u}_{1-}\left(\sin\theta_{1-}\mathbf{i} - \cos\theta_{1-}\mathbf{j}\right), \\ \dot{\mathbf{U}}_{1+} = \dot{u}_{1+}\left(\sin\theta_{1+}\mathbf{i} + \cos\theta_{1+}\mathbf{j}\right) + \dot{v}_{1+}\left(\cos\psi_{1+}\mathbf{i} - \sin\psi_{1+}\mathbf{j}\right), \\ \dot{\mathbf{U}}_{2+} = \dot{u}_{2+}\left(\sin\theta_{2+}\mathbf{i} - \cos\theta_{2+}\mathbf{j}\right) + \dot{v}_{1+}\left(-\cos\psi_{2+}\mathbf{i} - \sin\psi_{2+}\mathbf{j}\right).\end{gathered} \tag{4.6}$$

Спроектувавши співвідношення (4.6) на осі *Oy* і *Ox*, отримаємо рівності

$$\begin{gathered}\sin\theta_{1+}\dot{u}_{1+} + \cos\psi_{1+}\dot{v}_{1+} - \sin\theta_{2+}\dot{u}_{2+} + \cos\psi_{2+}\dot{v}_{2+} = -\sin\theta_{1-}\dot{u}_{1-}, \\ \cos\theta_{1+}\dot{u}_{1+} - \sin\psi_{1+}\dot{v}_{1+} + \cos\theta_{2+}\dot{u}_{2+} + \sin\psi_{2+}\dot{v}_{2+} = \cos\theta_{1-}\dot{u}_{1-}.\end{gathered} \tag{4.7}$$

Зауважимо, що для визначення значень кутів заломлених та відбитих хвиль використовується закон Снеліуса

$$\frac{\sin\theta_{1-}}{\alpha_1}=\frac{\sin\theta_{1+}}{\alpha_1}=\frac{\sin\psi_{1+}}{\beta_1}=\frac{\sin\theta_{2+}}{\alpha_2}=\frac{\sin\psi_{2+}}{\beta_2}.$$

Таким чином рівняння (4.5) і (4.7) утворюють систему для визначення чотирьох невідомих величин швидкостей $\dot{u}_{1+},\dot{v}_{1+},\dot{u}_{2+},\dot{v}_{2+}$. Нижче для дослідження явища відбиття-заломлення використовується система (4.5), (4.7), яка дає змогу безпосередньо обчислити швидкості частинок пружних середовищ на фронтах відповідних хвиль.

4.1.1 Взаємодія плоскої розривної хвилі при її нормальному падінні на площину розділу двох середовищ

Оскільки розглядувані явища досліджуються в рамках лінійної теорії пружності, зручно в якості вихідних впливів вибирати падаючі розривні хвилі з одиничними значеннями розривів швидкостей частинок на поверхнях фронтів у тих одиницях, в яких розв'язується задача. В одиницях СІ розмірність цих швидкостей вимірюється в м/с.

Спочатку розглянемо випадок нормального падіння P_{1-}-хвилі інтенсивністю $\dot{u}_{1-}=1$ м/с на площину G. При цьому формується лише одна відбита P_{1+}-хвиля і одна заломлена P_{2+}-хвиля. Тоді система (4.5) і (4.7) зводиться до системи двох рівнянь

$$\begin{gathered}\alpha_1\rho_1\dot{u}_{1+}-\alpha_2\rho_2\dot{u}_{2+}=-\alpha_1\rho_1\dot{u},\\ \dot{u}_{1+}+\dot{u}_{2+}=\dot{u}_{1-}.\end{gathered}\qquad(4.8)$$

Вона має розв'язок

$$\dot{u}_{1+} = \frac{-\alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2}{\alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2}\dot{u}_{1-}, \qquad \dot{u}_{2+} = \frac{2\alpha_1\rho_1}{\alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2}\dot{u}_{1-}. \tag{4.9}$$

Представимо результати розрахунків на основі формул (4.9) для значень характерних параметрів, які найчастіше зустрічаються в геологічних дослідженнях.

Значення скоростей $\dot{u}_{1+}$ хвиль, відбитих в середовище *I* і швидкостей $\dot{u}_{2+}$ хвиль, які проникли в середовище *II*, для різних послідовностей проходження хвилею середовищ *I* і *II* наведені в таблиці 1. В ній середовища розташовані в порядку збільшення їх акустичної жорсткості $\alpha\rho$.

Проаналізувавши отримані значення в таблиці, можемо бачити, що головна діагональ таблиці ділить квадратну матрицю значень на дві трикутні підматриці. В правій верхній матриці всі значення $\dot{u}_{1+}$ від'ємні, що свідчить про перетворення в першому середовищі падаючої хвилі $\dot{u}_{1-}$ розтягу на відбиту хвилю стиску $\dot{u}_{1+}$ при розглянутих значеннях акустичних жорсткостей в першому $(\alpha_1\rho_1)$ і другому $(\alpha_2\rho_2)$ середовищах. В лівій нижній трикутній матриці всі значення $\dot{u}_{1+}$ додатні. Це означає, що відбита хвиля $\dot{u}_{1+}$ зберігає свій знак, хоча і зменшує значення.

Поздовжня хвиля $\dot{u}_{2+}$, що проникла в друге середовище, зберігає знак падаючої хвилі $\dot{u}_{1-}$ при всіх співвідношеннях між акустичними жорсткостями $\alpha_1\rho_1$ і $\alpha_2\rho_2$, хоча для випадків, які відповідають верхній правій трикутній матриці, значення $\dot{u}_{2+}$ можуть прямувати до 2, той час як для параметрів в лівій нижній трикутній матриці вони зменшуються і можуть прямувати до нуля для значно великих $\alpha_2\rho_2$ і дуже малих $\alpha_1\rho_1$. Таку властивість можна використати з метою екранування падаючої хвилі.

Аналогічні теоретичні міркування можемо провести для випадку коли на площину розділу *G* двох середовищ падає поперечна *S*-хвиля.

Таблиця 4.1 − Дифракція поздовжньої хвилі при її нормальному падінні на площину G розділу двох ізотропних пружних середовищ

	Середовище I / Середовище II		1 Вугілля $\rho=1250$ кг/м^3 $\alpha=1200$ м/с $\alpha\rho=1{,}5\cdot10^6$	2 Вапняк $\rho=2420$ кг/м^3 $\alpha=3430$ м/с $\alpha\rho=8{,}3\cdot10^6$	3 Граніт $\rho=2590$ кг/м^3 $\alpha=4650$ м/с $\alpha\rho=12{,}0\cdot10^6$	4 Пісковик $\rho=2630$ кг/м^3 $\alpha=5220$ м/с $\alpha\rho=13{,}7\cdot10^6$	5 Мармур $\rho=2730$ кг/м^3 $\alpha=5470$ м/с $\alpha\rho=14{,}9\cdot10^6$	6 Роговик $\rho=2590$ кг/м^3 $\alpha=6150$ м/с $\alpha\rho=15{,}9\cdot10^6$	7 Діабаз $\rho=2870$ кг/м^3 $\alpha=5670$ м/с $\alpha\rho=16{,}3\cdot10^6$	8 Сланець $\rho=2930$ кг/м^3 $\alpha=5650$ м/с $\alpha\rho=16{,}6\cdot10^6$	9 Доломіт $\rho=2850$ кг/м^3 $\alpha=6600$ м/с $\alpha\rho=18{,}8\cdot10^6$
			$\dot{u}_{1-}=1,\dot{v}_{1-}=0$	$\dot{u}_{1-}=1,\dot{v}_{1-}=0$	$\dot{u}_{1-}=1,\dot{v}_{1-}=0$	$\dot{u}_{1-}=1,\dot{v}_{1-}=0$	$\dot{u}_{1-}=1,\dot{v}_{1-}=0$	$\dot{u}_{1-}=1,\dot{v}_{1-}=0$	$\dot{u}_{1-}=1,\dot{v}_{1-}=0$	$\dot{u}_{1-}=1,\dot{v}_{1-}=0$	$\dot{u}_{1-}=1,\dot{v}_{1-}=0$
			$\dot{u}_{1+}$, $\dot{u}_{2+}$	$\dot{u}_{1+}$, $\dot{u}_{2+}$	$\dot{u}_{1+}$, $\dot{u}_{2+}$	$\dot{u}_{1+}$, $\dot{u}_{2+}$	$\dot{u}_{1+}$, $\dot{u}_{2+}$	$\dot{u}_{1+}$, $\dot{u}_{2+}$	$\dot{u}_{1+}$, $\dot{u}_{2+}$	$\dot{u}_{1+}$, $\dot{u}_{2+}$	$\dot{u}_{1+}$, $\dot{u}_{2+}$
1	Вугілля $\rho=1250$ кг/м^3, $\alpha=1200$ м/с, $\beta=720$ м/с	$\dot{u}_{1+}$	0	-0,69390	-0,77849	-0,80300	-0,81744	-0,82787	-0,83120	-0,83384	-0,85229
		$\dot{u}_{2+}$	1	1,69390	1,77849	1,80300	1,81744	1,82787	1,83120	1,83384	1,85229
2	Вапняк $\rho=2420$ кг/м^3, $\alpha=3430$ м/с, $\beta=1860$ м/с	$\dot{u}_{1+}$	0,69390	0	-0,1839	-0,2464	-0,2854	-0,3148	-0,3244	-0,3320	-0,3876
		$\dot{u}_{2+}$	0,30610	1	1,18398	1,24640	1,2855	1,31482	1,32443	1,33208	1,38765
3	Граніт $\rho=2590$ кг/м^3, $\alpha=4650$ м/с, $\beta=2900$ м/с	$\dot{u}_{1+}$	0,77849	0,18398	0	-0,0653	-0,1071	-0,1388	-0,1493	-0,1577	-0,2191
		$\dot{u}_{2+}$	0,22151	0,81602	1	1,06538	1,1071	1,13889	1,14936	1,15774	1,21931
4	Пісковик $\rho=2630$ кг/м^3, $\alpha=5220$ м/с, $\beta=2900$ м/с	$\dot{u}_{1+}$	0,80300	0,24640	0,06538	0	-0,0420	-0,0741	-0,0848	-0,0933	-0,1561
		$\dot{u}_{2+}$	0,19700	0,75360	0,93462	1	1,0420	1,07418	1,08481	1,09332	1,15617
5	Мармур $\rho=2730$ кг/м^3, $\alpha=5470$ м/с, $\beta=3100$ м/с	$\dot{u}_{1+}$	0,81744	0,28547	0,10712	0,04202	0	-0,0322	-0,0429	-0,0514	-0,1148
		$\dot{u}_{2+}$	0,18256	0,71453	0,89288	0,95798	1	1,03225	1,04293	1,05149	1,11489
6	Роговик $\rho=2590$ кг/м^3, $\alpha=6150$ м/с, $\beta=3380$ м/с	$\dot{u}_{1+}$	0,82787	0,31482	0,13889	0,07418	0,03225	0	-0,0107	-0,0192	-0,0829
		$\dot{u}_{2+}$	0,17213	0,68518	0,86111	0,92582	0,96775	1	1,01070	1,01927	1,08295
7	Діабаз $\rho=2870$ кг/м^3, $\alpha=5670$ м/с, $\beta=3560$ м/с	$\dot{u}_{1+}$	0,83120	0,32443	0,14936	0,08481	0,0429	0,01070	0	-0,0085	-0,7232
		$\dot{u}_{2+}$	0,16880	0,67557	0,85064	0,91519	0,95707	0,98930	1	1,00858	1,07232
8	Сланець $\rho=2930$ кг/м^3, $\alpha=5650$ м/с, $\beta=3240$ м/с	$\dot{u}_{1+}$	0,83384	0,33208	0,15774	0,09332	0,05149	0,01927	0,00858	0	-0,0638
		$\dot{u}_{2+}$	0,16616	0,66792	0,84226	0,90668	0,94851	0,98073	0,99142	1	1,0638
9	Доломіт $\rho=2850$ кг/м^3, $\alpha=6600$ м/с, $\beta=3630$ м/с	$\dot{u}_{1+}$	0,85229	0,38765	0,21931	0,15617	0,1149	0,08295	0,07232	0,06378	0
		$\dot{u}_{2+}$	0,14771	0,61235	0,78069	0,84383	0,88511	0,91705	0,92768	0,93622	1

В цьому випадку вирази для $\Delta\mathbf{Q}_{1+}$ і $\Delta\mathbf{Q}_{2+}$ залишаються незмінними, а $\Delta\mathbf{Q}_{1-}$ запишемо у вигляді:

$$\Delta\mathbf{Q}_{1-} = \beta_1 \Delta t \rho_1 \dot{v}_{1-} \cos\psi_{1-} \left(-\cos\psi_{1-}\mathbf{i} - \sin\psi_{1-}\mathbf{j}\right) \tag{4.10}$$

Також змінюється вираз $\dot{\mathbf{U}}_{1-}$ в умові нерозривності швидкостей частинок $\left(\dot{\mathbf{U}}_{1-} + \dot{\mathbf{U}}_{1+}\right)\big|_G = \dot{\mathbf{U}}_{2+}\big|_G$.

$$\dot{\mathbf{U}}_{1-} = \dot{v}_{1-}\left(-\cos\psi_{1-}\mathbf{i} - \sin\psi_{1-}\mathbf{j}\right). \tag{4.11}$$

Спроектувавши співвідношення (4.3), (4.4), (4.10) та (4.6), (4.11) на відповідні осі системи координат *xOy*, отримаємо рівності

$$\begin{gathered}
\alpha_1\rho_1\cos^2\theta_{1+}\dot{u}_{1+} - \beta_1\rho_1\sin\psi_{1+}\cos\psi_{1+}\dot{v}_{1+} - \\
-\alpha_2\rho_2\cos^2\theta_{2+}\dot{u}_{2+} - \beta_2\rho_2\sin\psi_{2+}\cos\psi_{2+}\dot{v}_{2+} = -\beta_1\rho_1\cos^2\psi_{1-}\dot{v}_{1-}, \\
\alpha_1\rho_1\sin\theta_{1+}\cos\theta_{1+}\dot{u}_{1+} + \beta_1\rho_1\cos^2\psi_{1+}\dot{v}_{1+} + \\
+\alpha_2\rho_2\sin\theta_{2+}\cos\theta_{2+}\dot{u}_{2+} - \beta_2\rho_2\cos^2\psi_{2+}\dot{v}_{2+} = \beta_1\rho_1\sin\psi_{1-}\cos\psi_{1-}\dot{v}_{1-}, \\
\sin\theta_{1+}\dot{u}_{1+} + \cos\psi_{1+}\dot{v}_{1+} - \sin\theta_{2+}\dot{u}_{2+} + \cos\psi_{2+}\dot{v}_{2+} = \cos\psi_{1-}\dot{v}_{1-}, \\
\cos\theta_{1+}\dot{u}_{1+} - \sin\psi_{1+}\dot{v}_{1+} + \cos\theta_{2+}\dot{u}_{2+} + \sin\psi_{2+}\dot{v}_{2+} = \sin\psi_{1-}\dot{v}_{1-},
\end{gathered} \tag{4.12}$$

що дають змогу знайти невідомі значення $\dot{u}_{1+}, \dot{v}_{1+}, \dot{u}_{2+}, \dot{v}_{2+}$ у випадку падіння поперечної хвилі на площину *G* розділу двох середовищ.

У разі нормального падіння *S*-хвилі на площину *G* формули (4.9) набудуть вигляду

$$\dot{v}_{1+} = \frac{-\beta_1\rho_1 + \beta_2\rho_2}{\beta_1\rho_1 + \beta_2\rho_2}\dot{v}_{1-}, \quad \dot{v}_{2+} = \frac{2\beta_1\rho_1}{\beta_1\rho_1 + \beta_2\rho_2}\dot{v}_{1-}. \tag{4.13}$$

Для такого випадку падаючої хвилі результати розрахунків значень $\dot{v}_{1+}$, $\dot{v}_{2+}$ представлені в таблиці 4.2. Проаналізувавши отримані результати,

Таблиця 4.2 − Дифракція поперечної хвилі при її нормальному падінні на площину G розділу двох ізотропних пружних середовищ

	Середовище I / Середовище II		1 Вугілля $\rho=1250$ кг/м^3 $\beta=720$ м/с $\beta\rho=0{,}9\cdot10^6$ $\dot{u}_{1-}=0,\dot{v}_{1-}=1$ $\dot{v}_{1+},\ \dot{v}_{2+}$	2 Вапняк $\rho=2420$кг/м^3 $\beta=1860$ м/с $\beta\rho=4{,}5\cdot10^6$ $\dot{u}_{1-}=0,\dot{v}_{1-}=1$ $\dot{v}_{1+},\ \dot{v}_{2+}$	3 Граніт $\rho=2590$ кг/м^3 $\beta=2900$ м/с $\beta\rho=7{,}51\cdot10^6$ $\dot{u}_{1-}=0,\dot{v}_{1-}=1$ $\dot{v}_{1+},\ \dot{v}_{2+}$	4 Пісковик $\rho=2630$ кг/м^3 $\beta=2900$ м/с $\beta\rho=7{,}63\cdot10^6$ $\dot{u}_{1-}=0,\dot{v}_{1-}=1$ $\dot{v}_{1+},\ \dot{v}_{2+}$	5 Мармур $\rho=2730$ кг/м^3 $\beta=3100$ м/с $\beta\rho=8{,}46\cdot10^6$ $\dot{u}_{1-}=0,\dot{v}_{1-}=1$ $\dot{v}_{1+},\ \dot{v}_{2+}$	6 Роговик $\rho=2590$ кг/м^3 $\beta=3380$ м/с $\beta\rho=8{,}75\cdot10^6$ $\dot{u}_{1-}=0,\dot{v}_{1-}=1$ $\dot{v}_{1+},\ \dot{v}_{2+}$	7 Сланець $\rho=2930$ кг/м^3 $\beta=3240$ м/с $\beta\rho=9{,}49\cdot10^6$ $\dot{u}_{1-}=0,\dot{v}_{1-}=1$ $\dot{v}_{1+},\ \dot{v}_{2+}$	8 Діабаз $\rho=2870$ кг/м^3 $\beta=3560$ м/с $\beta\rho=10{,}2\cdot10^6$ $\dot{u}_{1-}=0,\dot{v}_{1-}=1$ $\dot{v}_{1+},\ \dot{v}_{2+}$	9 Доломіт $\rho=2850$ кг/м^3 $\beta=3630$ м/с $\beta\rho=10{,}3\cdot10^6$ $\dot{u}_{1-}=0,\dot{v}_{1-}=1$ $\dot{v}_{1+},\ \dot{v}_{2+}$
1	Вугілля $\rho=1250$ кг/м^3, $\alpha=1200$ м/с, $\beta=720$ м/с	$\dot{v}_{1+}$	0	-0,66674	-0,78599	-0,78891	-0,80775	-0,81355	-0,82681	-0,83809	-0,83994
		$\dot{v}_{2+}$	1	1,66674	1,78599	1,78891	1,80775	1,81355	1,82681	1,83809	1,83994
2	Вапняк $\rho=2420$кг/м^3, $\alpha=3430$ м/с, $\beta=1860$ м/с	$\dot{v}_{1+}$	0,66674	0	-0,2505	-0,2577	-0,3056	-0,3208	-0,3567	-0,3883	-0,3936
		$\dot{v}_{2+}$	0,33326	1	1,25056	1,25773	1,30560	1,32085	1,35671	1,38836	1,39364
3	Граніт $\rho=2590$ кг/м^3, $\alpha=4650$ м/с, $\beta=2900$ м/с	$\dot{v}_{1+}$	0,78599	0,25056	0	-0,0076	-0,0596	-0,0764	-0,1165	-0,1526	-0,1587
		$\dot{v}_{2+}$	0,21401	0,74944	1	1,00766	1,05960	1,07643	1,11657	1,15265	1,15874
4	Пісковик $\rho=2630$ кг/м^3, $\alpha=5220$ м/с, $\beta=2900$ м/с	$\dot{v}_{1+}$	0,78891	0,25773	0,00766	0	-0,0519	-0,0688	-0,1090	-0,1451	-0,1512
		$\dot{v}_{2+}$	0,21109	0,74227	0,99234	1	1,05196	1,06881	1,10901	1,14516	1,15126
5	Мармур $\rho=2730$ кг/м^3, $\alpha=5470$ м/с, $\beta=3100$ м/с	$\dot{v}_{1+}$	0,80775	0,30560	0,05960	0,05196	0	-0,0169	-0,0573	-0,0939	-0,1001
		$\dot{v}_{2+}$	0,19225	0,69440	0,94040	0,94804	1	1,01691	1,05737	1,09391	1,10009
6	Роговик $\rho=2590$ кг/м^3, $\alpha=6150$ м/с, $\beta=3380$ м/с	$\dot{v}_{1+}$	0,81355	0,32085	0,07643	0,06881	0,01691	0	-0,0405	-0,0771	-0,0833
		$\dot{v}_{2+}$	0,18645	0,67915	0,92357	0,93119	0,98309	1	1,04050	1,07712	1,08332
7	Сланець $\rho=2930$ кг/м^3, $\alpha=5650$ м/с, $\beta=3240$ м/с	$\dot{v}_{1+}$	0,82681	0,35671	0,11657	0,10901	0,05737	0,04050	0	-0,0367	-0,0429
		$\dot{v}_{2+}$	0,17319	0,64329	0,88343	0,89099	0,94263	0,95950	1	1,03673	1,04296
8	Діабаз $\rho=2870$ кг/м^3, $\alpha=5670$ м/с, $\beta=3560$ м/с	$\dot{v}_{1+}$	0,83809	0,38836	0,15265	0,14516	0,09391	0,07712	0,03673	0	-0,0062
		$\dot{v}_{2+}$	0,16191	0,61164	0,84735	0,85484	0,90609	0,92288	0,96327	1	1,00624
9	Доломіт $\rho=2850$ кг/м^3, $\alpha=6600$ м/с, $\beta=3630$ м/с	$\dot{v}_{1+}$	0,83994	0,39364	0,15874	0,15126	0,10009	0,08332	0,04296	0,00624	0
		$\dot{v}_{2+}$	0,16006	0,60636	0,84126	0,84874	0,89991	0,91668	0,95704	0,99376	1

можемо зробити висновок, що виявлені в таблиці 4.1 тенденції зберігаються і для розглянутого випадку.

4.1.2 Тестування достовірності розробленої моделі і результатів розрахунків за допомогою принципу збереження повної енергії системи

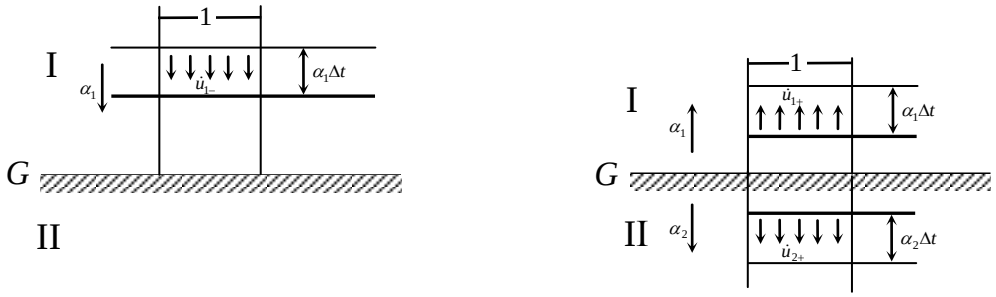
Варто відмітити, що отримані співвідношення (4.5) і (4.7), які пов'язують значення величин розривів функцій швидкостей частинок середовищ після імпульсної взаємодії зі значеннями швидкостей частинок на фронті падаючої хвилі до удару, були побудовані із застосуванням одного з узагальнених принципів механіки – закону збереження кількості руху механічної системи. Однак, так як досліджувана система є консервативною і при дифракції хвиль не відбувається ні притоку ні відтоку енергії, крім цього закону має виконуватись також і закон збереження енергії у відповідних елементах фронтів падаючої та новосформованих розривних хвилях.

Для підтвердження виконання цього закону розглянемо випадок нормального падіння плоскої поздовжньої *P*-хвилі на площину *G* контакту пружних середовищ *I* і *II* з параметрами механічних властивостей λ_1, μ_1, ρ_1, $\alpha_1 = \sqrt{(\lambda_1 + 2\mu_1)/\rho_1}$ і λ_2, μ_2, ρ_2, відповідно. На рис. 4.2,а зображений елемент одиничної ширини пружного середовища *I* на фронті падаючої поздовжньої *P*-хвилі.

В результаті взаємодії такої хвилі з площиною розділу *G* формуються відбита та заломлена *P*-хвилі. Повні енергії в пружній системі до (E_-) і після удару (E_+) мають бути рівними, тому

$$E_- = E_+ \qquad \text{або} \qquad П_- + T_- = П_+ + T_+,$$

де $П_-, П_+$ - потенціальні енергії; T_-, T_+ - кінетичні енергії в елементах, які приймають участь в ударній взаємодії.



а *б*

Рисунок 4.2 - Елементи розривних хвиль до (а) і після (б) ударної взаємодії розривної плоскої P - хвилі з площиною G контакту пружних середовищ I і II

В падаючій хвилі

$$П_- = \frac{\sigma_{1-}\varepsilon_{1-}}{2}\alpha_1\Delta t$$

де $\sigma_{1-} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{1-}$ - поздовжнє нормальне напруження;

ε_1 - поздовжня відносна деформація;

$\alpha_1\Delta t$ - товщина виділеного елемента, який здійснив ударну взаємодію з площиною G за час Δt.

Тоді

$$П_- = \frac{(\lambda_1 + 2\mu_1)}{2}\cdot\frac{\dot{u}_{1-}}{\alpha_1^2}\alpha_1\Delta t = \frac{(\lambda_1 + 2\mu_1)}{2}\cdot\frac{\rho_1\dot{u}_{1-}^2}{(\lambda_1 + 2\mu_1)}\alpha_1\Delta t = \frac{\rho_1\dot{u}_{1-}^2}{2}\alpha_1\Delta t.$$

В свою чергу кінетична енергія елемента падаючої хвилі дорівнює

$$T_- = \rho_1\alpha_1\Delta t\frac{\dot{u}_{1-}^2}{2}.$$

Повна енергія в елементі падаючої хвилі дорівнює

$$E_- = П_- + T_- = \frac{\rho_1 \dot{u}_{1-}^2}{2}\alpha_1 \Delta t + \frac{\rho_1 \dot{u}_{1-}^2}{2}\alpha_1 \Delta t = \rho_1 \dot{u}_{1-}^2 \alpha_1 \Delta t . \qquad (4.14)$$

На основі виконаних перетворень відмітимо факт того, що інтенсивності потенціальної і кінетичної енергій в елементах поверхні фронту розривної хвилі рівні один одному. Тому повна механічна енергія в середовищі на фронті хвилі дорівнює її подвійній кінетичній енергії.

Аналогічно можна знайти повну енергію в елементах відбитої та заломленої хвиль

$$E_+ = \rho_1 \dot{u}_{1+}^2 \alpha_1 \Delta t + \rho_2 \dot{u}_{2+}^2 \alpha_2 \Delta t . \qquad (4.15)$$

Підставивши праві частини отриманих раніше співвідношень (4.9) в (4.15), отримаємо

$$\begin{aligned} E_+ &= \rho_1 \frac{\left(-\alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2\right)^2}{\left(\alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2\right)^2}\dot{u}_{1-}^2 \alpha_1 \Delta t + \rho_1 \frac{\left(2\alpha_1\rho_1\right)^2}{\left(\alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2\right)^2}\dot{u}_{1-}^2 \alpha_2 \Delta t = \\ &= \frac{\rho_1\alpha_1\left[\left(\alpha_1\rho_1\right)^2 - 2\alpha_1\rho_1\alpha_2\rho_2 + \left(\alpha_2\rho_2\right)^2\right] + 4\rho_2\alpha_2\left(\alpha_1\rho_1\right)^2}{\left(\alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2\right)^2} u_{1-}^2 \Delta t = \\ &= \frac{\rho_1\alpha_1\left(\alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2\right)^2}{\left(\alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2\right)^2} u_{1-}^2 \Delta t = \rho_1\alpha_1 u_{1-}^2 \Delta t . \end{aligned} \qquad (4.16)$$

Порівнюючи (4.14) і (4.16), отримуємо. що $E_- = E_+$. Отже, закон збереження енергії виконується, що свідчить про достовірність постановки задачі та отриманих результатів. Аналогічно тестується випадок падіння поперечної хвилі на площину розділу *G*.

4.1.3 Дифракція розривних хвиль на площині розподілу двох середовищ, з'єднаних без можливості проковзування

Проведений аналіз відомих теоретичних положень про розривні хвильові явища в шарувато-неоднорідних середовищах показав, що навіть при наявності великого різноманіття математичних моделей середовищ і методів розв'язку задач будівельної механіки нині не існує єдиного підходу для ґрунтовного вивчення динаміки розривних хвиль в шарувато-неоднорідних середовищах. З іншого боку, накопичений в літературі досвід та наявність сучасної обчислювальної техніки дають змогу створити нові вдосконалені методи розв'язку задач для прогнозування дій сейсмічних навантажень на будівельні споруди. Для навантажень ударного типу таким методом можна вважати променевий метод.

Явище відбиття-заломлення на площині G розділу середовищ I і II ускладнюється при косому падінні на неї плоскої розривної P-хвилі. Оскільки дифракція хвиль в цьому випадку супроводжується формуванням двох відбитих і двох заломлених хвиль, для її моделювання необхідно розв'язувати систему чотирьох рівнянь (4.5) і (4.7) на всьому діапазоні $0^0 \le \theta_{1-} \le 90^0$. На рис. 4.3 проілюстровані графіки функцій інтенсивностей швидкостей відбитих $(\dot{u}_{1+}, \dot{v}_{1+})$ і заломлених $(\dot{u}_{2+}, \dot{v}_{2+})$ хвиль, які сформувались на площині G між доломітом (середовище II) і діабазом (середовище II). Ефект екранування розривної P-хвилі для такої комбінації середовищ стає помітним приблизно при $\theta_{1-} > 50^0$, коли функція $\dot{u}_{2+}(\theta_{1-})$ починає помітно спадати, при цьому відбита P_{1+}-хвиля починає зростати лише при $\theta_{1-} > 75^0$.

Внаслідок того, що акустична жорсткість доломіту більша за акустичну жорсткість діабазу, то критичний стан в цій системі не реалізовувався. Однак, якщо середовища I і II поміняти місцями, то при $\theta_{1-} = 59^0$

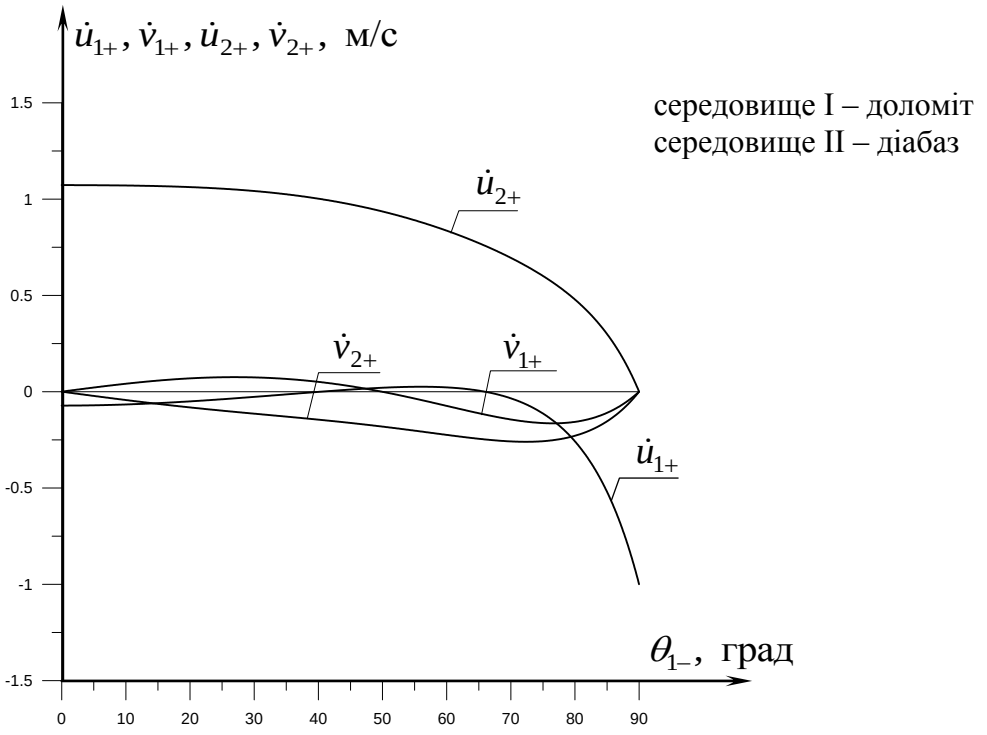


Рисунок 4.3. − Графіки функцій інтенсивностей розривних відбитих $(\dot{u}_{1+}, \dot{v}_{1+})$ і заломлених $(\dot{u}_{2+}, \dot{v}_{2+})$ хвиль, які сформувалися в результаті взаємодії з площиною G поздовжньої хвилі $\dot{u}_{1-} = 1$ м/с

відбувається специфічний ефект, який отримав назву квазіповного внутрішнього відбиття, і при наближенні θ_{1-} до цього значення шукані значення $\dot{u}_{1+}, \dot{v}_{1+}, \dot{u}_{2+}, \dot{v}_{2+}$ прямують до нескінченності (рис. 4.4). Пояснимо цей ефект більш детально.

Початком для аналізу цього ефекту слугує відоме в геометричній оптиці явище повного внутрішнього відбиття світлового променя на границі розділу двох оптичних середовищ. Як відомо, в однорідному середовищі світло поширюється прямолінійно зі сталою швидкістю. Якщо ж середовище неоднорідне, то в різних його областях швидкість поширення світла $\upsilon = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ різна і прямолінійність світлових променів порушується.

Найпростішою неоднорідністю є плоска границя розділу двох

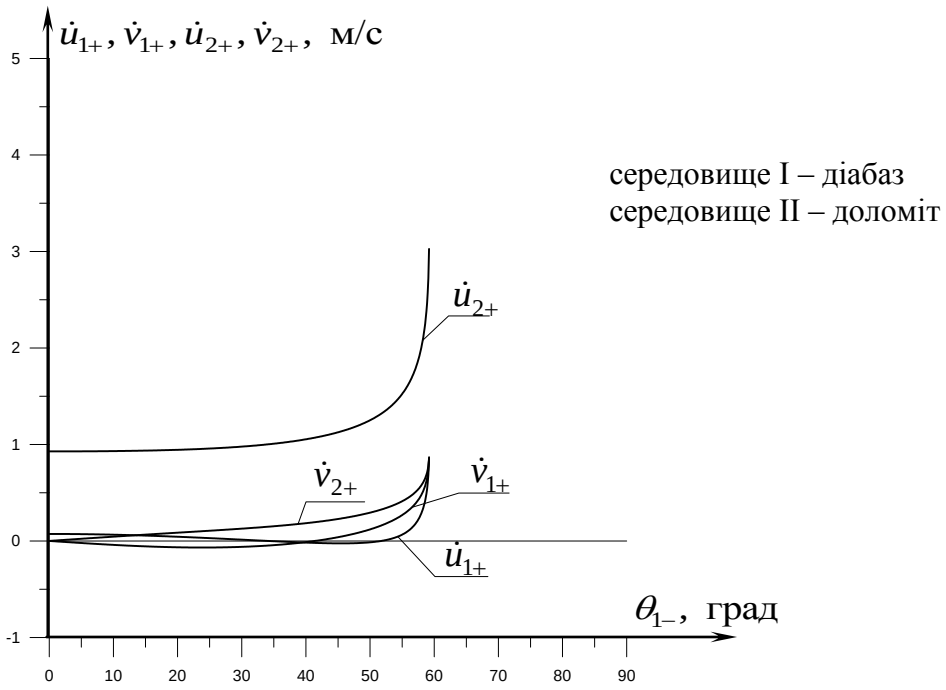


Рисунок 4.4 − Графіки функцій інтенсивностей розривних відбитих $(\dot{u}_{1+}, \dot{v}_{1+})$ і заломлених $(\dot{u}_{2+}, \dot{v}_{2+})$ хвиль, які сформувалися в результаті взаємодії з площиною G поздовжньої хвилі $\dot{u}_{1-} = 1$ м/с

нескінченних однорідних середовищ, в яких світло розповсюджується зі швидкостями, відповідно рівними υ_1 і υ_2. Тоді промінь *I*, падаючий з першого середовища під кутом θ_{1-} до перпендикуляра, на границі розділу роздвоюється на відбитий промінь *II*, який поширюється в першому середовищі з тією самою швидкістю υ_1, і заломлений промінь *III*, що розповсюджується в другому середовищі під кутом θ_{2+} до того ж самого перпендикуляра. Взаємне геометричне розташування цих променів визначається трьома законами Декарта (надалі які використовуватимуться і в променевій теорії пружних хвиль):

1. Кут падіння дорівнює куту відбивання: $\theta_{1-} = -\theta_{1+}$;

2. Відношення синуса кута падіння до синуса кута заломлення є сталою величиною: $\dfrac{\sin\theta_{1-}}{\sin\theta_{2+}} = const = n_{2,1}$;

де $n_{2,1}$ – відносний показник заломлення двох середовищ;

3. Падаючий, відбитий та заломлений промені лежать в одній площині з перпендикуляром до границі розділу середовищ, проведеному через точку падіння світлового променя.

Використовуючи висновки геометричної теорії світла можемо записати, що відносний показник заломлення двох середовищ $n_{2,1}$ дорівнює

$$n_{2,1} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{c/\upsilon_2}{c/\upsilon_1} = \frac{n_2}{n_1},$$

де n_1 та n_2 – показники заломлення відповідних середовищ;

тобто відношенню абсолютних показників заломлення цих середовищ $n_i = \frac{c}{\upsilon_i}$ відносно вакууму, в якому швидкість світла дорівнює c. Використовуючи отриману рівність для $n_{2,1}$, можна переписати закон заломлення в симетричній відносно двох середовищ формі: $n_1 \sin\theta_{1-} = n_2 \sin\theta_{2+}$.

З цієї симетрії випливає зворотність світлових променів. Якщо змінити напрям променя *III* і змусити його падати під тим же самим кутом θ_{2+} на границю розділу, то заломлений промінь буде розповсюджуватись в першому середовищі під кутом θ_{1-}, тобто пройде зворотно вздовж променя I.

Рівняння $n_1 \sin\theta_{1-} = n_2 \sin\theta_{2+}$ може задовольняти і закон відбиття світлового променя. Оскільки відбитий промінь *II* поширюється в тому ж самому середовищі, але з іншого боку перпендикуляра, то для нього можна формально покласти показник заломлення $n_2 = -n_1$. Підставляючи це значення у рівність $n_1 \sin\theta_{1-} = n_2 \sin\theta_{2+}$, отримуємо, що: $\sin\theta_{1-} = -\sin\theta_{1+}$, тобто $\theta_{1-} = -\theta_{1+}$.

Непрямолінійність поширення світла в оптичному середовищі змінної густини проявляється в астрономічній рефракції − під час спостереження зірок під гострим кутом до горизонту викривлення променів призводить до того, що удаване положення джерела є дещо вищим дійсного. У самого горизонту удаваний підйом світила за рахунок рефракції складає $36'$. В жарких пустелях або степових районах і в полярних областях сильний прогрів або, навпаки, охолодження повітря біля земної поверхні призводить до появи марев: завдяки викривленню променів стають видимими і здаються близько розташованими предмети, насправді розташовані далеко за горизонтом.

Під час переходу світла із середовища з більшим показником заломлення n_1 (оптично більш щільний) в середовище з меншим показником n_2 (оптично менш щільне), згідно рівняння $n_1 \sin\theta_{1-} = n_2 \sin\theta_{2+}$ маємо:

$$\frac{\sin\theta_{2+}}{\sin\theta_{1-}} = \frac{n_1}{n_2} > 1,$$

і заломлений промінь відхиляється від перпендикуляра. Зі збільшенням кута падіння θ_{1-} зростає і кут заломлення $\theta_{2+} > \theta_{1-}$. Коли кут падіння досягає деякого граничного значення $\theta_{1-}^{гран}$, що визнається з умови:

$$\sin\theta_{1-}^{гран} = \frac{n_2}{n_1} = n_{2,1},$$

то $\sin\theta_{2+} = 1$, $\theta_{2+} = \pi/2$ і заломлений промінь буде напрямлений вздовж границі розділу. З подальшим збільшенням кута падіння $\theta_{1-} > \theta_{1-}^{гран}$, $\sin\theta_{1-} > \frac{n_1}{n_2}$ і $\sin\theta_{2+} = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_{1-} > 1$, чого не може бути. Тоді отримане

рівняння для таких кутів падіння $\theta_{1-} > \theta_{1-}^{гран}$ дає уявні значення кутів заломлення. Таким чином при $\theta_{1-} > \theta_{1-}^{гран}$ заломлення не відбувається і залишається лише явище відбиття. Цей ефект отримав назву **повного внутрішнього відбиття** − вся енергія світла, падаючого на границю розділу, повністю відбивається в перше середовище.

Аналогічне явище присутнє і в теорії поширення вздовж променів фронтів розривних хвиль. Однак воно реалізується в складнішій постановці, оскільки, на відміну від світлового променя, в теорії пружних хвиль реалізується явище поширення і заломлення хвиль різної поляризації.

Так, нехай в ізотропному пружному середовищі *I* на площину *G* під кутом θ_{1-} падає плоска поздовжня P_{1-}-хвиля. Як вже було зазначено раніше, в результаті взаємодії цієї хвилі з площиною розділу, утворюються відбиті поздовжня P_{1+}- та поперечна S_{1+}-хвилі в середовищі *I* та, відповідні, заломлені P_{2+}- та S_{2+}-хвилі в середовищі *II*. Використовуючи закон Снеліуса

$$\frac{\sin\theta_{1-}}{\alpha_1} = \frac{\sin\theta_{1+}}{\alpha_1} = \frac{\sin\psi_{1+}}{\beta_1} = \frac{\sin\theta_{2+}}{\alpha_2} = \frac{\sin\psi_{2+}}{\beta_2},$$

отримуємо, що $\sin\theta_{2+} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\sin\theta_{1-}$. І тоді у випадку, коли $\alpha_2 > \alpha_1$ і відбувається поступове збільшення кута падіння θ_{1-}, падаюча P_{1-} хвиля набуває такого положення, при якому співвідношення $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\sin\theta_{1-}$ стає рівним одиниці. Подальше збільшення кута падіння θ_{1-} призводить до того, що $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\sin\theta_{1-} > 1$. А так як областю визначення функції синус є відрізок $[-1;1]$, то при такому значенні θ_{1-} не можливо визначити $\sin\theta_{2+}$, а значить

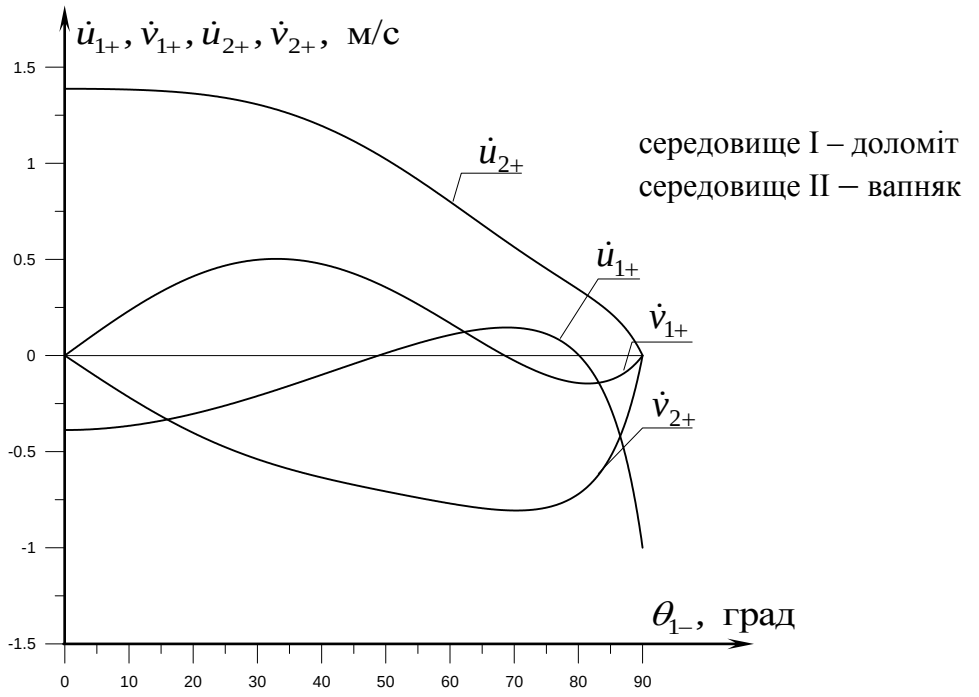


Рисунок 4.5 − Графіки функцій інтенсивностей розривних відбитих $(\dot{u}_{1+}, \dot{v}_{1+})$ і заломлених $(\dot{u}_{2+}, \dot{v}_{2+})$ хвиль, які сформувалися в результаті взаємодії з площиною G поздовжньої хвилі $\dot{u}_{1-} = 1$ м/с

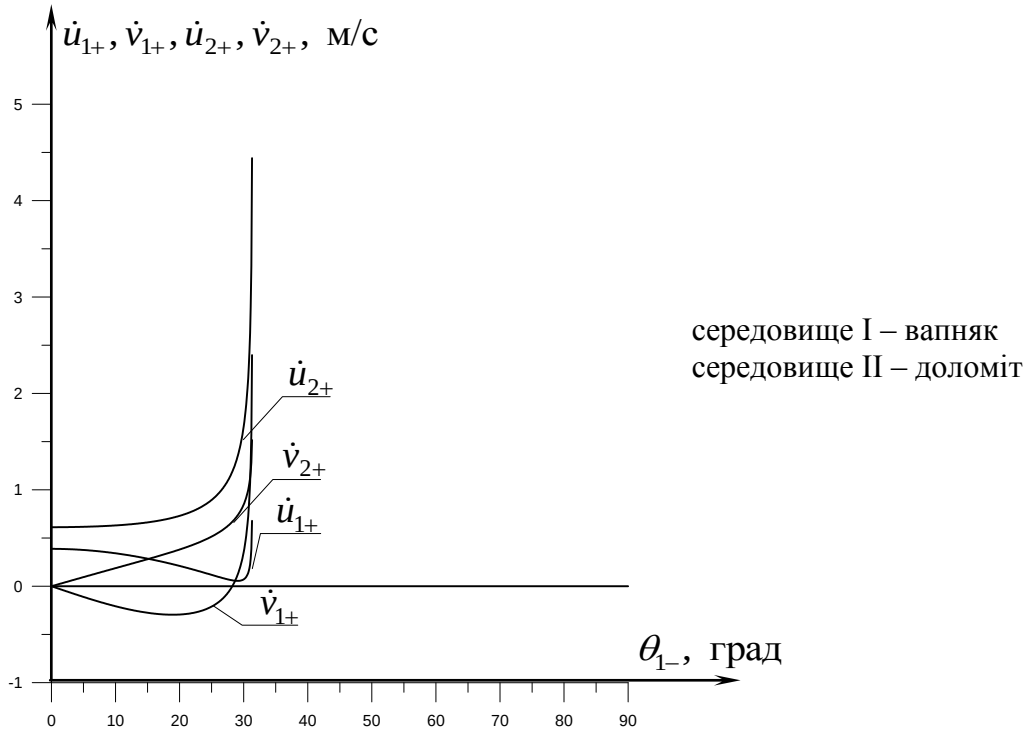


Рисунок 4.6 − Графіки функцій інтенсивностей розривних відбитих $(\dot{u}_{1+}, \dot{v}_{1+})$ і заломлених $(\dot{u}_{2+}, \dot{v}_{2+})$ хвиль, які сформувалися в результаті взаємодії з площиною G поздовжньої хвилі $\dot{u}_{1-} = 1$ м/с

і безпосередньо сам кут заломлення θ_{2+}. Внаслідок цього явище заломлення P_{1-}-хвилі не відбувається. Але на відміну від особливостей проходження світлового променя в оптичному середовищі, окрім заломленої P_{2+}-хвилі, існує ще поперечна заломлена S_{2+}-хвиля зі швидкістю β_2 меншою за швидкість поздовжньої хвилі α_2. І при $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\sin\theta_{1-}>1$, $\frac{\beta_2}{\alpha_1}\sin\theta_{1-}<1$, тому частина енергії падаючої P_{1-}-хвилі все ж проникає в середовище *II*. У зв'язку з цим таке явище отримало назву квазіповного внутрішнього відбиття.

Тому можемо зробити висновок, що екранування площиною розділу *G* розривної хвилі P_{1-} при її похилому падінні залежить не лише від механічних властивостей середовищ, але також від порядку їх проходження.

Також оберемо в якості досліджуваних середовищ доломіт (середовище *I*) та вапняк *(II)*, як комбінацію середовищ зі значно відмінними значеннями акустичних жорсткостей.На рис. 4.5 зображено графіки інтенсивностей новосформованих хвиль P_{1+}, S_{1+}, P_{2+}, S_{2+}. В цьому випадку ефект екранування стає помітним вже при $\theta_{1-}\approx 25^0$, а значення інтенсивності P_{1+}-хвилі починає зростати лише при $\theta_{1-}>85^0$.

Змінюючи порядок проходження P_{1-}-хвилею середовищ, вапняк - *I*, доломіт -*II*, також відмічаємо наявність ефекту квазіповного внутрішнього відбиття (рис. 4.6) і необмеженого зростання інтенсивностей хвиль, які беруть участь у взаємодії.

4.1.4 Дифракція розривних хвиль на площині розподілу двох середовищ, з'єднаних з можливістю проковзування

Розглянемо задачу дифракції плоскої розривної *P*-хвилі на площині розділу *G* двох пружних середовищ з умовою контакту, що предбачає рівність нормальних напружень і нормальних переміщень середовищ *I* і *II*,

але допускає можливість вільного проковзування. Такі умови можуть бути реалізовані природним шляхом в неоднорідних тектонічних структурах з порушенням суцільності в результаті утворення плоских тріщин під час сейсмічних руйнуваннях або шляхом штучного створення таких поверхонь серіями локальних вибухових впливів малої інтенсивності з метою ефективного захисту об'єктів з високим рівнем ризику від більш інтенсивних хвиль. Через такі площини розділу вільно проходять нормальні розривні хвилі стиску і відбиваються як від вільної поверхні, не проникаючи через неї, нормально падаючі поперечні хвилі, в той час, як при падінні на *G* розривної *P*-хвилі під довільним кутом умови відбиття-заломлення суттєво змінюються.

Для виведення рівнянь дифракції розривної P_{1-}-хвилі на площині *G* будемо вважати, що всі *P*-хвилі, що приймають участь у взаємодії, є хвилями стиску, тому відокремлення середовищ *I* і *II* один від одного на *G* не відбувається. Тоді другі рівняння систем (4.5), (4.7) залишаються незмінними, а перші рівняння цих систем замінюються умовами збереження імпульсу в середовищі *I* вздовж осі *Ox*

$$\vec{i} \cdot \Delta \mathbf{Q}_{1-} = \vec{i} \cdot \Delta \mathbf{Q}_{1+} \tag{4.17}$$

і рівністю нулю імпульсу вздовж цієї ж осі в середовищі *II*

$$\vec{i} \cdot \Delta \mathbf{Q}_{2+} = 0. \tag{4.18}$$

Побудована таким чином система рівнянь для невідомих $\dot{u}_{1+}, \dot{v}_{1+}, \dot{u}_{2+}, \dot{v}_{2+}$ набуде вигляду

$$\begin{gathered} \alpha_1 \rho_1 \cos^2 \theta_{1+} \dot{u}_{1+} - \beta_1 \rho_1 \sin \psi_{1+} \cos \psi_{1+} \dot{v}_{1+} - \\ - \alpha_2 \rho_2 \cos^2 \theta_{2+} \dot{u}_{2+} - \beta_2 \rho_2 \sin \psi_{2+} \cos \psi_{2+} \dot{v}_{2+} = -\alpha_1 \rho_1 \cos^2 \theta_{1-} \dot{u}_{1-}, \end{gathered} \tag{4.19}$$

$$\alpha_1\rho_1 \sin\theta_{1+}\cos\theta_{1+}\dot{u}_{1+} + \beta_1\rho_1\cos^2\psi_{1+}\dot{v}_{1+} = \alpha_1\rho_1 \sin\theta_{1-}\cos\theta_{1-},$$

$$\alpha_2\rho_2 \sin\theta_{2+}\cos\theta_{2+}\dot{u}_{2+} - \beta_2\rho_2\cos^2\psi_{2+}\dot{v}_{2+} = 0,$$

$$\cos\theta_{1+}\dot{u}_{1+} - \sin\psi_{1+}\dot{v}_{1+} + \cos\theta_{2+}\dot{u}_{2+} + \sin\psi_{2+}\dot{v}_{2+} = \cos\theta_{1-}\dot{u}_{1-}.$$

Характерна особливість отриманої системи полягає в тому, що при $0^0 < \theta_{1-} < 90^0$ всі невідомі $\dot{u}_{1+}, \dot{v}_{1+}, \dot{u}_{2+}, \dot{v}_{2+}$ в загальному випадку відмінні від нуля, навіть якщо середовища *I* і *II* володіють однаковими механічними властивостями.

Розглянемо випадок, коли середовища *I* і *II* співпадають, тобто в деякому пласті одного середовища є тріщина. Тоді $\rho_1 = \rho_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$ і систему (4.19) можемо записати наступним чином

$$\begin{gathered}
\alpha_1\rho_1\cos^2\theta_{1+}\dot{u}_{1+} - \beta_1\rho_1\sin\psi_{1+}\cos\psi_{1+}\dot{v}_{1+} - \\
- \alpha_1\rho_1\cos^2\theta_{2+}\dot{u}_{2+} - \beta_1\rho_1\sin\psi_{2+}\cos\psi_{2+}\dot{v}_{2+} = -\alpha_1\rho_1\cos^2\theta_{1-}\dot{u}_{1-}, \\
\alpha_1\rho_1 \sin\theta_{1+}\cos\theta_{1+}\dot{u}_{1+} + \beta_1\rho_1\cos^2\psi_{1+}\dot{v}_{1+} = \alpha_1\rho_1 \sin\theta_{1-}\cos\theta_{1-}, \qquad (4.20) \\
\alpha_1\rho_1 \sin\theta_{2+}\cos\theta_{2+}\dot{u}_{2+} - \beta_1\rho_1\cos^2\psi_{2+}\dot{v}_{2+} = 0, \\
\cos\theta_{1+}\dot{u}_{1+} - \sin\psi_{1+}\dot{v}_{1+} + \cos\theta_{2+}\dot{u}_{2+} + \sin\psi_{2+}\dot{v}_{2+} = \cos\theta_{1-}\dot{u}_{1-}.
\end{gathered}$$

Результати розв’язку такої задачі для порід доломіт та граніт, які мають площину розділу *G*, на якій є допустимими можливості проковзування контактуючих точок в дотичних напрямах, представлені на рис. 4.7, рис. 4.8, відповідно. Очевидно, що при $\theta_{1-} = 0^0$ через поверхню *G* проходить лише одна P_{1+}-хвиля, інтенсивність якої дорівнює інтенсивності падаючої P_{1-} хвилі.

Поступово зі зростанням кута падіння θ_{1-} інтенсивність P_{2+}-хвилі зменшується, а функції $\dot{u}_{1+}, \dot{v}_{1+}, \dot{v}_{2+}$ починають набувати відмінних від нуля значень.

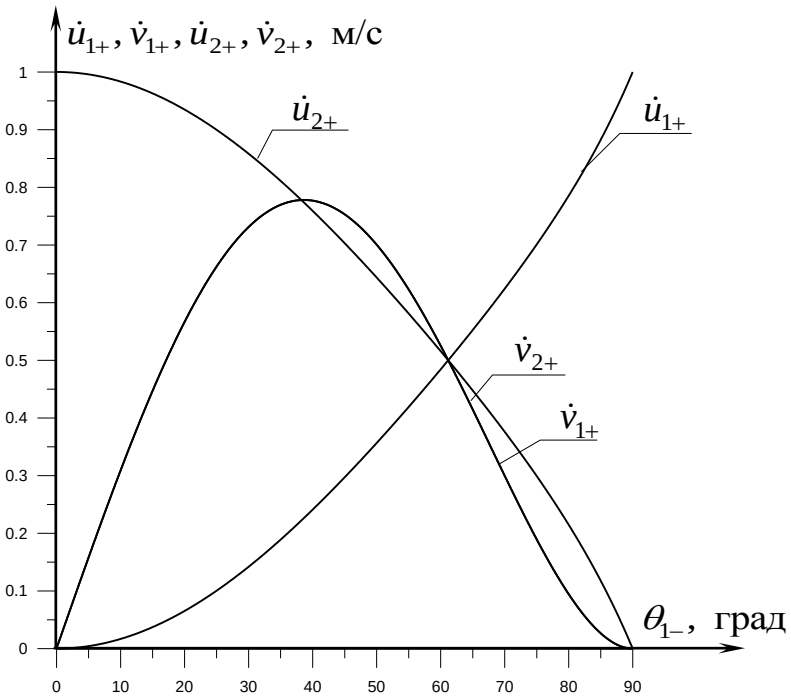


Рисунок 4.7 − Графіки інтенсивності розривних хвиль, заломлених $(\dot{u}_{2+}, \dot{v}_{2+})$ і відбитих $(\dot{u}_{1+}, \dot{v}_{1+})$, які сформувалися в результаті взаємодії поздовжньої хвилі $\dot{u}_{1-}$ з площиною розділу (тріщиною) G в породі доломіт

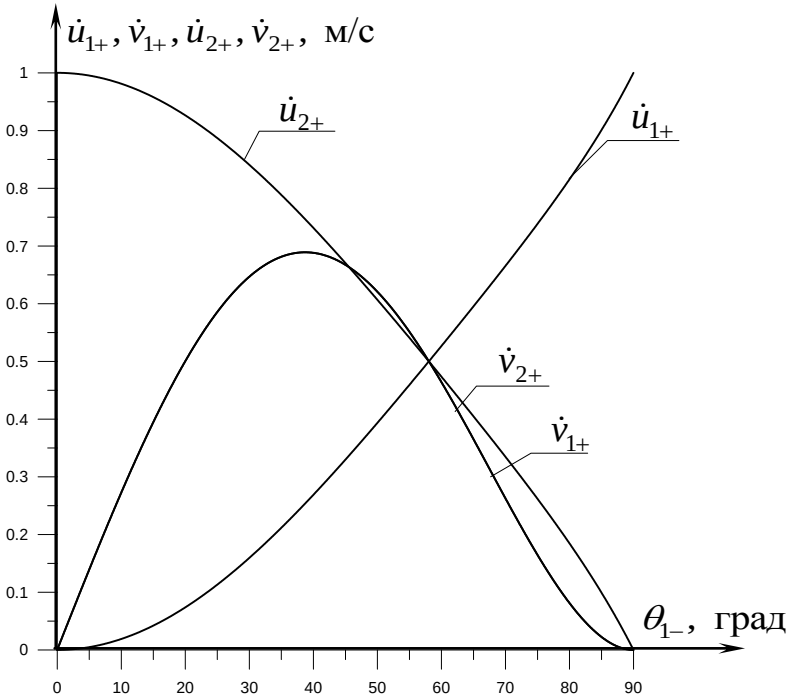


Рисунок 4.8 − Графіки інтенсивності розривних хвиль, заломлених $(\dot{u}_{2+}, \dot{v}_{2+})$ і відбитих $(\dot{u}_{1+}, \dot{v}_{1+})$, які сформувалися в результаті взаємодії поздовжньої хвилі $\dot{u}_{1-}$ з площиною розділу (тріщиною) G в породі граніт

Цікаво, що при цьому поперечні S_{1+}- і S_{2+}-хвилі мають однакові інтенсивності (криві $\dot{v}_{1+}(\theta_{1-})$ і $\dot{v}_{2+}(\theta_{1-})$ співпадають) і, досягнув деякого максимуму, знову зменшуються до нуля. Тобто можемо зробити висновок, що включення в довільне однорідне середовище площини *G* з описаними властивостями дає змогу розкласти падаючу P_{1-}-хвилю на чотири розривних хвилі і тим самим екранувати її та зменшити інтенсивність її ударної взаємодії на екрануючі тіла, доводячи в граничному випадку значення заломленої хвилі до нуля.

Результати обчислень виконані для випадку розділу площиною *G* з умовою можливого проковзування двох середовищ з різними фізичними характеристиками представлені на рис. 4.9. В ролі середовища *I* було обрано доломіт, а *II* - діабаз. Порівнюючи графіки функцій $\dot{u}_{1+}(\theta_{1-})$, $\dot{v}_{1+}(\theta_{1-})$, $\dot{u}_{2+}(\theta_{1-})$, $\dot{v}_{2+}(\theta_{1-})$ з розв'язком, представленому на рис. 4.3 для цих же середовищ, контактуючих на *G* без можливості проковзування, відзначаємо, що розділ двох середовищ площиною *G*, на якій допускається взаємне проковзування контактуючих точок, дає змогу ефективніше здійснюватиекранування поздовжньої розривної хвилі, оскільки при такому контакті двох середовищ інтенсивність заломленої P_{2+}-хвилі вже при $\theta_{1-}=10^0$ починає різко зменшуватись.

Якщо змінити порядок проходження середовищ поздовжньою P_{1-}-хвилею, тобто *I*-им вважати діабаз, а *II*-им - доломіт, то, як і для випадку контакту середовищ без можливості контакту, спостерігаємо наявність ефекту квазіповного внутрішнього відбиття та необмеженого збільшення інтенсивності заломленої P_{2+}-хвилі (рис. 4.10).

Аналогічні розрахунки виконані і для другої комбінації середовищ: *I* - доломіт, *II* - вапняк (рис. 4.11).

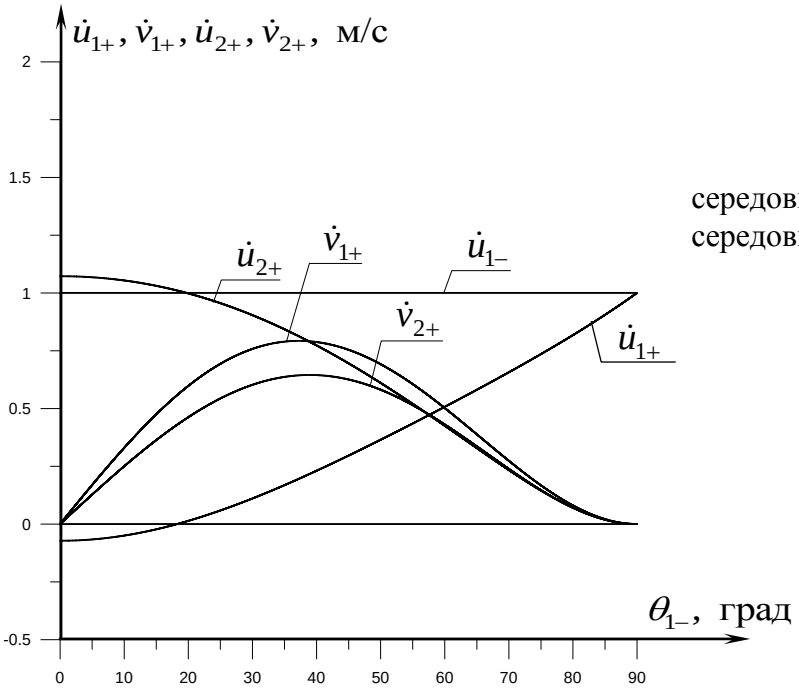


Рисунок 4.9 − Графіки інтенсивності розривних хвиль, заломлених $(\dot{u}_{2+}, \dot{v}_{2+})$ і відбитих $(\dot{u}_{1+}, \dot{v}_{1+})$, які сформувалися в результаті взаємодії поздовжньої хвилі $\dot{u}_{1-} = 1$ м/с з площиною розділу (тріщиною) G

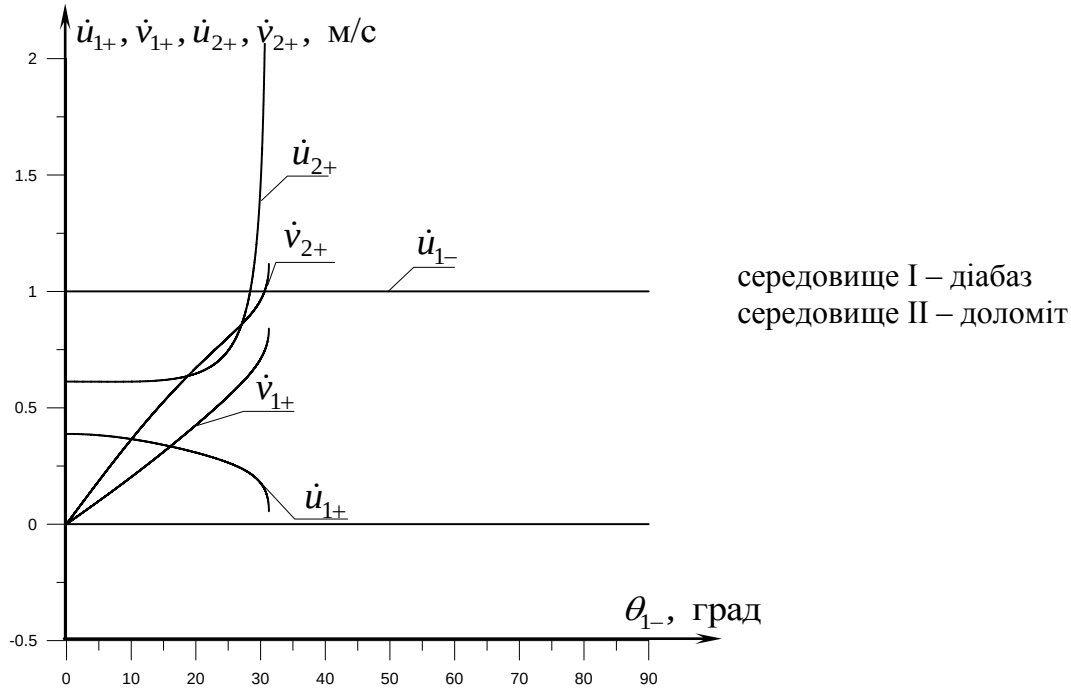


Рисунок 4.10 − Графіки інтенсивності розривних хвиль, заломлених $(\dot{u}_{2+}, \dot{v}_{2+})$ і відбитих $(\dot{u}_{1+}, \dot{v}_{1+})$, які сформувалися в результаті взаємодії поздовжньої хвилі $\dot{u}_{1-} = 1$ м/с з площиною розділу (тріщиною) G

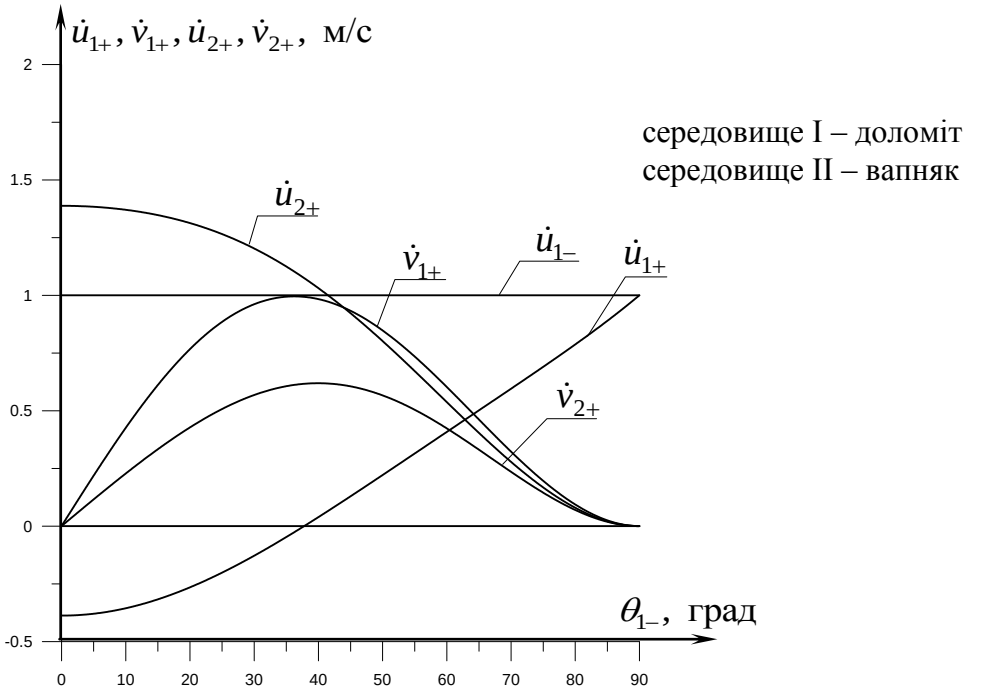


Рисунок 4.11 − Графіки інтенсивності розривних хвиль, заломлених $(\dot{u}_{2+}, \dot{v}_{2+})$ і відбитих $(\dot{u}_{1+}, \dot{v}_{1+})$, які сформувалися в результаті взаємодії поздовжньої хвилі $\dot{u}_{1-} = 1$ м/с з площиною розділу (тріщиною) G

Тут також відзначаємо посилення екрануючого ефекту розривної поздовжньої хвилі в порівнянні з випадком розділу цих середовищ площиною G без можливості проковзування (рис. 4.5). Також варто відмітити досягнення змінною $\dot{v}_{1+}(\theta_{1-})$ значення 1 м/с при $\theta_{1-} \approx 35^0$.

4.2 Екранування розривних хвиль в трансверсально-ізотропних середовищах з однієї площиною розділу їх властивостей

4.2.1 Взаємодія плоскої розривної хвилі з площиною розділу двох анізотропних середовищ, з'єднаних без можливості проковзування

Розглянемо випадок, коли два пружних трансверсально-ізотропних середовища *I* і *II* розділені площиною розділу *G*. Нехай в середовищі *I* на площину *G* під кутом θ_{1-} падає плоска поздовжня *qP*-хвиля з одиничним

значенням розриву поздовжньої швидкості $\dot{u}_{1-}$. Прослідкуємо, як ця хвиля проникає в середовище *II* та які інтенсивності мають новосформовані хвилі.

Для виведення рівнянь динамічної взаємодії розривної хвилі з площиною *G* з'єднання двох середовищ використаємо, як і в у випадку контакту двох ізотропних середовищ, умови збереження імпульсу та нерозривності швидкостей частинок.

Нехай плоска квазіпоперечна qP_{1-}-хвиля падає під кутом θ_{1-} на площину контакту *G*. Тоді

$$\Delta\mathbf{Q}_{1-} = \xi^1_{1-}\Delta t\rho_1 \cos\theta_{1-}\dot{\mathbf{u}}_{1-}, \tag{4.21}$$

де ξ^1_{1-} - променева швидкість падаючої qP_{1-}-хвилі.

Так як фронт хвилі падає на площину *G* розділу двох середовищ з різними механічними властивостями, то виникають дві відбиті $\left(qP^{(r)}\ \text{і}\ qS^{(r)}\right)$ хвилі та дві заломлені $\left(qP^{(t)}\ \text{і}\ qS^{(t)}\right)$ - хвилі. Імпульси пружних елементів відповідних відбитих квазіпоздовжніх та квазіпоперечних хвиль будуть рівними

$$\Delta\mathbf{Q}_{1+} = \xi^1_{1+}\Delta t\rho_1 \cos\theta_{1+}\dot{\mathbf{u}}_{1+} + \xi^2_{1+}\Delta t\rho_1 \cos\psi_{1+}\dot{\mathbf{v}}_{1+}, \tag{4.22}$$

де ξ^1_{1+}, ξ^2_{1+} - променеві швидкості відбитих qP_{1+} та qS_{1+}-хвиль, відповідно.

Водночас елементи заломлених qP_{2+} та qS_{2+}-хвиль містять таку кількість імпульсу

$$\Delta\mathbf{Q}_{2+} = \xi^1_{2+}\Delta t\rho_2 \cos\theta_{2+}\dot{\mathbf{u}}_{2+} + \xi^2_{2+}\Delta t\rho_2 \cos\psi_{2+}\dot{\mathbf{v}}_{2+}, \tag{4.23}$$

де ξ^1_{2+}, ξ^2_{2+} - променеві швидкості заломлених qP_{2+} та qS_{2+}-хвиль, відповідно.

Враховуючи, що в анізотропному середовищі $\dot{\mathbf{u}}_i = \dot{u}_i \mathbf{A}^1_{(i)}$ і $\dot{\mathbf{v}}_i = \dot{v}_i \mathbf{A}^2_{(i)}$, де $\mathbf{A}^r_{(i)}$ - вектор поляризації $(i, r = 1,2)$, а $A^r_{1(i)}$ і $A^r_{2(i)}$ - його відповідні проекції на осі *Ox* і *Oy*, рівності (4.21) – (4.23) можемо представити наступним чином

$$\begin{gathered}
\Delta\mathbf{Q}_{1-} = \xi^1_{1-}\Delta t\rho_1 \cos\theta_{1-}\dot{u}_{1-}\left(A^1_{1(1-)}\mathbf{i} + A^1_{2(1-)}\mathbf{j}\right), \\
\Delta\mathbf{Q}_{1+} = \xi^1_{1+}\Delta t\rho_1 \cos\theta_{1+}\dot{u}_{1+}\left(A^1_{1(1+)}\mathbf{i} + A^1_{2(1+)}\mathbf{j}\right) + \\
+ \xi^2_{1+}\Delta t\rho_1 \cos\psi_{1+}\dot{v}_{1+}\left(A^2_{1(1+)}\mathbf{i} + A^2_{2(1+)}\mathbf{j}\right), \\
\Delta\mathbf{Q}_{2+} = \xi^1_{2+}\Delta t\rho_2 \cos\theta_{2+}\dot{u}_{2+}\left(A^1_{1(2+)}\mathbf{i} + A^1_{2(2+)}\mathbf{j}\right) + \\
+ \xi^2_{2+}\Delta t\rho_2 \cos\psi_{2+}\dot{v}_{2+}\left(A^2_{1(2+)}\mathbf{i} + A^2_{2(2+)}\mathbf{j}\right).
\end{gathered} \tag{4.24}$$

Використовуючи умову збереження імпульсу при ударі $\Delta\mathbf{Q}_{1-} = \Delta\mathbf{Q}_{1+} + \Delta\mathbf{Q}_{2+}$, побудуємо дві скалярні рівності в проекціях на осі *Ox* і *Oy*. Як результат отримуємо наступні співвідношення:

$$\begin{gathered}
\xi^1_{1+}\rho_1 \cos\theta_{1+}A^1_{1(1+)}\dot{u}_{1+} + \xi^2_{1+}\rho_1 \cos\psi_{1+}A^2_{1(1+)}\dot{v}_{1+} + \xi^1_{2+}\rho_2 \cos\theta_{2+}A^1_{1(2+)}\dot{u}_{2+} + \\
+ \xi^2_{2+}\rho_2 \cos\psi_{2+}A^2_{1(2+)}\dot{v}_{2+} = \xi^1_{1-}\rho_1 \cos\theta_{1-}A^1_{1(1-)}\dot{u}_{1-} \\
\xi^1_{1+}\rho_1 \cos\theta_{1+}A^1_{2(1+)}\dot{u}_{1+} + \xi^2_{1+}\rho_1 \cos\psi_{1+}A^2_{2(1+)}\dot{v}_{1+} + \xi^1_{2+}\rho_2 \cos\theta_{2+}A^1_{2(2+)}\dot{u}_{2+} + \\
+ \xi^2_{2+}\rho_2 \cos\psi_{2+}A^2_{2(2+)}\dot{v}_{2+} = \xi^1_{1-}\rho_1 \cos\theta_{1-}A^1_{2(1-)}\dot{u}_{1-}.
\end{gathered} \tag{4.25}$$

Щоб отримати ще два рівняння використаємо другу умову розв’язку поставленої задачі – умову нерозривності швидкостей частинок

$$\left(\dot{\mathbf{U}}_{1-} + \dot{\mathbf{U}}_{1+}\right)\big|_G = \dot{\mathbf{U}}_{2+}\big|_G .$$

В цьому випадку

$$\begin{gathered}
\dot{\mathbf{U}}_{1-} = \dot{u}_{1-}\left(A^1_{1(1-)}\mathbf{i} + A^1_{2(1-)}\mathbf{j}\right), \\
\dot{\mathbf{U}}_{1+} = \dot{u}_{1+}\left(A^1_{1(1+)}\mathbf{i} + A^1_{2(1+)}\mathbf{j}\right) + \dot{v}_{1+}\left(A^2_{1(1+)}\mathbf{i} + A^2_{2(1+)}\mathbf{j}\right), \\
\dot{\mathbf{U}}_{2+} = \dot{u}_{2+}\left(A^1_{1(2+)}\mathbf{i} + A^1_{2(2+)}\mathbf{j}\right) + \dot{v}_{2+}\left(A^2_{1(2+)}\mathbf{i} + A^2_{2(2+)}\mathbf{j}\right).
\end{gathered} \tag{4.26}$$

Проектуючи рівності (4.26) на осі *Ox* і *Oy*, отримуємо рівняння

$$\begin{aligned} &-A^1_{1(1+)}\dot{u}_{1+} - A^2_{1(1+)}\dot{v}_{1+} + A^1_{1(2+)}\dot{u}_{2+} + A^2_{1(2+)}\dot{v}_{2+} = A^1_{1(1-)}\dot{u}_{1-} \\ &-A^1_{2(1+)}\dot{u}_{1+} - A^2_{2(1+)}\dot{v}_{1+} + A^1_{2(2+)}\dot{u}_{2+} + A^2_{2(2+)}\dot{v}_{2+} = A^1_{2(1-)}\dot{u}_{1-}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Таким чином співвідношення (4.25) і (4.27) утворюють систему для знаходження чотирьох невідомих величин швидкостей $\dot{u}_{1+}, \dot{v}_{1+}, \dot{u}_{2+}, \dot{v}_{2+}$.

Для розв'язку цієї системи задамо напрям руху фронту хвилі, який визначається одиничним вектором

$$\mathbf{n} = \sin\theta_{1-}\mathbf{i} - \cos\theta_{1-}\mathbf{j}.$$

І для обраного напряму **n** знайдемо власні значення рівняння Кристофеля

$$\left| \sum_{k,p}^{3} \lambda_{ik,pq} n_k n_p - \mathrm{v}^2\, \delta_{iq} \right| = 0, \tag{4.28}$$

де $\lambda_{ki,pq} = C_{ki,pq}/\rho$ - матриця пружних сталих із симетричними елементами $\lambda_{ik,pq} = \lambda_{pq,ik} = \lambda_{ki,pq} = \lambda_{ki,qp}$;

n_k - складові орта **n** нормалі.

Вони визначають квадрати швидкостей трьох по-різному поляризованих хвиль $\left[\mathrm{v}_{(r)}\right]^2$, $r = 1,2,3$, причому $\mathrm{v}_1^2(\mathbf{n}) > \mathrm{v}_2^2(\mathbf{n}) \geq \mathrm{v}_3^2(\mathbf{n})$ і $\mathrm{v}_1^2(\mathbf{n})$ - фазова швидкість квазіпоздовжньої хвилі, $\mathrm{v}_2^2(\mathbf{n})$ і $\mathrm{v}_3^2(\mathbf{n})$ – відповідні швидкості квазіпоперечних хвиль.

Для кожного значення фазової швидкості визначимо компоненти вектора поляризації **A** відповідної хвилі, розв'язавши систему рівнянь:

$$\sum_{k,p,q}^{3} \lambda_{ik,pq} n_k n_p A_q - \mathrm{v}^2 A_i = 0, \quad (i = 1,2,3). \tag{4.29}$$

Зазначимо, що незалежно від вибраного напряму **n** вектори поляризації мають задовольняти умову ортогоналізації

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(i)}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{A}^{(k)}(\mathbf{n}) &= 0, \qquad (i \neq k = 1,2,3) \\ \mathbf{A}^{(i)}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{A}^{(k)}(\mathbf{n}) &= 1, \qquad (i = k = 1,2,3). \end{aligned} \tag{4.30}$$

Та знайдемо відповідні компоненти променевої швидкості за формулою

$$\xi_k^{(r)} = \frac{1}{\mathrm{v}^{(r)}} \sum_{i,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} n_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \qquad (i = 1,2,3). \tag{4.31}$$

На основі викладеного підходу виконано дослідження явища перетворення розривної *qP*-хвилі під час її проходження площини розділу *G* середовищ з відмінними фізичними властивостями. На рис. 4.12 представлені графіки функцій $\dot{u}_{1+}, \dot{v}_{1+}, \dot{u}_{2+}, \dot{v}_{2+}$ для випадку проходження *qP*-хвилею спочатку середовища *I* - доломіт, а потім *II* - вапняк з відповідними фізичними властивостями ρ_1=2850 кг/м^3, λ_1=4,77·10^9 Па, μ_1=3,75·10^{10} Па, ρ_2=2420 кг/м^3, λ_2=3,47·10^9 Па, μ_2=0,83·10^{10} Па та параметрами пружності, що відрізняють анізотропне середовище від ізотропного, l_1=0,1λ_1, m_1=0,3μ_1, p_1=0,5(λ_1+2μ_1), l_2=–0,1λ_2, m_2=–0,3μ_2, p_2=–0,5(λ_2+2μ_2). Порівнюючи графіки функцій $\dot{u}_{1+}(\theta_{1-})$, $\dot{u}_{2+}(\theta_{1-})$ з аналогічними результатами отриманими у випадку контакту двох ізотропних середовищ (*I* - доломіт, *II* - вапняк), відзначаємо зменшення інтенсивності заломленої qP_{2+}-хвилі та збільшення – для qS_{2+}.

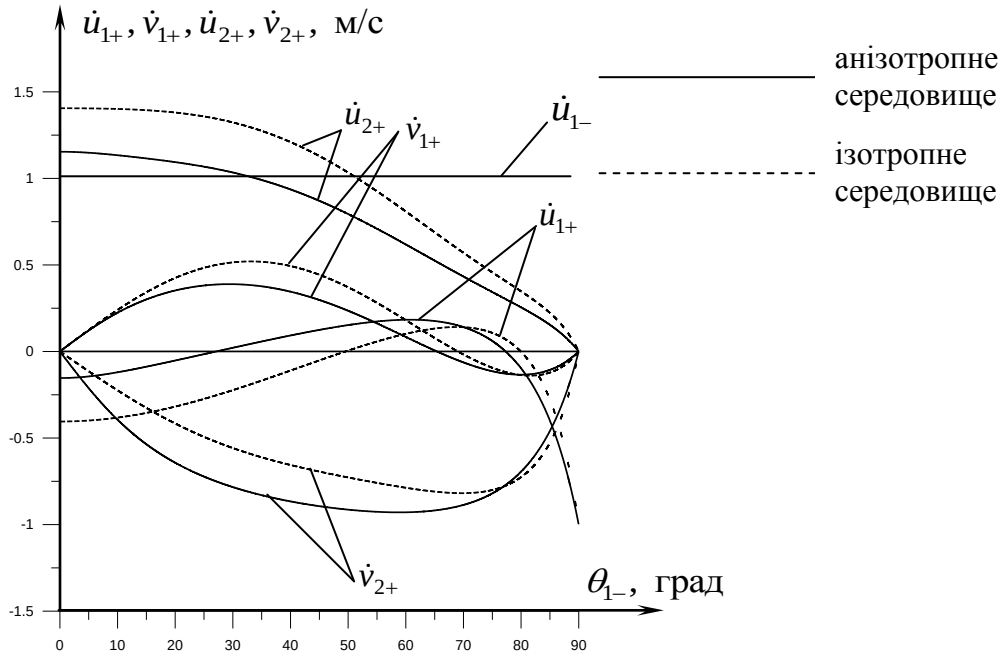


Рисунок 4.12 − Графіки інтенсивностей відбитих $(\dot{u}_{1+}, \dot{v}_{1+})$ і заломлених $(\dot{u}_{2+}, \dot{v}_{2+})$ хвиль при падінні qP_{1-}-хвилі на площину розділу G для випадку середовище I – доломіт з $l_1 = 0{,}1\lambda_1$, $m_1 = 0{,}3\mu_1$, $p_1 = 0{,}5(\lambda_1 + 2\mu_1)$; середовище II – вапняк з $l_2 = -0{,}1\lambda_2$, $m_2 = -0{,}3\mu_2$, $p_2 = -0{,}5(\lambda_2 + 2\mu_2)$

Також варто відмітити, що поширення хвилі в шарувато-неоднорідному середовищі супроводжується виникненням хвиль нової поляризації (в загальному випадку всіх трьох типів), на відміну від випадку її розповсюдження в середовищі зі змінними механічними параметрами, в якому відбувається лише поворот вектора поляризації, а не виникнення новополяризованих хвиль.

Залишаючи фізичні характеристики середовищ *I* і *II* незмінними, надамо *l*, *m* і *p* інших значень. Так, нехай l_1=0,2λ_1, m_1=0,6μ_1, p_1=0,8(λ_1+2μ_1), l_2=0,2λ_2, m_2=0,6μ_2, p_2=0,8(λ_2+2μ_2). В цьому випадку, як видно з рис. 4.13, відмічаємо значне збільшення інтенсивностей qP_{2+}- і qS_{1+}-хвиль при зміні кута падаючої хвилі θ_{1-} в межах від 0^0 до 45^0, в порівнянні з прикладом поєднання відповідних ізотропних середовищ.

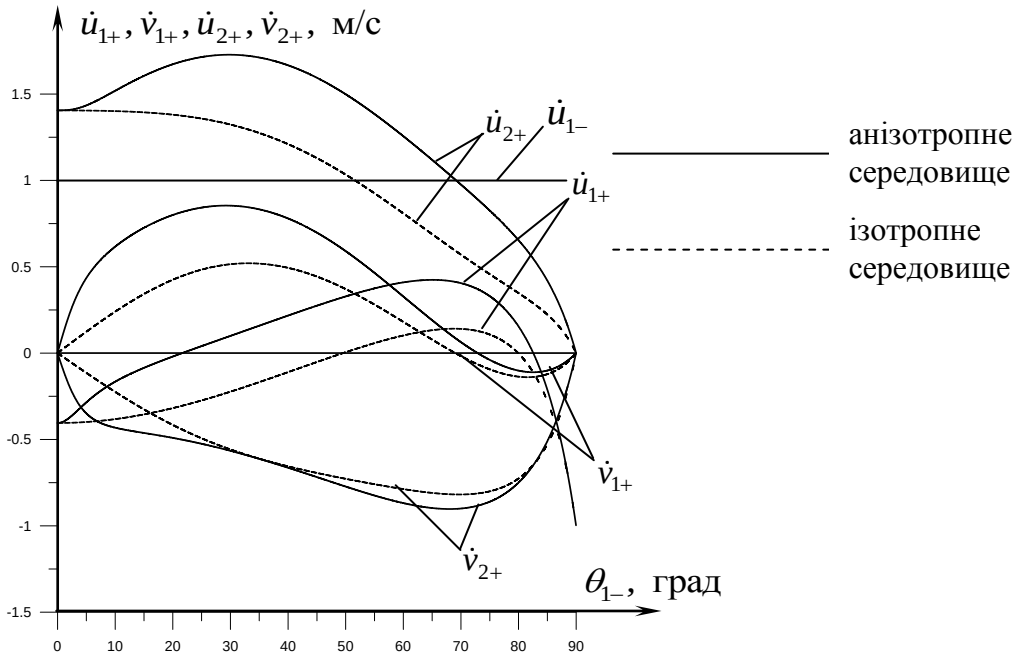


Рисунок 4.13 − Графіки інтенсивностей відбитих $(\dot{u}_{1+}, \dot{v}_{1+})$ і заломлених $(\dot{u}_{2+}, \dot{v}_{2+})$ хвиль при падінні qP_{1-}-хвилі на площину розділу G для випадку середовище I – доломіт з $l_1 = 0{,}2\lambda_1$, $m_1 = 0{,}6\mu_1$, $p_1 = 0{,}8(\lambda_1 + 2\mu_1)$; середовище II – вапняк з $l_2 = 0{,}2\lambda_2$, $m_2 = 0{,}6\mu_2$, $p_2 = 0{,}8(\lambda_2 + 2\mu_2)$

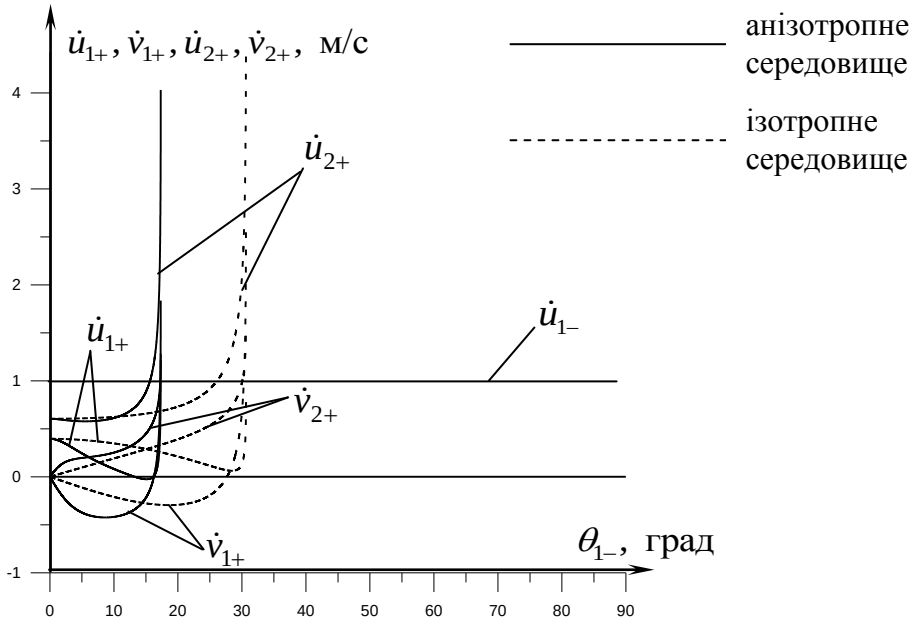


Рисунок 4.14 − Графіки інтенсивностей відбитих $(\dot{u}_{1+}, \dot{v}_{1+})$ і заломлених $(\dot{u}_{2+}, \dot{v}_{2+})$ хвиль при падінні qP_{1-}-хвилі на площину розділу G для випадку середовище I – вапняк з $l_1 = 0{,}2\lambda_1$, $m_1 = 0{,}6\mu_1$, $p_1 = 0{,}8(\lambda_1 + 2\mu_1)$; середовище II – доломіт з $l_2 = 0{,}2\lambda_2$, $m_2 = 0{,}6\mu_2$, $p_2 = 0{,}8(\lambda_2 + 2\mu_2)$

Якщо змінити порядок проходження середовищ, в ролі першого вважатимемо – вапняк, а в ролі другого – доломіт, то варто зауважити, що критичний стан системи реалізується раніше $\left(\theta_{1-} \approx 17^0\right)$, при якому інтенсивність заломленої qP_{2+} необмежено зростає (рис. 4.14).

4.2.2 Взаємодія плоскої розривної хвилі з площиною розділу двох анізотропних середовищ, з'єднаних з можливістю проковзування

Розглянемо випадок, коли два пружних трансверсально-ізотропних середовища *I* і *II* розділені площиною розділу *G*, що допускає можливість вільного проковзування. При такій постановці задачі, як вже зазначалось раніше, другі рівняння систем (4.25), (4.27) залишаються незмінними, а перші втрачають сенс. І для отримання двох інших рівнянь системи використовуємо умову збереження імпульсу в середовищі *I* вздовж осі *Ox* $\vec{i} \cdot \Delta\mathbf{Q}_{1-} = \vec{i} \cdot \Delta\mathbf{Q}_{1+}$ та рівність нулю імпульсу вздовж цієї ж осі в середовищі *II*: $\vec{i} \cdot \Delta\mathbf{Q}_{2+} = 0$.

В результаті отримаємо систему чотирьох рівнянь з чотирма невідомими

$$\begin{gathered}
\xi^1_{1+}\rho_1 \cos\theta_{1+} A^1_{1(1+)}\dot{u}_{1+} + \xi^2_{1+}\rho_1 \cos\psi_{1+} A^2_{1(1+)}\dot{v}_{1+} = \xi^1_{1-}\rho_1 \cos\theta_{1-} A^1_{1(1-)}\dot{u}_{1-}, \\
\xi^1_{2+}\rho_2 \cos\theta_{2+} A^1_{1(2+)}\dot{u}_{2+} + \xi^2_{2+}\rho_2 \cos\psi_{2+} A^2_{1(2+)}\dot{v}_{2+} = 0, \\
\xi^1_{1+}\rho_1 \cos\theta_{1+} A^1_{2(1+)}\dot{u}_{1+} + \xi^2_{1+}\rho_1 \cos\psi_{1+} A^2_{2(1+)}\dot{v}_{1+} + \xi^1_{2+}\rho_2 \cos\theta_{2+} A^1_{2(2+)}\dot{u}_{2+} + \\
+ \xi^2_{2+}\rho_2 \cos\psi_{2+} A^2_{2(2+)}\dot{v}_{2+} = \xi^1_{1-}\rho_1 \cos\theta_{1-} A^1_{2(1-)}\dot{u}_{1-}, \\
- A^1_{2(1+)}\dot{u}_{1+} - A^2_{2(1+)}\dot{v}_{1+} + A^1_{2(2+)}\dot{u}_{2+} + A^2_{2(2+)}\dot{v}_{2+} = A^1_{2(1-)}\dot{u}_{1-}.
\end{gathered} \tag{4.32}$$

Розв'язок її відбувається згідно методики, представленою в пункті 4.2.1.

На рис. 4.15 показані графіки функцій $\dot{u}_{1+}\left(\theta_{1-}\right)$, $\dot{u}_{2+}\left(\theta_{1-}\right)$, $\dot{v}_{1+}\left(\theta_{1-}\right)$, $\dot{v}_{2+}\left(\theta_{1-}\right)$, отримані для випадку падаючої qP_{1-}-хвилі на площину розділу *G*

контакту двох трансверсально-ізотропних середовищ з різними фізичними властивостями при можливості вільного проковзування по *G* (середовище *I* - доломіт, *II* - вапняк).

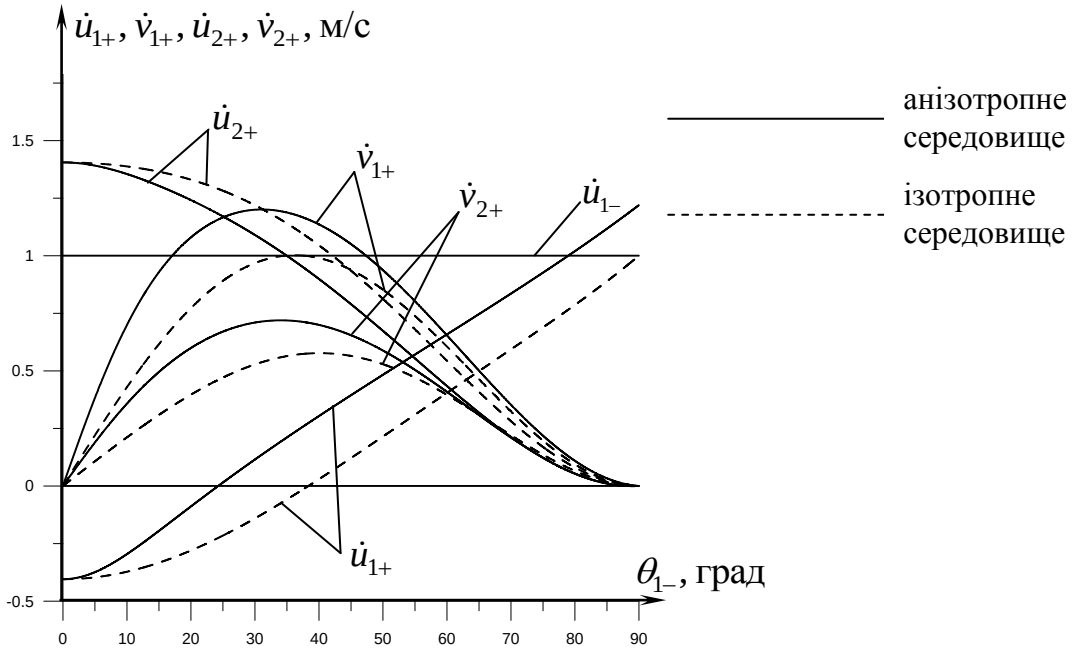


Рисунок 4.15 − Графіки інтенсивностей відбитих $(\dot{u}_{1+}, \dot{v}_{1+})$ і заломлених $(\dot{u}_{2+}, \dot{v}_{2+})$ хвиль при падінні qP_{1-}-хвилі на площину розділу G з можливістю проковзування для випадку середовище I – доломіт з $l_1 = 0{,}1\lambda_1$, $m_1 = 0{,}3\mu_1$, $p_1 = 0{,}5(\lambda_1 + 2\mu_1)$; середовище II – вапняк з $l_2 = 0{,}1\lambda_2$, $m_2 = 0{,}3\mu_2$, $p_2 = 0{,}5(\lambda_2 + 2\mu_2)$

Для цього випадку відмічаємо, що інтенсивність відбитої квазіпоперечної qS_{1+}-хвилі стала помітно більшою тому, що виконується умова збереження кількості руху вздовж осі *Ox*.

Водночас на всьому інтервалі зміни θ_{1-} відзначаємо спадання графіка функції $\dot{u}_{2+}(\theta_{1-})$ та набуття змінною $\dot{u}_{2+}$ менших значень ніж у випадку такої ж взаємодії, але ізотропних середовищ.

А також варто звернути увагу на те що, при $55^0 < \theta_{1-} < 75^0$ інтенсивності всіх новосформованих хвиль є вдвічі меншими ніж інтенсивність падаючої хвилі.

4.3 Екранування розривних хвиль в ізотропних середовищах з двома площинами розділу їх властивостей (пружним шаром)

Задачі дифракції пружних хвиль є одним з найбільш складних і актуальних з погляду застосування проблем динаміки твердого деформівного тіла, тому що наявність неоднорідностей у вигляді шаруватості, домішок, порожнин і вирізів є невід'ємною властивістю більшості реальних середовищ. Такі проблеми зумовлюють проведення математичного моделювання процесів взаємодії ударних хвиль з поверхнями розділу порід, що мають різні механічні властивості. Утворені таким чином хвильові явища мають чітко виражений ударний характер, зумовлений тим, що середовище, яке знаходиться перед рухомою частиною фронту, перебуває в недеформованому стані, за цією поверхнею функції напруження та деформації мають скінчене значення, а безпосередньо на поверхні відбувається розрив неперервності.

4.3.1 Визначення інтенсивності взаємодії падаючої розривної хвилі при проходженні пружного шару

Розглянемо випадок, коли в пружному середовищі I є шар пружного середовища II (рис. 4.16), з'єднаний без проковзування на площинах G_1 і G_2. Властивості середовищ, як і раніше, визначаються механічними параметрами: λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 – пружні константи Ламе, ρ_1, ρ_2 – густини. Нехай в середовищі I на площину G_1 під кутом θ_{1-} падає плоска поздовжня розривна P-хвиля з одиничним значенням розриву поздовжньої швидкості $\dot{u}_{1-}$. Прослідкуємо за проникненням цієї хвилі в середовище II і далі знову в I через площини G_1 і G_2 та з'ясуємо які інтенсивності матимуть новосформовані хвилі. Розв'язок поставленої задачі дозволить оцінити

ефективність екранування плоскої розривної хвилі шаром пружного середовища з відмінними властивостями.

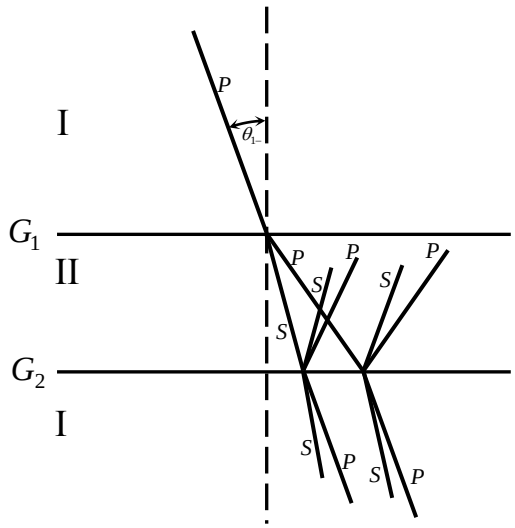


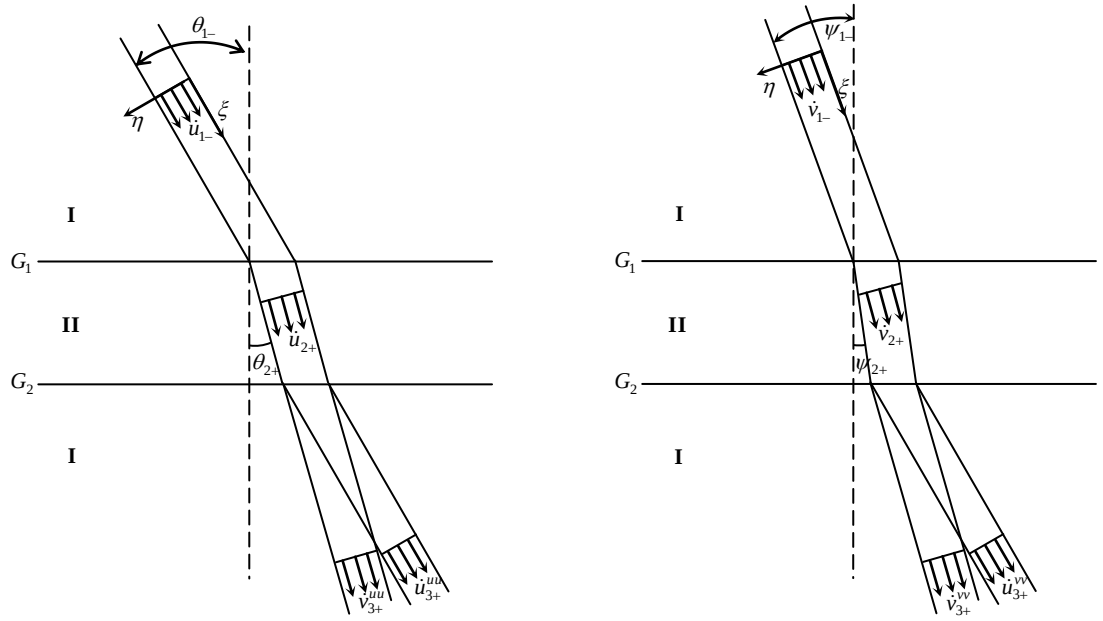
Рисунок 4.16 − Схема перетворення променів плоскої розривної хвилі під час проходження шару пружного включення

За допомогою викладеного в пункті 4.1.1 підходу виконаємо дослідження явища перетворення плоскої розривної *P*-хвилі під час її проходження через шар пружного середовища з відмінними механічними властивостями. Підрахуємо значення швидкостей $\dot{u}_{1+}, \dot{v}_{1+}, \dot{u}_{2+}, \dot{v}_{2+}$ взаємодії падаючої під різними кутами θ_{1-} *P*-хвилі спочатку з першою площиною контакту G_1 та наступної взаємодії заломлених в середовище *II* P_{2+}-, S_{2+}-хвиль із другою площиною контакту G_2 (рис. 4.17).

Так, щоб прослідкувати як екранується розривна поздовжня P_{1-}-хвиля, при її нормальному падінні на площину розділу G_1, в середовищі *I*, при наявності в ньому шару середовища *II*, потрібно розв'язок (4.9) використати на обох поверхнях розділу G_1 і G_2. Тоді

$$\dot{u}_{1++} = \frac{4\alpha_1\rho_1\alpha_2\rho_2}{\left(\alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2\right)^2}\dot{u}_{1-}, \qquad (4.21)$$

де $\dot{u}_{1++}$ - швидкість заломленої в *I* середовище поздовжньої *P*-хвилі після проходження пружного шару *II*.



а *б*

Рисунок 4.17 − Схеми проникнення падаючих *P* (а) та *S* -хвиль (б), що проходить через дві площини G_1 і G_2 розділу середовищ *I* і *II*

Пораховані за формулою (4.21) значення, при $\dot{u}_{1-} = 1 м/с$, наведені в таблиці 4.3. Аналіз цих даних дає змогу зробити висновок, що при нормальному падінні розривних поздовжніх хвиль на шар породи з відмінними властивостями ефективність екранування зростає зі збільшенням різниці їх акустичних жорсткостей $\alpha_1\rho_1 - \alpha_2\rho_2$. Наприклад, при наявності в породі доломіт з $\alpha_1\rho_1 = 18{,}8 \cdot 10^6$ кг/(с·м^2) шару вугілля з $\alpha_1\rho_1 = 1{,}5 \cdot 10^6$ кг/(с·м^2), при його проходженні поздовжня *P*-хвиля втрачає до 73% своєї початкової інтенсивності. В той час при комбінації таких гірських порід як діабаз і пісковик з $\alpha_1\rho_1 = 16{,}3 \cdot 10^6$ кг/(с·м^2) і $\alpha_1\rho_1 = 13{,}7 \cdot 10^6$ кг/(с·м^2), відповідно, зберігається 99% вихідної інтенсивності падаючої на G_1 поздовжньої *P*-хвилі.

У випадку нормального падіння на площину G_1 поперечної *S*-хвилі в середовищі *I* з пружним шаром середовища *II*, необхідно співвідношення .

Таблиця 4.3 − Дифракція поздовжньої хвилі при її нормальному падінні на площини G_1 і G_2 розділу ізотропного середовища пружним шаром

	Середовище I / Середовище II		1	2	3	4	5	6	7	8
			Вугілля $\rho=1250$ кг/м^3 $\alpha=1200$ м/с $\alpha\rho=1{,}5\cdot10^6$	Вапняк $\rho=2420$ кг/м^3 $\alpha=3430$ м/с $\alpha\rho=8{,}3\cdot10^6$	Граніт $\rho=2590$ кг/м^3 $\alpha=4650$ м/с $\alpha\rho=12{,}0\cdot10^6$	Пісковик $\rho=2630$ кг/м^3 $\alpha=5220$ м/с $\alpha\rho=13{,}7\cdot10^6$	Мармур $\rho=2730$ кг/м^3 $\alpha=5470$ м/с $\alpha\rho=14{,}9\cdot10^6$	Роговик $\rho=2590$ кг/м^3 $\alpha=6150$ м/с $\alpha\rho=15{,}9\cdot10^6$	Діабаз $\rho=2870$ кг/м^3 $\alpha=5670$ м/с $\alpha\rho=16{,}3\cdot10^6$	Доломіт $\rho=2850$ кг/м^3 $\alpha=6600$ м/с $\alpha\rho=18{,}8\cdot10^6$
			$\dot{u}_{1-}=1, \dot{v}_{1-}=0$	$\dot{u}_{1-}=1, \dot{v}_{1-}=0$	$\dot{u}_{1-}=1, \dot{v}_{1-}=0$	$\dot{u}_{1-}=1, \dot{v}_{1-}=0$	$\dot{u}_{1-}=1, \dot{v}_{1-}=0$	$\dot{u}_{1-}=1, \dot{v}_{1-}=0$	$\dot{u}_{1-}=1, \dot{v}_{1-}=0$	$\dot{u}_{1-}=1, \dot{v}_{1-}=0$
			$\dot{u}_{3+}$	$\dot{u}_{3+}$	$\dot{u}_{3+}$	$\dot{u}_{3+}$	$\dot{u}_{3+}$	$\dot{u}_{3+}$	$\dot{u}_{3+}$	$\dot{u}_{3+}$
1	Вугілля $\rho=1250$ кг/м^3 $\alpha=1200$ м/с $\alpha\rho=1{,}5\cdot10^6$	$\dot{u}_{3+}$	1	0,51851	0,39395	0,35519	0,33179	0,31463	0,30910	0,27360
2	Вапняк $\rho=2420$кг/м^3 $\alpha=3430$ м/с $\alpha\rho=8{,}3\cdot10^6$	$\dot{u}_{3+}$	0,51851	1	0,96615	0,93929	0,91851	0,90089	0,89475	0,84973
3	Граніт $\rho=2590$ кг/м^3 $\alpha=4650$ м/с $\alpha\rho=12{,}0\cdot10^6$	$\dot{u}_{3+}$	0,39395	0,96615	1	0,99572	0,98853	0,98071	0,97769	0,95190
4	Пісковик $\rho=2630$ кг/м^3 $\alpha=5220$ м/с $\alpha\rho=13{,}7\cdot10^6$,	$\dot{u}_{3+}$	0,35519	0,93929	0,99572	1	0,99823	0,99450	0,99281	0,97561
5	Мармур $\rho=2730$ кг/м^3 $\alpha=5470$ м/с $\alpha\rho=14{,}9\cdot10^6$	$\dot{u}_{3+}$	0,33179	0,91851	0,98853	0,99823	1	0,99896	0,99816	0,98680
6	Роговик $\rho=2590$ кг/м^3 $\alpha=6150$ м/с $\alpha\rho=15{,}9\cdot10^6$	$\dot{u}_{3+}$	0,31463	0,90089	0,98071	0,99450	0,99896	1	0,99989	0,99312
7	Діабаз $\rho=2870$ кг/м^3 $\alpha=5670$ м/с $\alpha\rho=16{,}3\cdot10^6$	$\dot{u}_{3+}$	0,30910	0,89475	0,97769	0,99281	0,99816	0,99989	1	0,99477
8	Доломіт $\rho=2850$ кг/м^3 $\alpha=6600$ м/с $\alpha\rho=18{,}8\cdot10^6$	$\dot{u}_{3+}$	0,27360	0,84973	0,95190	0,97561	0,98680	0,99312	0,99477	1
	Середовище III		Вугілля $\rho=1250$ кг/м^3 $\alpha=1200$ м/с	Вапняк $\rho=2420$кг/м^3 $\alpha=3430$ м/с	Граніт $\rho=2590$ кг/м^3 $\alpha=4650$ м/с	Пісковик $\rho=2630$ кг/м^3 $\alpha=5220$ м/с	Мармур $\rho=2730$ кг/м^3 $\alpha=5470$ м/с	Роговик $\rho=2590$ кг/м^3 $\alpha=6150$ м/с	Діабаз $\rho=2870$ кг/м^3 $\alpha=5670$ м/с	Доломіт $\rho=2850$ кг/м^3 $\alpha=6600$ м/с

(4.13) використати двічі: при проходженні хвилею площини G_1 та G_2 Отримаємо формулу аналогічну (4.21):

$$\dot{v}_{1++} = \frac{4\beta_1\rho_1\beta_2\rho_2}{\left(\beta_1\rho_1 + \beta_2\rho_2\right)^2}\dot{v}_{1-}, \qquad (4.22)$$

де $\dot{v}_{1++}$ - швидкість заломленої в *I* середовище поздовжньої *S*-хвилі після проходження пружного шару *II*. Пораховані за формулою (4.22) значення, при $\dot{v}_{1-} = 1 м/с$, наведені в таблиці 4.4

Аналізуючи наведені в ній значення, можемо відмітити, що як і у випадку поздовжньої *P*-хвилі, тут також наявні екрануючі властивості середовища при існуванні в ньому шару пружного середовища з відмінними механічними властивостями. Зокрема, така особливість проявляється при комбінації двох середовищ з різко відмінними значеннями акустичних жорсткостей $\alpha_1\rho_1$ і $\alpha_2\rho_2$.

Розв'язуючи двічі систему чотирьох рівнянь (4.5), (4.7) побудуємо графіки зміни швидкостей $\dot{u}_{1+}, \dot{v}_{1+}, \dot{u}_{2+}, \dot{v}_{2+}$ новоутворених розривних хвиль при проходженні пружного шару з відмінними фізичними властивостями на всьому діапазоні $0^0 \le \theta_{1-} \le 90^0$. На рис. 4.18 представлені графіки зміни функцій інтенсивностей $\dot{u}^{uu}_{22++}, \dot{v}^{uu}_{22++}$ хвиль відбитих від площини G_2 при взаємодії хвилі $\dot{u}_{2+}$, що проникла із середовища *I* в середовище *II*, в залежності від кута падіння θ_{1-} хвилі $\dot{u}_{1-}$ на площину G_1. Поздовжні і поперечні хвилі, що проникли в середовище *I* через площину G_2, відповідно, позначені $\dot{u}^{uu}_{3++}$ і $\dot{v}^{uu}_{3++}$. В якості середовищ *I* і *II* вибрані, відповідно, доломіт та вугілля. Відзначаємо, що хвилі, які проникли через площину G_2, мають майже вдвічі меншу інтенсивність в порівнянні з початковою падаючою $\dot{u}_{1-}$ хвилею. В даному випадку розглянута комбінація середовищ володіє помітними екрануючими властивостями.

Таблиця 4.4 − Дифракція поперечної хвилі при її нормальному падінні на площини G_1 і G_2 розділу ізотропного середовища пружним шаром

	Середовище I / Середовище II		1	2	3	4	5	6	7	8
			Вугілля $\rho=1250$ кг/м^3 $\beta=720$ м/с $\beta\rho=0{,}9\cdot10^6$	Вапняк $\rho=2420$ кг/м^3 $\beta=1860$ м/с $\beta\rho=4{,}5\cdot10^6$	Граніт $\rho=2590$ кг/м^3 $\beta=2900$ м/с $\beta\rho=7{,}51\cdot10^6$	Пісковик $\rho=2630$ кг/м^3 $\beta=2900$ м/с $\beta\rho=7{,}63\cdot10^6$	Мармур $\rho=2730$ кг/м^3 $\beta=3100$ м/с $\beta\rho=8{,}46\cdot10^6$	Роговик $\rho=2590$ кг/м^3 $\beta=3380$ м/с $\beta\rho=8{,}75\cdot10^6$	Діабаз $\rho=2870$ кг/м^3 $\beta=3560$ м/с $\beta\rho=10{,}2\cdot10^6$	Доломіт $\rho=2850$ кг/м^3 $\beta=3630$ м/с $\beta\rho=10{,}3\cdot10^6$
			$\dot{u}_{1-}=0,\dot{v}_{1-}=1$	$\dot{u}_{1-}=0,\dot{v}_{1-}=1$	$\dot{u}_{1-}=0,\dot{v}_{1-}=1$	$\dot{u}_{1-}=0,\dot{v}_{1-}=1$	$\dot{u}_{1-}=0,\dot{v}_{1-}=1$	$\dot{u}_{1-}=0,\dot{v}_{1-}=1$	$\dot{u}_{1-}=0,\dot{v}_{1-}=1$	$\dot{u}_{1-}=0,\dot{v}_{1-}=1$
			$\dot{v}_{3+}$	$\dot{v}_{3+}$	$\dot{v}_{3+}$	$\dot{v}_{3+}$	$\dot{v}_{3+}$	$\dot{v}_{3+}$	$\dot{v}_{3+}$	$\dot{v}_{3+}$
1	Вугілля $\rho=1250$ кг/м^3, $\beta=720$ м/с	$\dot{v}_{3+}$	1	0,55546	0,38221	0,37763	0,34753	0,33813	0,29761	0,29451
2	Вапняк $\rho=2420$ кг/м^3, $\beta=1860$ м/с	$\dot{v}_{3+}$	0,55546	1	0,93722	0,93358	0,90661	0,89706	0,84918	0,84505
3	Граніт $\rho=2590$ кг/м^3, $\beta=2900$ м/с	$\dot{v}_{3+}$	0,38221	0,93722	1	0,99994	0,99645	0,99416	0,97670	0,97480
4	Пісковик $\rho=2590$ кг/м^3, $\beta=2900$ м/с	$\dot{v}_{3+}$	0,37763	0,93358	0,99994	1	0,99730	0,99527	0,97893	0,97712
5	Мармур $\rho=2730$ кг/м^3, $\beta=3100$ м/с	$\dot{v}_{3+}$	0,34753	0,90661	0,99645	0,99730	1	0,99971	0,99118	0,98998
6	Роговик $\rho=2590$ кг/м^3, $\beta=3380$ м/с	$\dot{v}_{3+}$	0,33813	0,89706	0,99416	0,99527	0,99971	1	0,99405	0,99306
7	Діабаз $\rho=2870$ кг/м^3, $\beta=3560$ м/с	$\dot{v}_{3+}$	0,29761	0,84918	0,97670	0,97893	0,99118	0,99405	1	0,99996
8	Доломіт $\rho=2850$ кг/м^3, $\beta=3630$ м/с	$\dot{v}_{3+}$	0,29451	0,84505	0,97480	0,97712	0,98998	0,99306	0,99996	1
	Середовище III		Вугілля $\rho=1250$ кг/м^3 $\beta=720$ м/с	Вапняк $\rho=2420$ кг/м^3 $\beta=1860$ м/с	Граніт $\rho=2590$ кг/м^3 $\beta=2900$ м/с	Пісковик $\rho=2630$ кг/м^3 $\beta=2900$ м/с	Мармур $\rho=2730$ кг/м^3 $\beta=3100$ м/с	Роговик $\rho=2590$ кг/м^3 $\beta=3380$ м/с	Діабаз $\rho=2870$ кг/м^3 $\beta=3560$ м/с	Доломіт $\rho=2850$ кг/м^3 $\beta=3630$ м/с

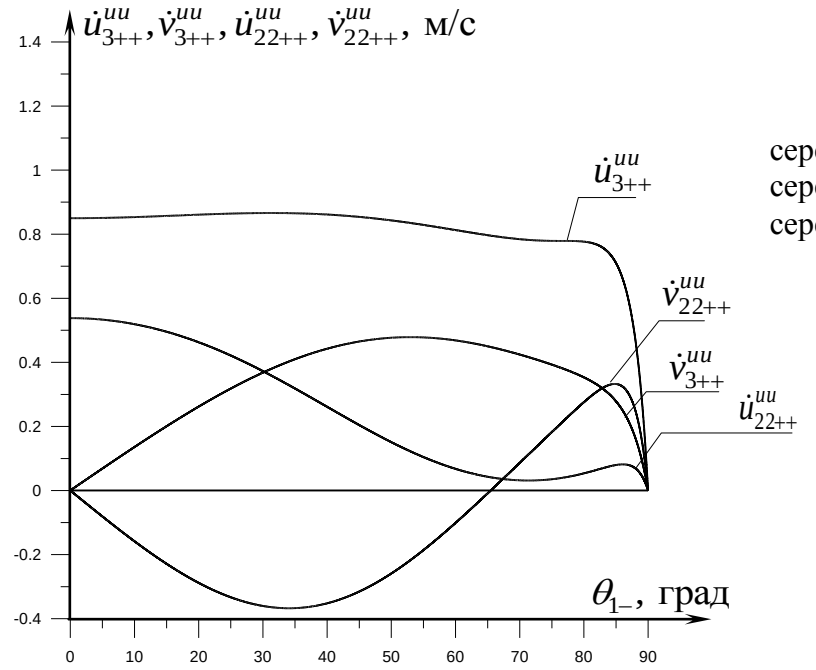


Рисунок 4.18 − Графіки інтенсивності заломлених $\left(\dot{u}^{uu}_{3++}, \dot{v}^{uu}_{3++}\right)$ і відбитих $\left(\dot{u}^{uu}_{22++}, \dot{v}^{uu}_{22++}\right)$ розривних хвиль, які сформувалися в результаті взаємодії поздовжньої хвилі $\dot{u}_{2+}$ з площиною G_2

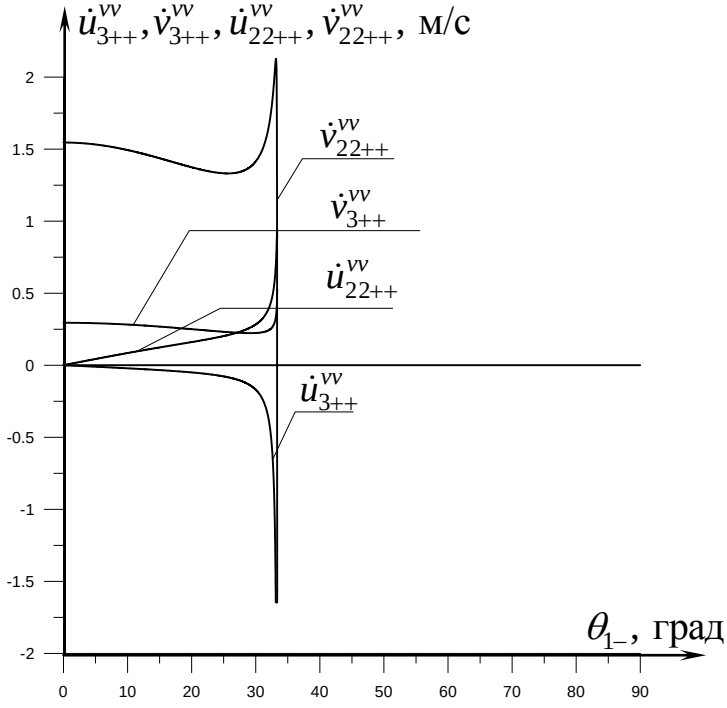


Рисунок 4.19 − Графіки інтенсивності заломлених $\left(\dot{u}^{vv}_{3++}, \dot{v}^{vv}_{3++}\right)$ і відбитих $\left(\dot{u}^{vv}_{22++}, \dot{v}^{vv}_{22++}\right)$ розривних хвиль, які сформувалися в результаті взаємодії поперечної хвилі $\dot{v}_{2+}$ з площиною G_2

Аналогічні дослідження проведені і для випадку падіння поперечної *S*-хвилі на площину розділу G_1 з одиничним значенням розриву поперечної швидкості $\dot{v}_{1-}$. Тоді в системі (4.5), (4.7) відповідні ліві частини залишаються незмінними, а стовпчик вільних членів замінюється наступним співвідношенням:

$$\left(-\beta_1\rho_1 \sin\psi_{1-}\cos\psi_{1-}\dot{v}_{1-}; -\beta_1\rho_1\cos^2\psi_{1-}\dot{v}_{1-}; \sin\psi_{1-}\dot{v}_{1-};\ \cos\psi_{1-}\dot{v}_{1-}\right).$$

На рис. 4.19 представлені графічні результати дослідження. В цьому випадку $\dot{u}^{vv}_{22++}, \dot{v}^{vv}_{22++}$ - інтенсивності хвиль відбитих від площини G_{211} при взаємодії хвилі $\dot{v}_{2+}$, що проникла із середовища *I* в середовище *II*, при падінні поперечної хвилі $\dot{v}_{1-}$ на площину G_1, а $\dot{u}^{vv}_{22++}, \dot{v}^{vv}_{22++}$ - інтенсивності заломлених поздовжніх та поперечних хвиль, відповідно, в середовище *I* після взаємодії з площиною розділу G_2 поперечної S_{2+}-хвилі. При такій постановці задачі слід відзначити виникнення ефекту квазіповного внутрішнього відбиття при $\psi_{1-} = 33^0$ та прямування значень шуканих функцій $\dot{u}^{vv}_{22++}, \dot{v}^{vv}_{22++}, \dot{u}^{vv}_{3++}, \dot{v}^{vv}_{3++}$ до нескінченності.

4.3.2 Визначення інтенсивності взаємодії падаючої розривної хвилі з пружним шаром при умовах можливого проковзування на граничних площинах

З метою визначення умов більш ефективного екранування розривної хвилі розглянемо другу модель контакту двох пружних середовищ, в якій використовуються умови контакту з можливим проковзуванням по площинам розділу G_1 і G_2 та рівності нулю їх дотичних напружень. Щоб прослідкувати за екрануванням розривної поздовжньої *P*-хвилі в середовищі *I* наявним в ньому шаром середовища *II*, потрібно розв'язати систему рівнянь (4.19) на кожній з площин контакту G_1 і G_2.

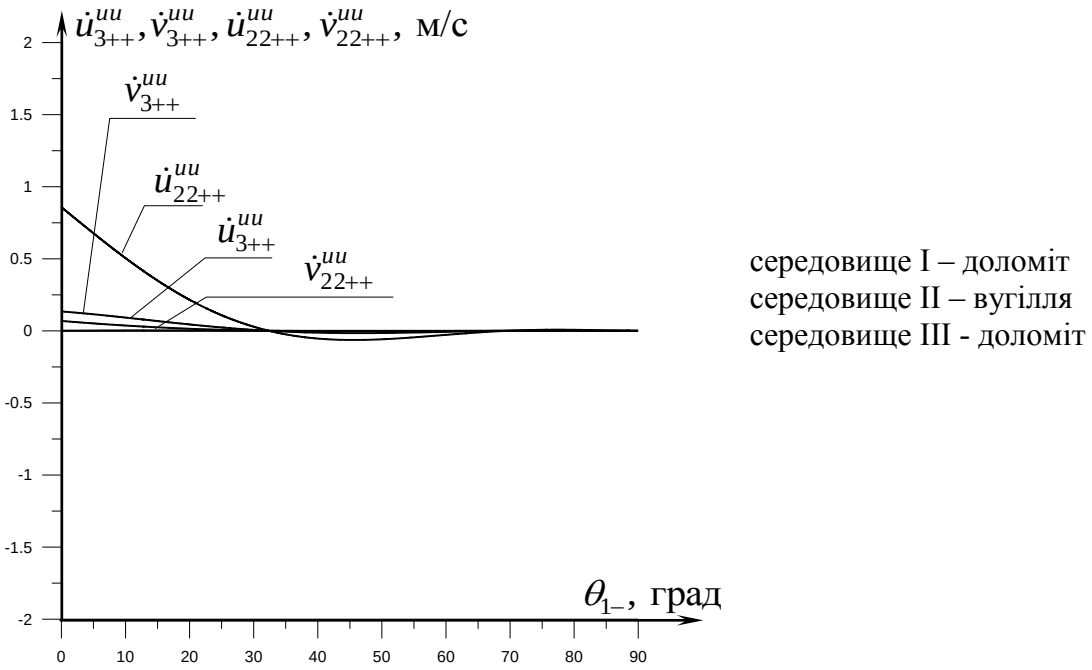


Рисунок 4.20 − Графіки інтенсивності заломлених $\left(\dot{u}^{uu}_{3++}, \dot{v}^{uu}_{3++}\right)$ і відбитих $\left(\dot{u}^{uu}_{22++}, \dot{v}^{uu}_{22++}\right)$ розривних хвиль, які сформувалися в результаті взаємодії поздовжньої хвилі $\dot{u}_{2+}$ з площиною G_2 при наявності тріщини

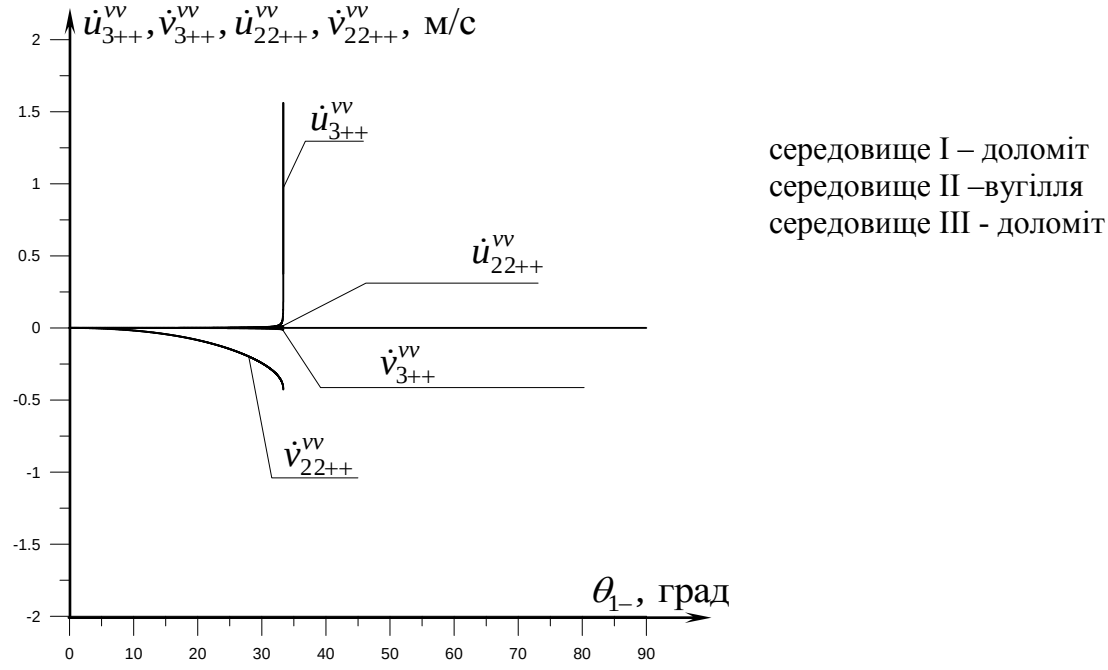


Рисунок 4.21 − Графіки інтенсивності заломлених $\left(\dot{u}^{vv}_{3++}, \dot{v}^{vv}_{3++}\right)$ і відбитих $\left(\dot{u}^{vv}_{22++}, \dot{v}^{vv}_{22++}\right)$ розривних хвиль, які сформувалися в результаті взаємодії поперечної хвилі $\dot{v}_{2+}$ з площиною G_2 при наявності тріщини

На рис. 4.20 побудовані графіки функцій $\dot{u}^{uu}_{22++}(\theta_{1-})$, $\dot{v}^{uu}_{22++}(\theta_{1-})$, $\dot{u}^{uu}_{3++}(\theta_{1-})$, $\dot{v}^{uu}_{3++}(\theta_{1-})$ для випадку комбінації середовищ *I* - доломіт, *II* - вугілля. Відзначаємо значне зменшення інтенсивностей як відбитих $(P_{22++},\ S_{22++})$, так і заломлених $(P_{3++},\ S_{3++})$-хвиль в порівнянні з початковою інтенсивністю $\dot{u}_{1-}=1$м/с падаючої P_{1-}-хвилі. Зіставляючи графічні результати першої та другої моделей контакту середовищ (рис. 4.18 і рис. 4.20), можемо бачити, що у випадку використання моделі контакту з можливістю проковзування ефект екранування розривної хвилі є більш помітним.

Виявлена тенденція зберігається, як видно з рис. 4.21, і для випадку взаємодії з площиною G_2 поперечної S_{2+}-хвилі, що проникла із середовища *I* (доломіт) в середовище *II* (вугілля) в результаті взаємодії з площиною розділу G_1 поперчної S_{1-}-хвилі інтенсивностю $v_{1-}=1\,м/с$ під кутом ψ_{1-}.

Підсумовуючи вище сказане, можемо зробити висновок, що при наявності в ізотропному середовищі пружного шару з відмінними фізичними властивостями призводить по-перше до постійного розкладання хвилі на дві відбиті та дві заломлені при кожному контакті двох різних середовищ, а по-друге до суттєвого зменшення інтенсивностей як відбитих , так і заломлених хвиль у випадку контакту досліджуваних середовищ з можливістю проковзування на площині їх дотику.

4.4 Екранування розривних хвиль клиноподібним пружним шаром

4.4.1 Динаміка падаючої розривної хвилі при проходженні клиноподібного пружного шару

Розглянемо випадок, коли в пружному середовищі *I* знаходиться пружне включення шару середовища *II* клиноподібного типу (рис. 4.22), з'єднаний без проковзування по площинах G_1 і G_2.

Властивості середовища визначаються наступними механічними параметрами: λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 − параметри Ламе; ρ_1, ρ_2 − густини. Нехай в середовищі *I* на площину G_1 під кутом θ_{1-} падає плоска поздовжня розривна *P*-хвиля з одиничним значенням розриву поздовжньої швидкості $\dot{u}_{1-}$. Простежимо за характером проникнення даної хвилі в середовище *II* і далі знову в середовище в *I*, проходячи через площини G_1, G_2, і які інтенсивності мають утворені хвилі.

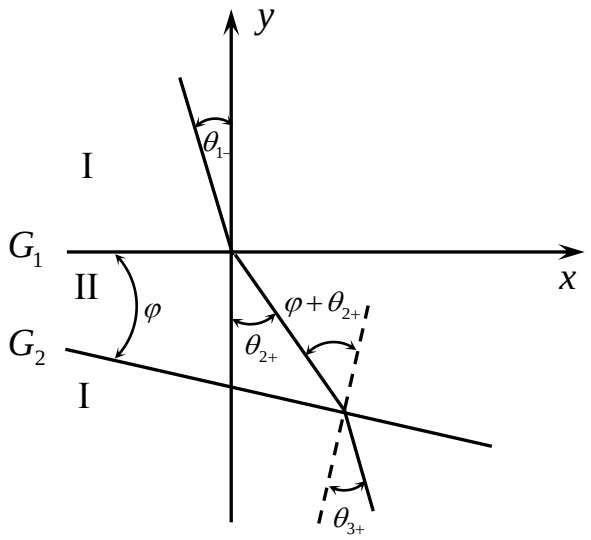


Рисунок 4.22 − Схема перетворення променів плоскої розривної хвилі під час проходження клиноподібного шару пружного включення

При виведенні рівнянь динамічної взаємодії розривної хвилі з площиною G_1 з'єднання середовищ *I* і *II* використаємо, як і в попередніх пунктах даного розділу, умови збереження імпульсу та нерозривності швидкостей частинок. Отримаємо знову систему рівнянь (4.5), (4.7). При подальшій взаємодії, наприклад, заломленої хвилі P_{2+} з площиною розділу G_2 в системі рівнянь (4.5), (4.7) потрібно врахувати, що в цьому випадку кут падіння складатиме $\theta_{2+}+\varphi$, де φ - кут між площинами G_1 і G_2. Тоді ще раз розв'язуючи систему рівнянь (4.5), (4.7) з новим кутом падіння, отримаємо значення інтенсивностей $\dot{u}^{uu}_{22++}$, $\dot{v}^{uu}_{22++}$ відбитих $(P_{22++}$ і $S_{22++})$ хвиль від

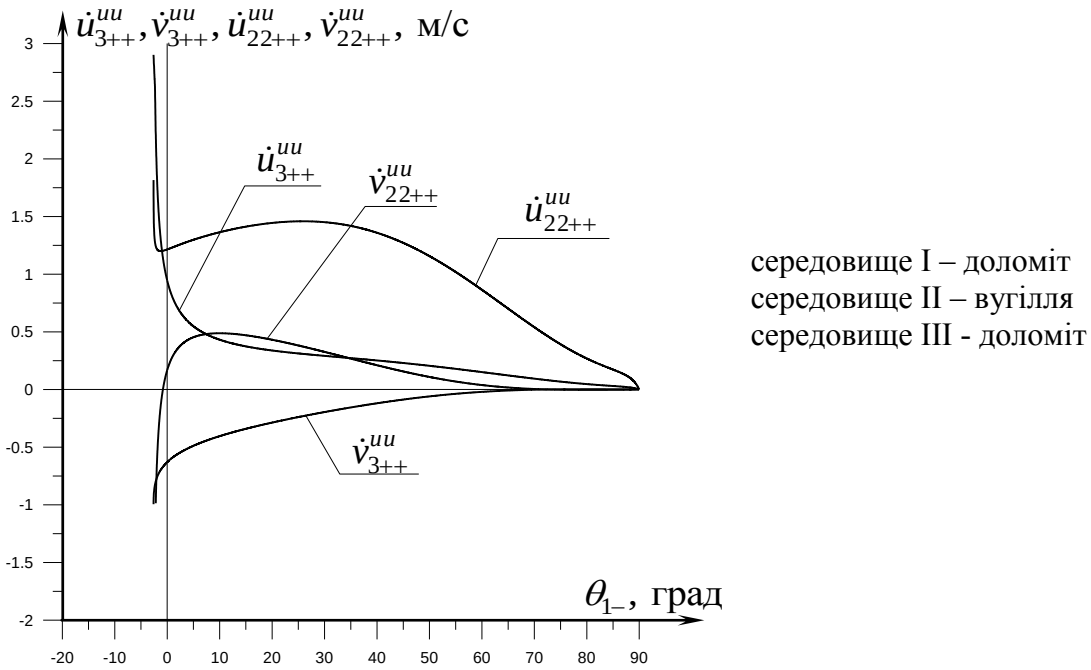


Рисунок 4.23 − Графіки інтенсивності заломлених $\left(\dot{u}^{uu}_{3++}, \dot{v}^{uu}_{3++}\right)$ і відбитих $\left(\dot{u}^{uu}_{22++}, \dot{v}^{uu}_{22++}\right)$ розривних хвиль на площині G_2 клиноподібного пружного тіла, випадок взаємодії з G_1 поздовжньої P_{1-}-хвилі

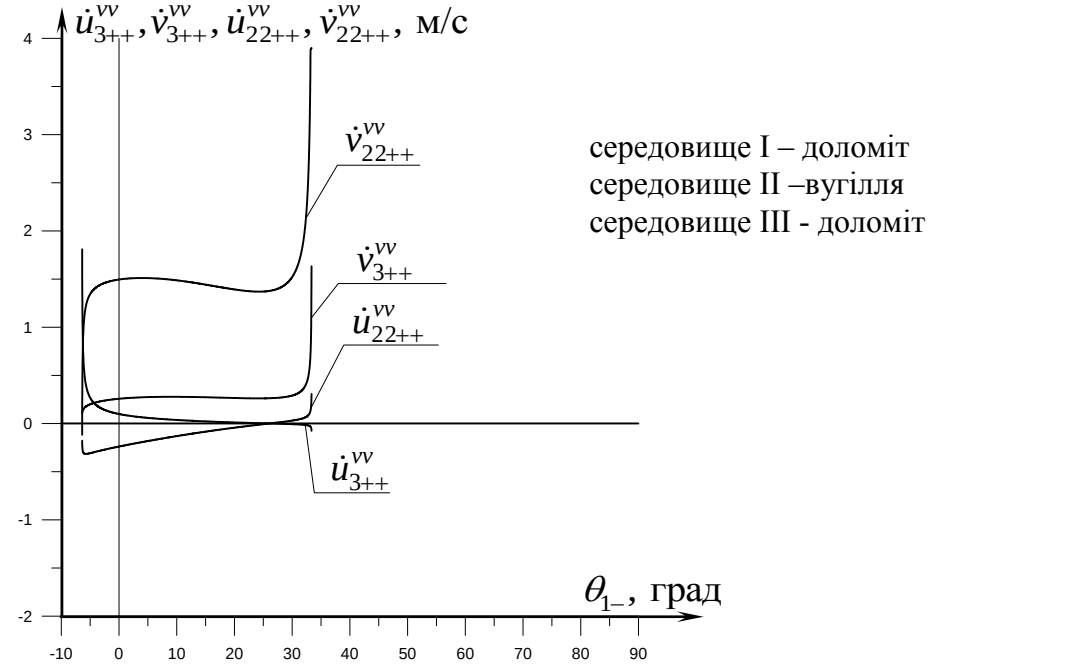


Рисунок 4.24 − Графіки інтенсивності заломлених $\left(\dot{u}^{vv}_{3++}, \dot{v}^{vv}_{3++}\right)$ і відбитих $\left(\dot{u}^{vv}_{22++}, \dot{v}^{vv}_{22++}\right)$ розривних хвиль на площині G_2 клиноподібного пружного тіла, випадок взаємодії з G_1 поперечної S_{1-}-хвилі

площини G_2 при взаємодії хвилі $\dot{u}_{2+}$, яка сформувалась в результаті взаємодії з площиною G_1 падаючої поздовжньої P_{1-} хвилі. А також інтенсивності $\dot{u}^{uu}_{3++}$, $\dot{v}^{uu}_{3++}$ заломлених $(P_{3++}$ і $S_{3++})$-хвиль в середовище I при взаємодії поздовжньої хвилі P_{2+} з G_2.

За допомогою викладеного підходу проведемо дослідження явищ перетворення плоскої розривної P_{1-}-хвилі під час її проходження через клиноподібний шар пружного середовища з відмінними механічними властивостями. Підрахуємо значення швидкостей $\dot{u}_{1+}, \dot{v}_{1+}, \dot{u}_{2+}, \dot{v}_{2+}$ взаємодії падаючої під різними кутами θ_{1-} P_{1-}-хвилі спочатку з першою площиною контакту G_1 і наступної взаємодії P_2-, що проникли в середовище *II,* із другою площиною контакту G_2. В якості досліджуваних середовищ *I* і *II* вибрані відповідно доломіт та вугілля, як одні з найбільш розповсюджених в природі порід, а кут між площинами розділу G_1 та G_2 становить $\varphi \pm 10^0$. На рис. 4.23 представлені графіки зміни функцій інтенсивностей $\dot{u}^{uu}_{22++}, \dot{v}^{uu}_{22++}$ хвиль відбитих від площини G_2 при взаємодії хвилі $\dot{u}_{2+}$, що проникла із середовища *I* в середовище *II*, в залежності від кута падіння θ_{1-} хвилі $\dot{u}_{1-}$ на площину G_2. Поздовжні і поперечні хвилі, що проникли в середовище *I* через площину G_2, відповідно, позначені $\dot{u}^{uu}_{3++}$ і $\dot{v}^{uu}_{3++}$. При значенні $\theta_{1-} = -2{,}6^0$ реалізується ефект повного внутрішнього відбиття на G_2 та інтенсивність всіх перетворених хвиль прямує до нескінченності. Можна бачити, що хвилі, які проникли через площину G_2, мають майже вдвічі меншу інтенсивність в порівнянні з початковою падаючою $\dot{u}_{1-}$ хвилею. В даному випадку розглянута комбінація середовищ володіє помітними екрануючими властивостями. Також спостерігаємо суттєве зменшення інтенсивностей P_{3++} S_{3++}-хвиль, які утворились в результаті взаємодії S_{2+}-хвилі, що проникла із середовища *I* в *II* під час взаємодії S_{1-}-хвилі з G_1 з площиною розділу G_2 (рис. 4.24).

4.4.2 Динаміка взаємодії падаючої розривної хвилі з клиноподібним пружним шаром при умовах можливого проковзування на граничних площинах шару

Щоб реалізувати випадок контакту тіл з проковзуванням для середовища з клиноподібним пружним шаром, то потрібно на кожній з площин розділу G_1 і G_2 розв'язати отриману раніше систему рівнянь (4.20), враховуючи при цьому, що кут падіння, наприклад, поздовжньої P_{2+}-хвилі на G_2 дорівнюватиме $\theta_{2+} + \varphi$. Таким чином досліджена вищерозглянута система двох середовищ зі зміненими умовами їх взаємодії. Графічні результати, представлені на рис. 4.25, відповідають результатам на рис. 4.23. Вони свідчать про те, що зміна умов дотику площин вплинула лише на зміну інтенсивності хвилі $\dot{v}^{uu}_{22++}$, водночас як інтенсивності інших хвиль залишились практично незмінними.

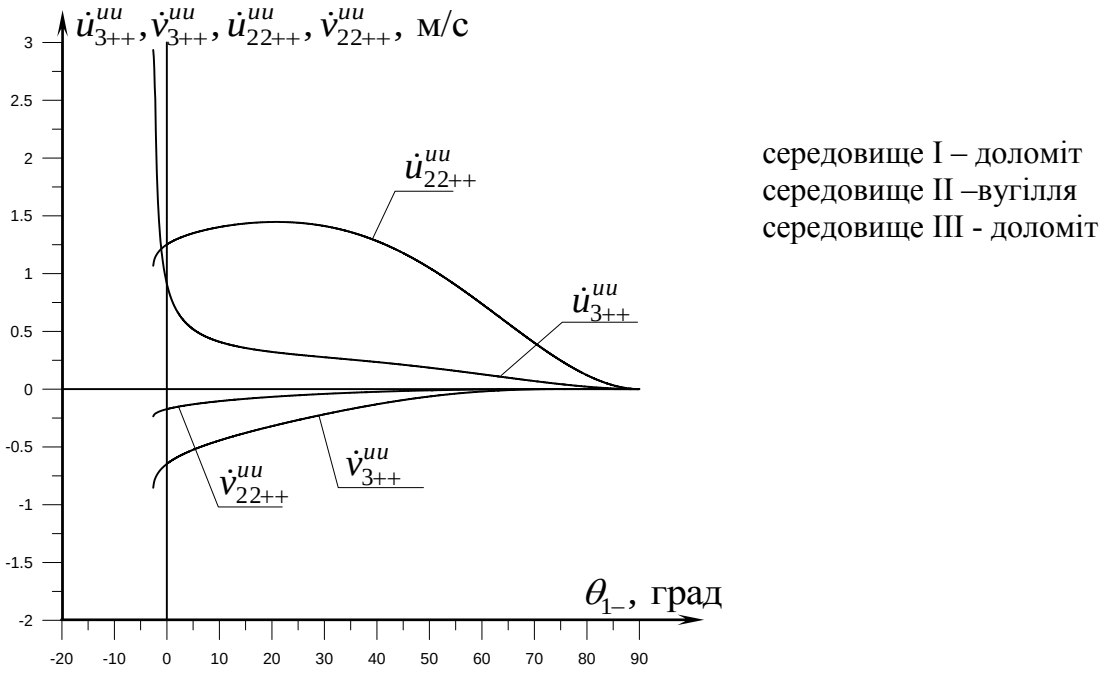


Рисунок 4.25 − Графіки інтенсивності заломлених $\left(\dot{u}^{uu}_{3++}, \dot{v}^{uu}_{3++}\right)$ і відбитих $\left(\dot{u}^{uu}_{22++}, \dot{v}^{uu}_{22++}\right)$ розривних хвиль на площині G_2 клиноподібного пружного тіла, випадок взаємодії з G_1 поздовжньої P_{1-}-хвилі та наявністю тріщини на G_1 та G_2

Якщо порядок проходження середовищ *I* та *II* поміняти місцями, то зона пропускання розривних хвиль клиноподібним включенням з доломіту істотно зменшується і виявляється рівною $-10{,}5^0 < \theta_{1-} < 10{,}5^0$. Графіки інтенсивності розривних хвиль, що сформувалися на площині G_2 для цього випадку, показані на рис. 4.26. Можна помітити, що в зоні пропускання цих хвиль їх інтенсивності мають досить малі значення, тому в даному випадку на клиноподібному включенні більш помітно помічається ефект екранування розривних хвиль.

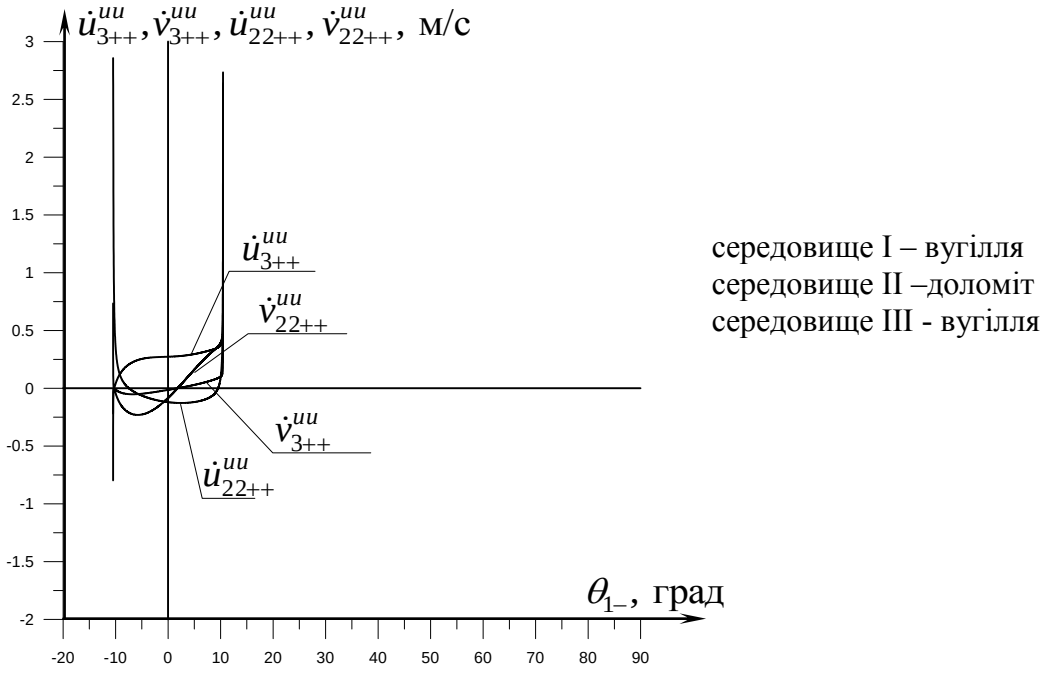


Рисунок 4.26 − Графіки інтенсивності заломлених $\left(\dot{u}^{uu}_{3++}, \dot{v}^{uu}_{3++}\right)$ і відбитих $\left(\dot{u}^{uu}_{22++}, \dot{v}^{uu}_{22++}\right)$ розривних хвиль на площині G_2 клиноподібного пружного тіла, випадок взаємодії з G_1 поздовжньої P_{1-}-хвилі та наявністю тріщини на G_1 та G_2

Також було виконане дослідження взаємодії падаючої розривної хвилі з клиноподібним пружним шаром при умовах можливого проковзування на одній з граничних площин шару. Однак результати розрахунків показали, що такі комбінації умов дотику середовищ з відмінними фізичними

властивостями не призводять до помітного впливу на характер зміни інтенсивностей новосформованих хвиль. Тому в роботі ці результати не приводяться.

На завершення цього розділу відмітимо, що в будівельній механіці пропонуються різні варіанти екранування будівель і споруд як засіб їх захисту від вібрацій та сейсмічних впливів. Ці методи добре зарекомендували себе під час захисту споруд від короткохвильових динамічних впливів промислової вібрації та транспорту. Такий спосіб екранування і сейсмозахисту можна вважати активним.

Однак спеціалісти в області сейсмостійкого будівництва зазвичай екранування не розглядають як можливий засіб сейсмозахисту, так як розмір екрана має бути співрозмірним з розмірами сейсмічних хвиль, які, як правило, можуть бути достатньо довгими. Втім наявність екранів може впливати на коливання споруд, змінюючи картину хвильового поля на місці розташування фундаменту.

Проте досить ефективним може бути спосіб пасивного (природного) екранування розривних хвиль, за рахунок пошуку на земній поверхні зон, в яких зменшення інтенсивності сейсмічних впливів відбувається за рахунок природних неоднорідностей (екранів) в тектонічних структурах в наземному та підземному околі досліджуваного об’єкта. Для цього потрібно методами сейсморозвідки вивчити геологічну структуру порід у виділеній зоні, ідентифікувати її шарувату або неоднорідну структуру, потім методами, розробленими в дисертації, перевірити екранують, гасять чи, навпаки, підсилюють ці неоднорідності сейсмічні хвилі, які приходять від джерела збурення, і потім вирішувати щодо можливості побудови цього об’єкта.

4.5 Висновки до розділу 4

1. В розділі 4 за допомогою променевого методу поставлена і розв’язана задача поширення слабких ударних хвиль в шарувато-

неоднорідних пружних середовищах з розривними функціями механічних властивостей. Запропоновано методику геометричної побудови фронтів відбитих та заломлених хвиль на поверхнях розділу та обчислення їх інтенсивностей. Показано, що поширення хвиль в таких неоднорідних пружних середовищах, на відміну від випадків неперервно неоднорідних середовищ, супроводжується виникненням хвиль нової поляризації.

2. Встановлено, що екранування площиною розділу розривної хвилі при її похилому падінні залежить не лише від механічних властивостей середовищ, але також від порядку їх проходження.

3. З'ясовано, що при наявності в породі пружного шару зі значно відмінним значенням акустичної жорсткості, поздовжня хвиля при його проходженні може втрачати до 73% своєї початкової інтенсивності.

4. Досліджені випадки сполучення середовищ з можливістю проковзування контактуючих середовищ на площині G їх розділу, а також без такої можливості. З'ясовано, що в обох випадках контакту наявність в однорідному середовищі площини розділу G дає змогу розкласти падаючу поздовжню (поперечну) хвилю на чотири розривні хвилі різної поляризації і тим самим екранувати її та зменшити інтенсивність її ударної взаємодії на екрануючих тілах, доводячи інколи значення інтенсивності заломленої хвилі до нуля. Відзначено, що у випадку контакту середовищ з можливістю проковзування екрануючий ефект є більш помітним.

5. Виконані дослідження явища перетворення плоскої розривної хвилі паралельним та клиноподібним шарами з відмінними механічними властивостями. Встановлено, що при наявності клиноподібного включення більш помітно проявляється ефект екранування розривних хвиль.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена постановці і розв’язанню нової актуальної наукової задачі про дифракцію розривних (слабких ударних) хвиль на неперервних та розривних неоднорідностях ізотропних та анізотропних середовищ з метою вивчення ефекту їх екранування та гасіння. Отримано такі наукові результати:

1. На базі аналізу публікацій з проблем поширення біжучих хвиль у пружних однорідних і неоднорідних, ізотропних і анізотропних середовищах, обговорено хвильові сейсмічні процеси, які генеруються в тектонічних структурах з неперервними та розривними неоднорідностями.

Виявлено, що питанням поширення і перетворення фронтів розривних (слабких ударних) хвиль присвячена порівняно невелика кількість праць, причому явища екранування хвиль за рахунок відхилення їхніх променів та відбиття від неоднорідностей, залишились поза увагою дослідників.

Зроблено висновок, що дисертаційна робота, у якій здійснено теоретичне моделювання сейсмічних явищ з метою визначення можливостей зниження їх інтенсивності за рахунок перетворення та екранування сейсмічних хвиль на неперервних та розривних неоднорідностях механічних властивостей середовищ, є актуальною.

2. На основі променевого методу розроблено математичну модель і побудовано основні співвідношення кінематики та динаміки поширення розривних хвиль в ізотропних та трансверсально-ізотропних пружних середовищах із неперервними та шарувато-розривними неоднорідностями їх механічних параметрів.

3. Запропоновано методику комп’ютерної реалізації розробленого підходу. Показано, що завдяки використанню променевого методу поверхні геометричних фронтів, які трансформуються, збігаються з поверхнями розривів полів деформацій та напружень пружного середовища, тому цей метод є найефективнішим засобом моделювання перетворення таких хвиль у неоднорідних структурах.

4. Досліджено питання перебудови систем променів і фронтів розривних хвиль у пружних середовищах, механічні параметри яких є неперервними елементарними функціями просторових координат або мають умовно шарувату структуру. Показано, що ці процеси можуть супроводжуватись явищами розбіжності променів, їх викривленням, відхиленням від певної зони середовища та зміною напряму розповсюдження, а також збільшенням або зменшенням інтенсивності хвилі.

Встановлено, що у всіх розглянутих випадках трансформування хвилі супроводжується лише поворотом вектора поляризації без зміни його типу та без появи хвиль нової поляризації.

5. Поставлена і розв’язана задача поширення слабких ударних хвиль у шарувато-неоднорідних пружних середовищах з розривними функціями механічних властивостей. Показано, що поширення хвиль у таких середовищах, на відміну від випадків у неперервно-неоднорідних середовищах, супроводжується виникненням хвиль нової поляризації.

6. Досліджено випадки сполучення середовищ із можливістю їх проковзування на площині розділу, а також без такої можливості. З’ясовано, що в обох випадках наявність у середовищі площини розділу дає змогу розкласти падаючу хвилю на чотири розривні хвилі різної поляризації і тим самим екранувати її та зменшити її інтенсивність. Відзначено, що у випадку контакту середовищ із можливістю проковзування ефект екранування є більш помітним і при деяких значеннях кутів падіння квазіпоздовжні хвилі можуть повністю відбиватись від поверхні розділу.

7. Встановлено також, що ефект екранування посилюється зі збільшенням різниці акустичних жорсткостей контактуючих середовищ і при деяких сполученнях середовищ заломлені хвилі можуть втрачати свою інтенсивність більше ніж в два рази.

8. Отримані результати є новими, вони можуть бути використані для моделювання ефектів захисту об’єктів та споруд від дії ударних (зокрема і сейсмічних) хвиль шляхом їх екранування природними або штучно створеними неоднорідностями середовища.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алексеев А.С. Об одном эффекте экранирования / А.С. Алексеев, В.М. Бабич // Ученые Записки ЛГУ. – 1954 – Т. 177, Вып. 28. – С. 180-193.

2. Алимов О. Д. Удар. Распространение волн деформаций в ударных системах / О. Д. Алимов, В. К. Манжосов, В. Э. Еремьянц. – М.: Наука, 1985. – 359 с.

3. Андреев В. Г. Стоячие волны в упругом слое, нагруженном конечной массой / В. Г. Андреев, Т. Б. Крит, О. А. Сапожников // Акустический журнал. – 2010. – Т. 56, № 2. – С. 190-196.

4. Андронов И. В. Дифракция плоской волны, падающей под малым углом к оси сильно вытянутого сфероида / И. В. Андронов // Акустический журнал. – 2012. – Т. 58, № 5. – С. 571-579.

5. Андронов И. В. О волнах, распространяющихся вдоль периодического набора точечных неоднородностей в тонкой упругой пластине / И. В. Андронов // Акустический журнал. – 2010. – Т. 56, № 3. – С. 291-299.

6. Андронов И. В. Расчет дифракции на сильно вытянутых телах вращения / И. В. Андронов // Акустически журнал. – 2012. – Т. 58, № 1. – С. 28-35.

7. Арнольд В. И. Особенности дифференцируемых отображений / В.И. Арнольд, А.Н. Варченко, С. М. Гуссейн-Заде. − М.: Наука, 1982. − 302 с.

8. Арнольд В. И. Особенности каустик и волновых фронтов / В. И. Арнольд. – М.: Фазис, 1996. - 334 с.

9. Арнольд В.И. Особенности систем лучей / В.И. Арнольд // УМН. – 1983. – Т. 38, № 2. – С. 77-147.

10. Арнольд В.И. Теория катастроф / В.И. Арнольд. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 128 с.

11. Ахенбах Дж. Д. Задачи о распространении упругих волн при неразрушающих испытаниях / Дж. Д. Ахенбах // Механика деформ. тверд. тел: направление развития: сб. науч. статей. − М.: Мир, 1983. − С. 324-345.

12. Бабич В. М. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн / В. М. Бабич, В. С. Булдырев. − М.: Наука, 1972. − 456 с.

13. Бленд Д. Р. Нелинейная динамическая теория упругости / Д. Р. Бленд. − М.: Мир, 1972. − 184 С.

14. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах / Л. М.Бреховских. − М.: Наука, 1982. − 334 с.

15. Брус Дж. Кривые и особенности. Геометрическое введение в теорию особенностей [пер. с анг.]/ Дж. Брус, П. Джиблин. – М.: Мир, 1986. – 243 с.

16. Будаев В. С. К задаче о точечном источнике в анизотропной упругой среде / В. С. Будаев, И. Г. Филиппов // Прикл. мат. и программирование. − Кишенев: Штиница, 1975. − Вып. 13. С. 26-31.

17. Буренин А. А. Выделение поверхностей разрывов лучевым методом в задачах динамики упругих сред / А. А. Буренин, П. В. Зиновьев, В. Е. Рагозина // Сб. докладов междурнар. науч. конф. Фундаментальные и прикладные вопросы механики. – Хабаровск: Изд-во ХГТУ, 2003. – Т. 1. – С. 62-64.

18. Буренин А. А. Лучевой метод решения одномерных задач нелинейной динамической теории упругости с плоскими поверхностями сильных разрывов / А. А. Буренин, Ю. А. Россихин // Прикладные задачи механики деформируемых сред. – Владивосток: ДВО АН СССР, 1991. – С. 129-137.

19. Буренин А. А. Ударные волны в изотропном упругом пространстве / А. А. Буренин, А. Д. Чернышов // Прикл. мат. и мех. − 1978. Т. 42, № 4. − С. 711-712.

20. Быков В.Г. Сейсмические волны в пористых насыщенных породах / В.Г. Биков. – Владивосток: Дальнаука, 1999. − 108 с.

21. Вайнберг М. М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. − М.: Наука, 1969. − 527 с.

22. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела / А.О. Ватульян. – М.: Физматлит, 2007. – 224 с.

23. Ващіліна О. В. Екранування розривних хвиль шаром зниженої щільності / О. В. Ващіліна, Ю. О. Заєць // Вісник НТУ. – 2012. – Вип. 26. – С. 402-410.

24. Ващіліна О. В. Екранування розривних хвиль шаруватим пружним анізотропним середовищем / О. В. Ващіліна, Ю. О. Заєць // Вісник НТУ. - 2013. − № 28. – С. 80-87.

25. Ващіліна О. В. Перебудова фронтів розривних хвиль в трансверсально-ізотропних пружних середовищах зі змінними властивостями / О. В. Ващіліна, Ю. О. Заєць // Вісник НТУ. – 2011. – Вип. 24. – С. 264-269.

26. Вдовина К. Н. Об ортогональности собственных волн полуоткрытого упругого волновода / К. Н. Вдовина, Н. Б. Плещинский, Д. Н. Тумаков // Изв. вузов. Матем. – 2009. − № 9. – С. 69-75.

27. Взаимодействие фронтов ударных волн с плоскостью раздела трансверсально-изотропных упругих сред / [В. И. Гуляев, П. З. Луговой, Г. М. Иванченко, Е. В. Яковенко] // Прикладная механика. − 1999. − Т. 35, № 4. – С. 30-36.

28. Вильде М. В. Асимптотическая модель дальнего поля волны Релея в многослойной пластине / М. В. Вильде, Л. Ю. Коссович // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – Т. 11, № 4. – С. 74-86.

29. Вишневский Д. М. Комбинирование конечно-разностных схем для моделирования волновых процессов в упругих средах, содержащих

анизотропные слои / Д. М. Вишневский, В. В. Лисица, В. А. Чеверда // Сиб. журн. вычисл. матем. – 2012. – Т. 15, № 2. – С. 175–181.

30. Вишневский Д. М. Численное моделирование процессов формирования и распространения сейсмических волн в реалистических сложноустроенных анизотропных упругих средах [Электронный ресурс] / Д. М. Вишневский, М. Н. Дмитриев, В. В. Лисица, Г. В. Решетова. – Режим доступа: https://ru.intel.com/business/community/uploads/hpc2010/109123.pdf

31. Вишневский Д. М. Численное моделирование распространения сейсмических волн в средах с вязкоупругими включениями / Д.М. Вишневский, В.В. Лисица, Г.В. Решетова // Вычислительные методы и программирование. − 2013. − Т. 14. – С. 155-165.

32. Герасименко Е. А. Об использовании прифронтовых лучевых разложений в динамике деформирования / Е. А. Герасименко, А. В. Завертан, В. Е. Рагозина // ПММ. – 2009. – Т. 3, Вып. 2. – С. 282-288.

33. Герасименко Е. А. Лучевые разложения в изучении закономерностей распространения неплоских ударных волн / Е. А. Герасименко, В. Е. Рагозина // Вестник СамГУ. Естественнонауч. Серия. – 2006. − № 6/1 (46). – С. 94-113.

34. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Ч. 1 / Р. Гилмор; [пер. с англ. под ред. Ю. П. Гупало, А. А. Пионтковского]. − М: Мир, 1984. - 350 с.

35. Глушков Е. В. Блокирование упругих волн наклонными полосовыми трещинами / Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова, М. В. Голуб // Труды X Международной конференции "Современные проблемы механики сплошной среды", г. Ростов-на-Дону, 5-9 декабря 2006 г. − Т. 1. − С. 71-75.

36. Глушков Е. В. Дифракция упругих волн на пространственных трещинах произвольной в плане формы / Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова // ПММ. − 1996. − Т. 60, Вып. 2. − С. 282-289.

37. Гринченко В. Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко. − К.: Наукова думка, 1981. − 283 с.

38. Гузь А. Н. Дифракция упругих волн в многосвязных телах / А. Н. Гузь, В. Т. Головчан. − К.: Наукова думка, 1972. − 254 с.

39. Гузь А. Н. Дифракция упругих волн / А. Н. Гузь, В. Д. Кубенко, М. А. Черевко. – К.: Наукова думка, 1978 – 307 с.

40. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями / А. Н. Гузь. – Киев: «А.С.К.», 2004. – 672 с.

41. Гуляев В. И. Отражение и преломление плоских разрывных волн параболоидными поверхностями раздела анизотропных упругих сред / В. И. Гуляев, П. З. Луговой, Г. М. Иванченко // Геофизический журнал − 2005. − Т. 27, № 3. − С. 418-427.

42. Гуляев В. И. Дифракция разрывных волн на эллипсоидальных поверхностях раздела трансверсально-изотропных упругих сред / В. И. Гуляев, П. З. Луговой, Г. М. Иванченко // Прикладная механика. − 2004. − Т. 40, № 10. − С. 98-106.

43. Гуляєв В. І. Екранування розривних хвиль клиноподібним пружним включенням / В. І. Гуляєв, П. З. Луговий, Ю. О. Заєць // Доповіді національної академії наук України. – 2011. - № 6. − С. 66-71.

44. Гуляев В. И. Перестройка фронтов квазипродольных и квазипоперечных разрывных волн в неоднородных трансверсально изотропных упругих середах / В. И. Гуляев, П. З. Луговой, Ю. А. Заец, М. Набиль // Прикладная механика. – 2011. – Т.47, № 1. – С. 73-80.

45. Гуляєв В. І. Розповсюдження фронтів розривних хвиль в неоднорідних трансверсально-ізотропних пружних середовищах / В. І. Гуляєв, Ю. О. Заєць // Акустичний вісник. – 2009. – Т. 12, № 3. – С. 20-26.

46. Гуляев В.И. Цилиндрические спиральные волны во вращающихся закрученных упругих стержнях / В.И. Гуляев, Е.В. Ващилина, Е.И. Борщ // Прикладная механика. – 2008. − Т. 44, №3. − С. 125 – 134.

47. Гуляєв В. І. Фокусування та екранування хвиль деформацій, ініційованих в ґрунтах наземним транспортом / В. І. Гуляєв, О. В. Ващиліна, Ю. О. Заєць // 14 Міжнародна науково-практична конференція «Ринок послуг комплексних транспортних систем та прикладні проблеми логістики». – К.: - 2012. – С. 200-204.

48. Гуляев В. И. Экранирование упругих разрывных волн плоскостями раздела сред / В. И. Гуляев, П. З. Луговой, Ю. А. Заец // Прикладная механика. – 2012. – Т.48, № 4. – С. 67-77.

49. Гуревич Г. И. Деформируемость сред и распространение сейсмических волн / Г .И. Гуревич. - М.: Наука, 1974. - 474 с.

50. Гусев Е. Л. Конструктивные методы синтеза слоисто-неоднородных структур при воздействии упругих волн / Е. Л. Гусев // Акустический журнал. – 2008. – Т. 54, № 5. – С. 807-815.

51. Жарий О. Ю. Введение в динамику нестационарных колебаний и волн / О. Ю. Жарий, А. Ф. Улитко. − К.: Выща школа, 1989. − 184 с.

52. Жэн Б.-К. Нормальные волны в упругом слоистом полупространстве / Б.-К. Жэн, Л.-Ю. Лу // Акустический журнал. – 2003. – Т. 49, № 4 – С. 501-513.

53. Заворохин Г. Л. О распространении волн Рэлея вдоль границы неоднородной анизотропной пористой среды Био / Г. Л. Заворохин // Зап. научн. сем. ПОМИ. − 2010. – Т. 379. – С. 24–46.

54. Заєць Ю. О. Динаміка взаємодії розривної хвилі з клиноподібним пружним шаром при умовах можливого проковзування між граничними площинами / Ю. О. Заєць // Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів». 19-22 лютого 2015. – Рівне: РВВ РДГУ, 2015. – С. 77.

55. Заєць Ю. О. Дифракція розривних хвиль в неоднорідному пружному середовищі. / Ю. О. Заєць // 72-га наукова практична конференція.

Київський національний університет будівництва і архітектури. 22-25 березня 2011. – К.: − 2011. – С. 78.

56. Заєць Ю. О. Екранування розривних хвиль неоднорідностями в пружних середовищах / Ю. О. Заєць // LXVII науково-практична конференція НТУ. – Київ, травень, 11 – 13, 2011.

57. Заєць Ю. О. Екранування розривних хвиль шаром пружного середовища / Ю. О. Заєць // Вісник НТУ. – 2010. – Вип. 21. – С. 366-371.

58. Заєць Ю. О. Екранування ударних хвиль в шарувато-неоднорідних пружних середовищах / Ю.О. Заєць // XII Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові. – Львів: − 2015. − С. 57.

59. Заєць Ю. О. Розподіл інтенсивностей розривних хвиль при проходженні шару пружного середовища зі змінними фізичними властивостями / Ю. О. Заєць // Національний транспортний університет. LXX Наукова конференція професорсько-викладацького складу, аспірантів та працівників відокремлених структурних підрозділів університету. – К.: - 2014. – С. 420.

60. Заєць Ю. О. Теоретичне моделювання розповсюдження розривних хвиль в неоднорідних анізотропних пружних середовищах / Ю. О. Заєць // Вісник НТУ. – 2009. − № 19. – С. 216-220.

61. Іванченко Г. М. Біфуркація фронтів розривних хвиль в трансверсально–ізотропних пружних середовищах / Г. М. Іванченко, Ю. О. Заєць // International Conference. Dynamical system modelling and stability investigation. – К.: 2009. – С. 212.

62. Іванченко Г. М. Перебудова фронтів розривних хвиль в неоднорідних трансверсально-ізотропних пружних середовищах / Г. М. Іванченко, О. В. Ващіліна, Ю. О. Заєць // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2007. – Вип. 81. – С. 135-141.

63. Іванченко Г. М. Перетворення фронтів розривних хвиль в трансверсально – ізотропних середовищах зі змінними параметрами

пружності / Г. М. Іванченко, Ю. О. Заєць // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2009. – Вип. 83. – С.119-125.

64. Іванченко Г. М. Розповсюдження розривних хвиль в неоднорідних трансверсально-ізотропних пружних середовищах / Г. М. Іванченко, О. В. Ващіліна, Ю. О. Заєць // Вісник НТУ. – 2007. − № 15. – С. 372-375.

65. Исраилов М. Ш. Дифракция акустических и упругих волн на полуплоскости при разнотипных граничных условиях / М. Ш. Исраилов // Изв. РАН. МТТ. – 2013. − № 3. – С. 121-134.

66. Каримов А. М. Распространение нестационарных волн в упругом слоистом полупространстве периодической структуры / А. М. Каримов // Анал., числ. и эксперим. методы в мех.: зб. науч. статей. − М.: МГУ, 1995. - С. 81-84.

67. Кирпичникова Н. Я. Волны от точечного источника вблизи границы раздела упругой среды и жидкости / Н. Я. Кирпичникова // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2010. – Т. 379. – С. 47–66.

68. Кирпичникова Н. Я. Лучевой метод в задаче дифракции плоской волны на «тонком» конусе с малым углом при вершине / Н. Я. Кирпичникова, М. М. Попов // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2012. – Т. 409. – С. 49-54.

69. Ковтун А. А. Лучевой метод вычисления сейсмических объемных волн в кусочно-однородной изотропной упругой среде с пористыми флюидонасыщенными слоями / А. А. Ковтун, В. И. Кучер // Ученные записки СПбГУ. – 1998. − № 433. – С. 43-58.

70. Короновский Н. В. Землетрясения: причины, последствия, прогноз / Н. В. Короновский, В. А. Абрамов // Соросовский образовательный журнал. – 1998. − № 12. – С. 71-78.

71. Космодамианский А. С. Действие нестационарных волн на полостях в ортотропном массиве в трехмерной постановке / А. С.

Космодамианский, О. В. Глушков // Доп. НАН Украины. − 1997. − № 2. − С. 67-69.

72. Космодамианский А. С. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред / А. С. Космодамианский, В. И. Сторожев. – К.: Наукова думка, 1985. − 175 с.

73. Костров Б. В. Механика очага тектонического землетрясения / Б. В. Костров. – М.: Наука, 1975. – 176 с.

74. Кравцов Ю. А. Геометрическая оптика неоднородных сред / Ю. А. Кравцов, Ю. И. Орлов. − М.: Наука, 1980. − 304 с.

75. Кравцов Ю. А. Об одной модификации метода геометрической оптики / Ю. А. Кравцов // Изв. вузов. Радиофизика. − 1964. − Т. 10, № 4. − С. 664-673.

76. Кранцфельд Я. Л. О перспективах сейсмозащитного экранирования грунтовых оснований зданий и сооружений / Я. Л. Кранцфельд // Основания, фундаменты и механика грунтов. − 2012. − № 1. − С. 23-27.

77. Крауклис П. В. Медленная волна в слое с конечной пористостью / П. В. Крауклис, Г. М. Голошубин, Л. А. Крауклис // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 1994. – Т. 210. – С. 146-153.

78. Кубенко В. Д. Распространение упругих волн от сферической полости в неоднородной анизотропной среде / В. Д. Кубенко // Тр. 1 респ. конф. молодых математиков Украины. − К., 1965. - С. 378-389.

79. Кубенко В. Д. Ударное взаимодействие тел со средой (Обзор) / В. Д. Кубенко // Прикладная механика. − 1997. − Т. 33, № 12. − С. 3-29.

80. Кузнецов В. В. Ударно-волновая модель землетрясения. Формирование ударной волны. Физика очага и афтершоки / В. В. Кузнецов // Квантовая Магия. – 2011. − Т. 8, вып. 2. – С. 2125-2151.

81. Кузнецов С. В. Горизонтальные сейсмические барьеры для защиты от сейсмических волн / С. В. Кузнецов, А. Э. Нафасов // Вестник МГСУ. - 2010. − Вып. 4. − С. 131-134.

82. Кузнецов С.В. Сейсмические волны и сейсмические барьеры / С. В. Кузнецов // Акустическая физика. − 2011. – Т. 57, вып. 3. − С. 420-426.

83. Кузнецова Е. Л. Распространение нестационарных волн в упругом слое / Е. Л. Кузнецова, Д. В. Тарлаковский, Г. В. Федотенков // Изв. РАН. МТТ. – 2011. − № 5. – С. 144-152.

84. Куликовский А. Г. Нелинейные волны в упругих средах / А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова. – М.: Моск. лицей, 1998. – 412 с.

85. Курьянов Ю.А. Сейсмоакустика пористых и трещиноватых геологических сред. Том 1: Теоретические модели в сейсмоакустике поротрещиноватых упругих сред / Ю.А. Курьянов, Ю.А. Кухаренко, В.Е. Рок. – 2002. – 202 с.

86. Кюркчан А. Г. О решении задач дифракции волн методом нулевого поля / А. Г. Кюрчкан , Н. И. Смирнова // Акустический журнал. – 2009. – Т. 55, № 6. – С. 691-697.

87. Кюркчан А. Г. Решение задач дифракции волн методом продолженных граничных условий / А. Г. Кюркчан, Н. И. Смирнова // Акустический журнал. – 2007. – Т. 53, № 4. – С. 490-499.

88. Левківська Л. В. Екранування розривних хвиль шаром з відмінними фізичними властивостями / Л. В. Левківська, Ю. О. Заєць // XVI International Conference. Dynamical system modelling and stability investigation. – К.: − 2013. – С. 293.

89. Лебедєва І. В. Перетворення фронтів розривних хвиль у неоднорідних трансверсально-ізотропних середовищах / І. В. Лебедєва, О. В. Ващіліна, Ю. О. Заєць // Вісник Київського університету. – 2008. – Вип. №2. – С. 54-57.

90. Лимарченко О. С. Нелинейное волнообразование жидкости при ее совместном движении в параболическом резервуаре / О. С. Лимарченко, И. Ю. Семенова // Прикладная механика. − 2010. − Т. 46, № 8, − С. 12-18.

91. Литовченко И. Н. Гипотезы возникновения и модели очагов землетрясений [Электронный ресурс] // И. Н. Литовченко, В. С. Чалова. – Режим доступа : http://www.sciteclibrary.ru/texsts/rus/stat/st3835.pdf

92. Ломухин Ю. Л. Отражение и прохождение плоских волн на границе анизотропных случайных дискретных сред / Ю. Л. Ломухин, Е. Б. Атутов // Журнал технической физики. – 2009. – Т. 79, вып. 6. – С. 135-140.

93. Максимов Г. А. Распределение энергии между различными типами сейсмических волн, излучаемых источником с произвольной диаграммой направленности в упругом полупространстве / Г. А. Максимов, М. Е. Меркулов, В. Ю. Кудрявцев // Акустический журнал. – 2003. – Т. 49, № 3 – С. 389-399.

94. Малежик М. П. Фотоупругое моделирование волнового поля напряжений возле туннеля в анизотропном массиве при взрывном нагружении / М. П. Малежик, И. С. Чернышенко, Г. П. Шеремет // Прикладная механіка. − 2006. − Т. 42, № 8. − С. 122-125.

95. Марков М. Г. Распространение низкочастотных поверхностных волн вдоль плоских границ в насыщенных пористых средах / М. Г. Марков, И. А. Марков, С. Н. Садовничий // Акустический журнал. – 2010. – Т. 56, № 3. – С. 333-340.

96. Механика горных выработок при действии гравитационных и динамических нагрузок: монография / [В. И. Гуляев, П. З. Кошель, Ю. А. Заец и др.]. – Ивано-Франковск : Изд-во Прикарпат. нац. ун-та им. В. Стефаника, 2014. – 438 с.

97. Михайленко Б. Г. Численно-аналитическое моделирование волновых полей для сред сложного строения и структуры / Б. Г. Михайленко, А. Г. Фатьянов // Сиб. журн. вычисл. матем. – 2014. – Т. 17, № 2. – С. 163-176.

98. Мойсеенок А. П. Взаимодействие плоских нестационарных волн с тонким упругим включением при условиях гладкого контакта / А. П. Мойсеенок, В. Г. Попов // Изв. РАН. МТТ. – 2009. − № 4. – С. 152-164.

99. Мойсеенок А. П. Взаимодействие плоских упругих нестационарных волн с упругим включением при полном сцеплении / А. П. Мойсеенок, В. Г. Попов // Изв. РАН. МТТ. – 2010. − № 1. – С. 93-106.

100. Молотков Л. А. Исследование нормальных волн в пористом слое, окруженном упругой средой / Л. А. Молотков, А. А. Мухин // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2009. – Т. 369. – С. 127–142.

101. Молотков Л. А. Нестационарное распространение волн в неоднородной среде при образовании области геометрической тени / И. А. Молотков // Докл. АН СССР. − 1961. − Т. 140, № 3 − С. 557-559.

102. Молотков Л. А. О волне Релея на криволинейной границе упругой среды и жидкости / Л. А. Молотков // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2010. – Т. 380. – С. 90–109.

103. Молотков Л. А. О распространении упругих волн в средах, содержащих тонкие плоско-параллельные слои / Л. А. Молотков // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. – 1961. − вып. 5. − С. 3-24.

104. Молотков Л. А. Эффективная модель слоистой среды, в которой чередуются пористые и упругие слои, находящиеся в контакте с проскальзыванием / Л. А. Молотков // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2001. – Т. 275. – С. 165–186.

105. Мусаев В.К. О достоверности результатов численного метода решения сложных задач волновой теории упругости при ударных, взрывных и сейсмических воздействиях / В. К. Мусаев // Ученые записки Российского государственного социального университета. − 2009. − № 5. − С. 21-33.

106. Мусаев В.К. Решение задачи дифракции и распространения упругих волн методом конечных элементов / В. К. Мусаев // Строительная механика и расчет сооружений. − 1990. − № 4. − С. 74-78.

107. Назаров С. А. Упругие волны, захваченные однородным анизотропным полуцилиндром / С. А. Назаров // Математический сборник. – 2013. – Т. 204, № 11. – С. 99–130.

108. Напряженное состояние около горных выработок, содержащего пласт полезного ископаемого / [M. Chudek, П. З. Луговой, Ю. А. Заец и др.] // Miedzynarodowa Konferencja “IX Szkola Geomechaniki 2009” Materialy Naukowe. – Gliwice–Ustron, 2009. – С. 213–225.

109. Орехов В.В., Негахдар Х. Некоторые аспекты изучения применения траншейных барьеров для уменьшения энергии поверхностных волн в грунте / В.В. Орехов, Х. Негахдар // Вестник МГСУ. − 2013. − № 3. − С. 98-104.

110. Орлов Ю. И. Асимптотический метод определения полей дифракции волн на выпуклых телах вращения / Ю. И. Орлов, Н. С. Орлова // Изв. вузов. Радиофизика. − 1978. − Т. 21, № 7. − С. 1011-1018.

111. Осипов И. О. К распространению плоских волн в анизотропной среде, контактирующей с жидкостью / И. О. Осипов // Изв. РАН. Механика тверд, тела. − 1997. − № 3. − С. 85-89.

112. Осипов И. О. Отражение и преломление плоских волн на границе раздела двух анизотропных сред / И. О. Осипов // Изв. РАН. МТТ. – 2008. − № 1. – С. 40-72.

113. Панасюк О. М. Поширення плоских пружних хвиль в шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів : автореф. дис. на здоб. наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук : [спец.] 01.02.04 "Механіка деформівного твердого тіла" / О. М. Панасюк; НАН України, Ін-т механіки імені С. П. Тимошенка. − К., 2012. − 20 с.

114. Панасюк О. М. Про поширення хвиль в шаруватих композитних стислих матеріалах з початковим напруженнями при проковзуванні шарів / О. М. Панасюк // Доповіді НАН України. – 2010. − № 1. – С. 65-70.

115. Пановко Я. Г. Введение в теорию механического удара / Я. Г. Пановко. – М.: Наука, 1977. – 224 с.

116. Паньков А. А. Упругие волны в композитах со случайными структурами / А. А. Паньков // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ-мат. науки. – 2001. – Т. 12. – С. 85-90.

117. Петрашень Г. И. Волны в слоисто-однородных изотропных упругих средах: Оптимальное представление полей волн в моделях основного эталонного типа / Г. И. Петрашень, Л. А. Молотков, П. В. Крауклис. − Л.: Наука. Ленингр. отд-ние, 1985. − 302 с.

118. Петрашень Г. И. Продолжение волновых полей в задачах сейсморазведки / Г. И. Петрашень, С. А. Нахамкин. − Л.: Наука, Ленингр. отд-ние, 1973. − 170 с.

119. Петрашень Г. И. Распространение волн в анизотропных упругих средах / Г. И. Петрашень. − Л.: Наука, Ленингр. отд-ние, 1990. − 280 с.

120. Петухов И. М. Прогноз и предотвращение горных ударов на рудниках / И. М. Петухов, А. М. Ильин, К. Н. Трубецкой. – М.: Изд-во Академии горных наук, 1997. – 377 с.

121. Плещинский Н.Б. Сумматорные и интегральные уравнения периодических задач дифракции упругих волн на дефектах в слоистых средах / Н. Б. Плещинский, Е.А. Осипов // Изв. вузов. Матем. – 2008. − № 9. – С. 76-82.

122. Подильчук Ю. Н. Геометрическая теория дифракции в задачах рассеяния гармонических упругих волн на гладких выпуклых полостях / Ю. Н. Подильчук, Ю. К. Рубцов, П. Н. Сорока // Прикладная механика. − 1991. − Т. 27, № 2. − С. 26-35.

123. Подильчук Ю. Н. Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн / Ю. Н. Подильчук, Ю. К. Рубцов. − К.: Наукова думка, 1988. − 220 с.

124. Подильчук Ю. Н. Отражение плоской ступенчатой волны сжатия от выпуклой осесимметричной полости / Ю. Н. Подильчук, Ю. К. Рубцов // Прикладная механика. − 1985. − Т. 21, № 4. − С. 97-105.

125. Поленов В.С. Распространение волн в насыщенной жидкостью неоднородной пористой среде / В. С. Поленов, А. В. Чигарев // Прикладная математика и механика. – 2010. – Т. 74, вып. 2. – С. 276-284.

126. Поручиков В. Б. Методы динамической теории упругости / В. Б. Поручиков. – М.: Наука, 1986. – 328 с.

127. Продайвода Г. Т. Сейсморозвідка / Г. Т. Продайвода, О. А. Трипільський, С.С. Чулков. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2008. − 351с.

128. Пространственные задачи теории упругости: в 6 т. / [В. Т. Головчан, В. Д. Кубенко, Н. А. Шульга и др.]. - К.: Наукова думка, 1986. - Т. 5: Динамика упругих тел. − 288 с.

129. Роменский Е. И. О моделировании эффекта трансформации частот упругих волн / Е. И. Роменский, А. Д. Садыков // Сиб. журн. индустр. матем. – 2010. – Т. 13, № 3. – С. 117-125.

130. Россихин Ю. А. Волны в слабоанизотропных средах / Ю. А. Россихин // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. − 1982. − № 3 − С. 160-162.

131. Россихин Ю. А. О равномерной пригодности лучевых разложений в задачах, связанных с распространением ударных волн в слабо анизотропной упругой среде / Ю. А. Россихин // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. − 1989. − № 6. − С. 131-138.

132. Рубцов Ю. К. Отражение плоской ступенчатой волны сжатия от выпуклой цилиндрической полости / Ю. К. Рубцов // Прикладная механика. − 1996. − Т. 22, № 4 − С. 26-33.

133. Сабодаш П. Ф. Применение метода пространственных характеристик к решению осесимметричных задач по распространению упругих волн / П. Ф. Сабодаш, Р. А. Чередниченко // Прикл. мех. и техн. физ. − 1971. − № 4. − С. 101-109.

134. Свекло В. А. Источники колебаний в анизотропной полуплоскости / В. А. Свекло // Докл. АН СССР. − 1948. − Т. 59, № 6. − С. 1077-1080.

135. Свекло В. А. Плоские волны и волны Релея в анизотропной среде / В. А. Свекло // Докл. АН СССР. − 1948. − Т. 59, № 5. − С. 871-874.

136. Селезов И. Т. Математические методы в задачах распространения и дифракции волн: [монография] / И. Т. Селезов, Ю. Г. Кривонос ; Нац. акад. наук Украины, Ин-т кибернетики имени В. М. Глушкова, Ин-т гидромеханики. − К. : Наукова думка, 2012. − 232 с.

137. Селезов И. Т. Рассеяние волн локальными неоднородностями в сплошных средах / И. Т. Селезов, Ю. Г. Кривонос, В. В. Яковлев. – К.: Наукова думка, 1986. − 136 с.

138. Селиванов В. В. Ударные и детонационные волны. Методы исследования / В. В. Селиванов, Н. Н. Соловьев. – М.: МГУ, 1990. − 260 с.

139. Смирнова Н. С. Об одном алгоритме определения полей волн в многослойных упругих средах / Н. С. Смирнова // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 1990. – Т. 186. − С. 154–171.

140. Соболев Г. А. Основы прогноза землетрясений / Г. А. Соболев. – М.: Наука, 1993. – 313 с.

141. Терещенко М. А. Общие и прикладные вопросы лучевого подхода к физике неоднородных волн / М. А. Терещенко // Прикладная физика. − 2010. − № 4. – С. 5-13.

142. Улитко А. Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости / А. Ф. Улитко. − К.: Наукова думка, 1979. − 161 с.

143. Фелсен Л. Излучение и рассеяние волн / Л. Фелсен, Н. Маркувиц; [пер. с англ. под ред. М. Л. Левина]. − М.: Мир, 1978. − Т. 1. − 547 с.

144. Фелсен Л. Излучение и рассеяние волн / Л. Фелсен, Н. Маркувиц; [пер. с англ. под ред. М. Л. Левина]. − М.: Мир, 1978. − Т. 2. − 555 с.

145. Фридлендер Ф. Звуковые импульсы / Ф. Фридлендер; [пер. с англ. А. И. Смирнова]. − М.: Издательство иностр. лит., 1962. − 232 с.

146. Шубин С. Н. Влияние динамики включения на распространение упругих волн в акустическом волноводе / С. Н. Шубин, Е. Е. Гилев, А. И. Боровков // Вычислительная механика сплошных сред. – 2011. – Т. 4, № 3. – С. 120-128.

147. Шульга Н. А. Основы механики слоистых сред периодической структуры / Н. А. Шульга. – К.: Наукова думка, 1981. − 220 с.

148. Юсупов А. К. Вопросы сейсмологии и сейсмозащиты: в 2 кн. Кн. 1 / А. К. Юсупов; [Дагестанский гос. техн. ун-т]. − Махачкала: Лотос, 2006. − 311 с.

149. Achenbach J. D. Geometrical theory of diffraction for three-D elastodynamics / J. D. Achenbach, A. K. Caustesen // J. Acoust. Soc. Amer. − 1977. − V. 61, № 2. − P. 413-421.

150. A receding contact problem for an anisotropic elastic medium consisting of a layer and a half time / [V. Kahya, T. S. Ozsahin, A. Birinci, R. Erdol] // International Journal of Solids and Structures. – 2007. – V. 4. – P. 5695-5710.

151. Arif S. J. Accurate measurement of velocity and acceleration of seismic vibrations near Nuclear power plants / S. J. Arif, Imdadullah, M. S. J Asghar // Physics Procedia. – 2012. – V. 37. – P. 43-50.

152. Barkan D.D. Dynamics of bases and foundations / D. D. Barkan. − New York: McGraw Hill Book, 1962. − 476 p.

153. Bidgoli M. N. Anisotropy of strength and deformability of fractured rocks / M. N. Bidgoli, L. Jing // Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering. – 2014. – V. 6. – P. 156-164.

154. Borcherdt Roger D. Reflection – refraction of general P- and type –I S-waves in elastic and inelastic solids / R. D. Borcherdt // Geophys. J. Royal Astronomical Soc. – 1982. – 70. – P. 621-638.

155. Borejko P. Seismic waves in layered soil: the generalized ray theory / P. Borejko, F. Ziegler // Structural Dynamics. – 1991. – P. 52-90.

156. Brokesova J. Asymtotic ray method in seismology / J. Brokesova. – Prague: Matfyzpress, 2006. – 160 p.

157. Brule S. Experiments on seismic materials: molding surface waves / S. Brule // Physycal review letters. – 2014. – V. 112. – P. 1-5.

158. Cai Y. Screening of plane S waves by a row of elastic piles in satyrated soil / Y. Cai, G. Ding, C. Xu // Chinese Journal of Geotechnical Engineering. – 2008. – V. 30, № 7. – P. 964-969.

159. Chapman C. Fundamentals of seismic wave propagation / C. Chapman. − Cambridge University Press, 2004. – 172 p.

160. Chui G. Shaking up earthquake theory / G. Chui // Nature. – 2009. – V. 461. – P. 870-872.

161. Cohen J. K. A ray method for the asymptotic solution of the diffusion equation / J. K. Cohen, R. M. Lewis // Journal of Applied mathematics. – 1967. – V. 3, Iss. 3. – P. 266-290.

162. Crichlow Joel M. The effect of underground structure on seismic motions of the ground surface / Joel M. Crichlow // Geophys. J. Royal Astronomical Soc. – 1982. – V. 70. – P. 563-575.

163. Gulyayev V. I. Discontinuous wave interaction with interfaces between anisotropic elastic media / V. I. Gulyayev, G. M. Ivanchenko // Int. J. Solids and Struct. − 2006. − №43. − P. 74-90.

164. Dislocation damping and anisotropic seismic wave attenuation in earth's upper mantle / [R. J. M. Farla et al.] // Science. – 2012. – V. 336. – P. 332-335.

165. Dolan J. F. How well do surface slip measurements track slip at depth in large strike-slip earthquakes? The importance of fault structural maturity in controlling on-fault slip versus off fault surface deformation / J. F. Dolan, B. D. Haravitch // Earth and Planetary Science Letters. – 2014. – V. 388. – P. 38-47.

166. Dowaikh M. A. Interfacial waves and deformations in pre-stressed elastic media / M. A. Dowaikh, R. W. Ogden // Proc. Roy. Soc. London. − 1999. − V. 433. − P. 313-328.

167. Duff G. F. The Cauhy problem for elastic waves in an anisotropic medium / G. F. Duff // Phil. Trans. Roy. Soc. − 1960. − V. 252, № 1010 − P. 249-273.

168. Earthquake nucleation and triggering on an optimally oriented fault / [C. Tape, M. West, V. Silwal, N. Ruppert] // Earth and Planetary Science Letters. – 2013. – V. 363. – P. 231-241.

169. Ersoy Okan K. Diffraction, fourier optics and imaging / Okan K. Ersoy. − Wiley-Blackwell, 2007. – 413 p.

170. Experimental study of the complex reflection coefficient of shear waves from thr solid-liquid interface / [E. E. Franco, J. C. Adamowski, R. T. Higuti, F. Buiochi] // Physics Procedia. – 2010. –V. 3. – P. 803-809.

171. Grinfel'd M. A. Ray method of calculating the wave front intensity in nonlinearly elastic material / M. A. Grinfel'd // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 1978. – V. 5, № 5. – P. 958-977.

172. Guo S. Propagation of elastic waves through a lattice of cylindrical cavities / S. Guo, P. Mclver // Proc. R. Soc. A. – 2011. – V. 467. – P. 2962-2982.

173. Its E. N. Surface wave propagation across a narrow vertical layer between horizontally homogeneous quarter-spaces // E. N. Its // Wave Motion. – 1991. – V. 14, № 1. – P. 11-23.

174. Keller J. B. Asymptotic solution of some diffraction problems / J. B. Keller, R. M. Lewis, B. D. Shekler // Comm. Pule and Appl. Math. − 1956. − V. 9, № 2. − P. 207-265.

175. Keller J. B. Geometrical theory of diffraction / J. B. Keller // J. Opt. Soc. Amer. − 1962. − V. 52, № 2. − P. 116-128.

176. Kostrov B. V. Principles of earthquake source mechanics / B. V. Kostrov, S. Das. − Cambridge University Press, 1988. – 286 p.

177. Kougaumjion R. G. Uniform GTD approach to EM scattering and radiation / R. G. Kougaumjion, P. H. Pathak // Low and high frequency asimptotics (Acoustic, electromagnetic, and elastic wave scattering: V. 2) - Amsterdam: Elsevier Science publishers B.V. − 1986. − P. 265-334.

178. Long M. D. The subduction zone flow field from seismic anisotropy: a global view / M. D. Long, P. G. Silver // Science. – 2008. − V. 319. − P. 315-318.

179. Mantle shear-wave velocity structure beneath the hawaiian hot spot / [C. J. Wolfe et al.] // Science. – 2009. − V. 326. – P. 1388-1390.

180. May T. W. The effectiveness of trenches in reducing seismic motion / T. W. May, B. A. Bolt // Earthquake engineering & Structural dynamics. – 1982. – V. 10, № 2. – P. 195-210.

181. Mekheimer Kh. S. Peristatcally induced MHD slip flof in a porous medium due to a surface acoustic wavy wall / Kh. S. Mekheimer, A. M. Salem, A. Z. Zaher // Journal of the Egyptian Mathematical Society. – 2014. - V 22, P. 143-151.

182. Morsy M. A. Attenuation of seismic waves in Central Egyrt / M. A. Morsy, A. M. Abed // NRIAG Journal of Astronomy and Geophysics. – 2013. – V. 2. – P. 8-17.

183. Musayev V.K. Problem of the building and the base interaction under seismic loads / V. K. Musayev // Proceedings of the 12th World Conference on Earthquake Engineering. 2741. Auckland: University of Canterbury, 2000. − P. 1-6.

184. Musayev V.K. Structure design with seismic resistance foundations / V. K. Musayev // Proceedings of the ninth European conference on earthquake engineering. Moscow : TsNIISK, 1990. − V. 4. - P. 191-200.

185. Norris A.N. Elastic waves in inhomogeneously oriented anisotropic materials / A.N. Norris, G.R. Wickham // Wave motion. – 2001. – V. 33, № 1. − P. 97-108.

186. Pai D.M. Wave propagation in inhomogeneous media: a planewave layer interaction method / D.M. Pai // Wave motion. − 1991. − V. 13, № 3. − P. 205-306.

187. Payton R. G. Wave-front singularities for two-dimensional anisotropic elastic waves / R. G. Payton // Proc. Cambr. Phil. Soc. - 1972. - V. 72, № 1. - P. 105-116.

188. Rossihin Yu. A. ray method for solving dynamic problems connected with propagation of wave surface of strong and weak discontinuities / Yu. A. Rossihin, M. V. Shitikova // Appl. Mech. Rev. – 1995. − V. 48, № 1. − P. 1-39.

189. Smirnova N. S. Following screened perturbations in a elastic medium / N. S. Smirnova // Journal of Mathematical Sciences. – 1990. – V. 50, № 6. − P. 2044-2049.

190. Tang L. Guided elastic waves in infinite free-clamped hollow cylinders / L. Tang, S. Liu // Progress in Natural Science. – 2009. – V. 19. – P. 313-320.

191. Testing the intraplate origin of mega-earthquakes at subduction margins / [P. K. Khan, P. P. Chakraborty, G. Tarafder, S. Mohanty] // Geoscience frotiers. – 2012. – V. 3(4). – P. 473-481.

192. Tsuji T. Pore pressure distribution of a mega-splay fault system in Nankai Trough subduction zone: insight into up-dip extent of the seismogenic zone / T. Tsuji, R. Kamei, R. G. Pratt // Earth and Planetary Science Letters. – 2014. – V. 396. – P. 165-178.

193. Transformation of seismic discontinuous waves by hyperboloid interfaces in anisotropic elastic media / [N. W. Musa, V. I. Gulyayev, Yu. A. Zaets et al.] // International Journal of Scientific and Engineering Research. – 2014. – V. 5, № 12. – P. 962-977.

194. Vavrycuk V. Asymptotic Green's function in homogeneous anisotropic viscoelastic media / V. Vavrycuk // Proc. R. Soc. A. – 2007. – V. 463. – P. 2689-2707.

195. Virovlyansky A.L. Ray-based description of normal mode amplitudes in a range-dependent waveguide / A.L. Virovlyansky, A.Yu. Kazarova, L.Ya. Lyubavin // Wave motion. – 2005. – V. 42, № 4. - P. 317-334.

196. Virtual seismometers in the subsurface of the Earth from seismic interferomentry / [A. Curtis, H. Nicolson, D. Halliday et al.] // Nature Geoscience. – 2009. – V. 2. – P. 700-704.

197. Wang C. Role of S waves and Love waves in coseismic permeability Enhancement / C. Wang, Y. Chia, P. Wang, D. Dreger // GEOPHYSICAL RESEARCH LETTERS. – 2009 − V. 36. – P. 1-5.

198. Wang K. Deformation cycles of subduction earthquakes in a viscoelastic Earth / K. Wang, Y. Hu, J. He // Nature. – 2012. – V. 484. – P. 327-332.

199. Wang X. Surface and interfacial waves in anisotropic elastic quasicrystals / X. Wang, P. Schiavone // Wave Motion. – 2014. – V. 51. – P. 77-85.

200. Woods R. D. Screening of surface waves in soils / R. D. Woods // Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division. Proceedings, ASCE. – 1968. – V. 94, № 4. – P. 951-979.

201. Yajima T. Finsler geometry of seismic ray path in anisotropic media / T. Yajima, H. Nagahama // Proc. R. Soc. A. – 2009. – V. 465. – P. 1763-1777.

ДОДАТОК А
ДОВІДКИ ПРО ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ РОБОТИ

1. Довідка про впровадження в навчальний процес результатів кандидатської дисертаційної роботи Ю.О. Заєць “Екранування розривних хвиль в неоднорідних трансверсально-ізотропних пружних середовищах”.

2. Довідка про впровадження результатів кандидатської дисертаційної роботи Ю.О. Заєць “Екранування розривних хвиль в неоднорідних трансверсально-ізотропних пружних середовищах” у ТОВ “ПАСДОРСЕРВІС”.

3. Свідоцтво про реєстрацію авторського права Державною службою інтелектуальної власності України на розроблену під час підготовки дисертаційної роботи комп’ютерну програму «Комп’ютерне моделювання процесів екранування ударних хвиль на неоднорідностях земних порід з метою зменшення їх дії на споруди».

4. Свідоцтво про внесення відомостей до Реєстру виробників та розповсюджувачів програмного забезпечення Державною службою інтелектуальної власності України на розроблене під час підготовки дисертаційної роботи програмне забезпечення «Комп’ютерне моделювання процесів екранування ударних хвиль на неоднорідностях земних порід з метою зменшення їх дії на споруди».

009295

УКРАЇНА

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТРАНСПОРТНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

01 010, Київ, вул. Суворова, 1, т.ф. +38 (044) 280 8203, т. +38 (044) 280 8765, e-mail: general@ntu.edu.ua

09 06 15 № 1416/13

на № _____

ДОВІДКА
про впровадження в навчальний процес результатів
кандидатської дисертаційної роботи Ю.О. Заєць
"Екранування розривних хвиль в неоднорідних трансверсально-ізотропних пружних середовищах"

Дисертаційна робота Ю.О. Заєць "Екранування розривних хвиль в неоднорідних трансверсально-ізотропних пружних середовищах" присвячена проблемі аналізу поширення та екранування слабких ударних хвиль на неперервних та розривних неоднорідностях пружних середовищ. Для розв'язання поставлених задач у дисертації розроблена математична модель і побудовані основні співвідношення кінематики та динаміки поширення розривних хвиль в пружних середовищах з неперервними та шарувато-розривними неоднорідностями їх механічних параметрів. Вони можуть застосовуватись для моделювання ефектів захисту об'єктів і споруд від дії ударних (зокрема і сейсмічних) хвиль шляхом їх екранування природними або штучно створеними неоднорідностями середовища.

Розроблені в дисертаційній роботі методи комп'ютерного моделювання динамічних процесів в пружних середовищах впроваджені в навчальний процес на кафедрі опору матеріалів та машинознавства Національного транспортного університету при викладанні курсу з будівельної механіки транспортних споруд.

Проректор з навчальної роботи
професор О.К. Грищук

Завідувач кафедри опору
матеріалів та машинознавства
професор В.Г. Піскунов

ТОВАРИСТВО З ОБМЕЖЕНОЮ ВІДПОВІДАЛЬНІСТЮ
«ПАСДОРСЕРВІС»

Адреса: 03035, м. Київ, вул.. Механізаторів,10
Код за ЄДРПОУ: 34297358
п/р 26007023000570 в ПАТ «БАНК «ЮНІСОН» м. Київ, МФО 380902
Свідоцтво платника податку №200154887 , ІПН 342973526589
Платник податку на прибуток на загальних підставах
Тел../факс: (044) 574-12-05

ДОВІДКА

про впровадження результатів
кандидатської дисертаційної роботи Ю.О. Заєць
"Екранування розривних хвиль в неоднорідних
трансверсально-ізотропних пружних середовищах",
виконаної у Національному транспортному університеті

Результати наукових досліджень, отримані Ю.О. Заєць в її кандидатській дисертації "Екранування розривних хвиль в неоднорідних трансверсально-ізотропних пружних середовищах", представляють значний інтерес для нашої організації. Методи комп'ютерного моделювання явищ перетворення та екранування розривних хвиль на неперервних та розривних неоднорідностях пружних середовищ, розроблені в дисертації, використовуються нами при проектуванні об'єктів промислового призначення, з метою виявлення сейсмонебезпечних зон для їх будівництва та їх захисту від впливу динамічних хвиль, збурених природними або техногенними чинниками.

З повагою,

Директор **Пастернак О.В.**

ТОВАРИСТВО З ОБМЕЖЕНОЮ ВІДПОВІДАЛЬНІСТЮ

УКРАЇНА

ДЕРЖАВНА СЛУЖБА ВЛАСНОСТІ УКРАЇНИ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОЇ

СВІДОЦТВО

про реєстрацію авторського права на твір

№ 61564

Комп'ютерна програма "Комп'ютерне моделювання процесів екранування ударних хвиль на неоднорідностях земних порід з метою зменшення їх дії на споруди"

(вид, назва твору)

Автор(и) **Гуляєв Валерій Іванович, Засць Юлія Олександрівна**

(повне ім'я, псевдонім (за наявності))

Дата реєстрації 08.09.2015

Голова Державної служби інтелектуальної власності України

А.Г. Жарінова

УКРАЇНА

ДЕРЖАВНА СЛУЖБА ВЛАСНОСТІ УКРАЇНИ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОЇ

СВІДОЦТВО

про внесення відомостей до Реєстру виробників та розповсюджувачів програмного забезпечення

Серія ВР № 01813

Національний транспортний університет

(найменування суб'єкта господарювання (повне та скорочене (якщо таке є) або прізвище, ім'я та по батькові фізичної особи-підприємця)

із зазначенням організаційно-правової форми)

Код за ЄДРПОУ юридичної особи або реєстраційний номер облікової картки платника податків або номер та серія паспорта (для фізичних осіб, які через свої релігійні або інші переконання відмовляються від прийняття реєстраційного номера облікової картки платника податків, офіційно повідомили про це відповідні органи державної влади і мають відмітку у паспорті)

02070915

Вид діяльності у сфері програмного забезпечення

виробництво та розповсюдження

Місцезнаходження (місце проживання)

вул. Суворова, [illegible], м. Київ, 01010

Найменування програмного забезпечення, яке виробляється, розповсюджується

"Комп'ютерне моделювання процесів екранування ударних хвиль на неоднорідностях земних порід з метою зменшення їх дії на споруди"

Голова (найменування посади) — (підпис) — **Жарінова А.Г.** (прізвище, ініціали)

М.П.

09.07.2015
(дата реєстрації)

20.07.2015
(дата видачі)

УКРАЇНА · UKRAINE · УКРАЇНА · UKRAINE · УКРАЇНА · UKRAINE · УКРАЇНА · UKRAINE

Національний транспортний університет, м. Київ

Кафедра «Вищої математики»

Гуляєв Валерій Іванович

Заєць Юлія Олександрівна